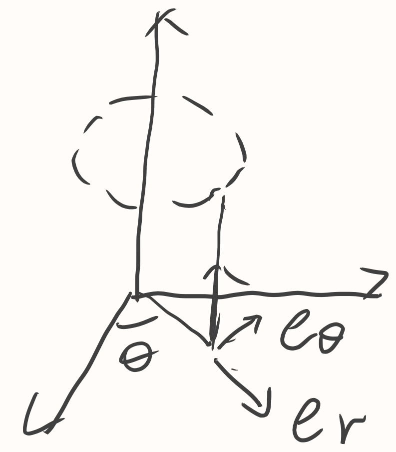
一、运动学

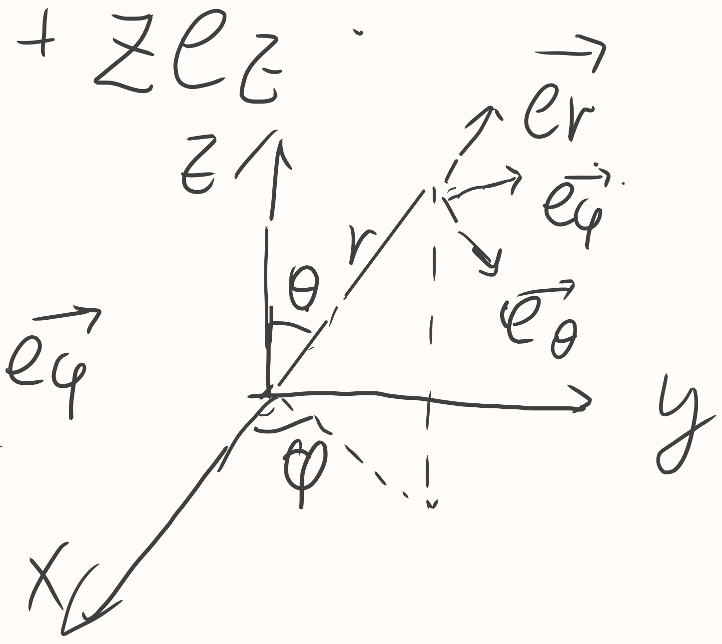
位矢：(x, y, z) $\xrightarrow{\text{对t求导}}$ $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{t})$ 速度 $\xrightarrow{\text{对t求导}}$ $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{t})$ 加速度

其它常见坐标表示方式：柱坐标 (r, θ, z)



$$\vec{r} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{e_z}$$

球坐标 $\vec{r} = r\vec{e_r}$



$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e_\theta} + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\phi}\dot{r}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e_\varphi}$$

自然坐标系：

$$\vec{v} = v\cdot\vec{e_\theta}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\vec{e_\theta})$$
$$= \dot{v}\cdot\vec{e_\theta} + v\cdot\frac{d}{dt}\vec{e_\theta}$$
$$= \dot{v}\cdot\vec{e_\theta} + v\cdot\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{} = \frac{v}{\rho}$$
$$= \dot{v}\cdot\vec{e_\theta} + \frac{v^2}{\rho}\vec{e_r}$$

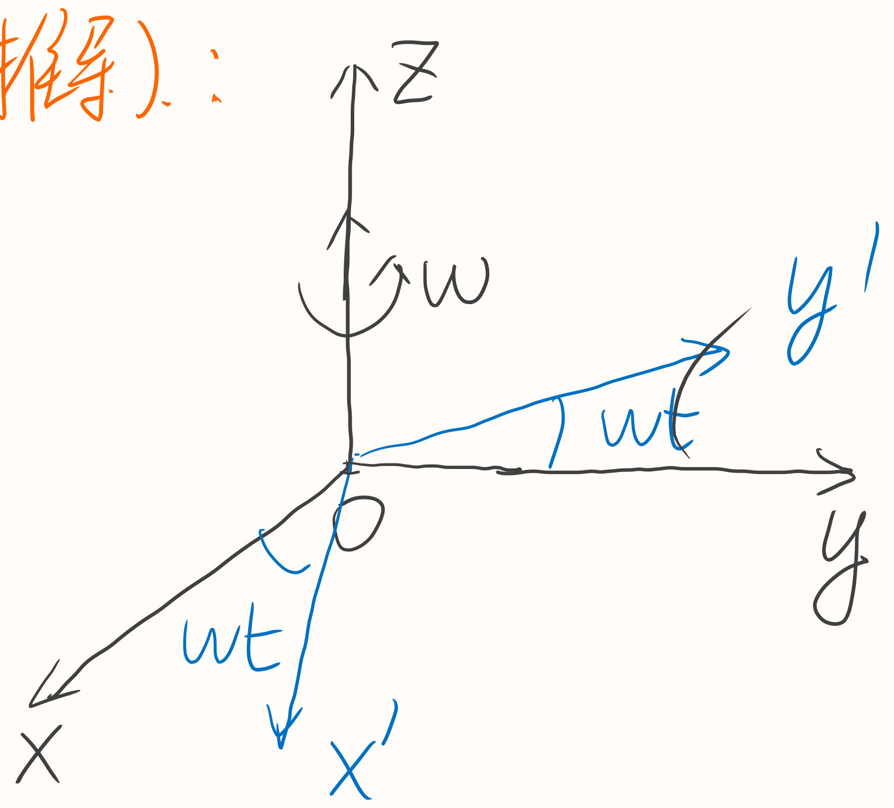
V为速率

ρ为曲率半径.

坐标系的变换

$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{r_{系}}$ $\quad\vec{v'} = \vec{v} - \vec{v_{系}}$ $\quad\vec{a'} = \vec{a} - \vec{a_{系}}$ (平动).

转动参考系(利用矩阵推导)：



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos wt & -\sin wt & 0 \\ \sin wt & \cos wt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos wt & -\sin wt & 0 \\ \sin wt & \cos wt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R} \begin{bmatrix} F_x' \\ F_y' \\ F_z' \end{bmatrix}$$

$r = Rr'$

$F = RF'$

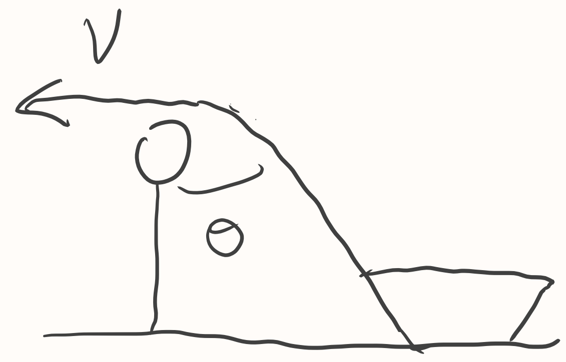
$$F = m\frac{d^2}{dt^2}r$$
$$\Rightarrow RF' = m\frac{d^2}{dt^2}(Rr')$$

$$R\vec{F} = m\cdot w^2\begin{bmatrix} -\sin wt & -\cos wt & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} + 2mw\begin{bmatrix} \cdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{bmatrix} + mR\begin{bmatrix} \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F' = mw^2R^{-1}\left[\quad\right]\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + 2mwR^{-1}\left[\quad\right]\begin{bmatrix} V_x' \\ V_y' \\ V_z' \end{bmatrix} + m\vec{a}'$$

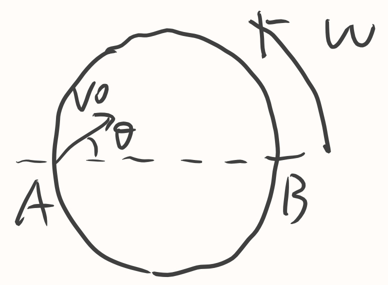
$$F' = m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' + m\vec{a}'$$

例题1:

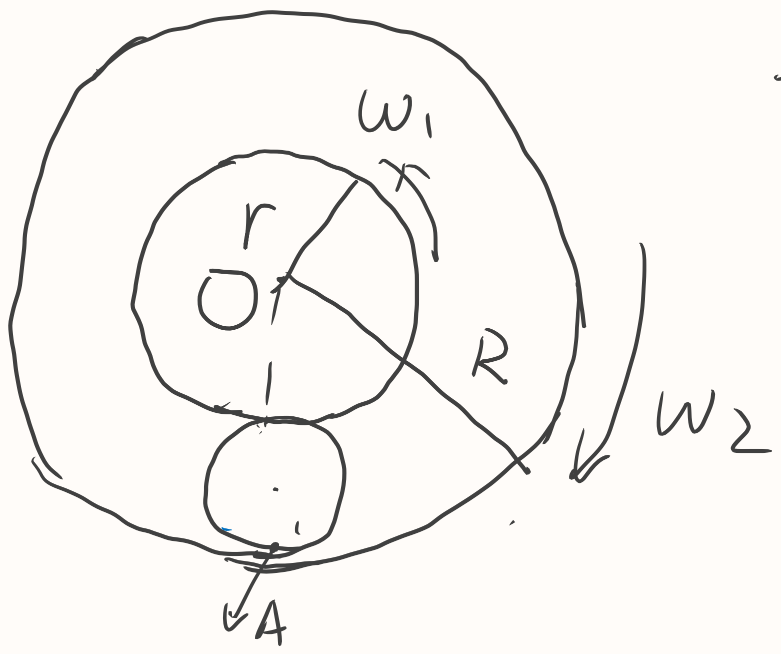


以匀速V收绳
求夹角θ时小船速度.加速度

例题2.半径为R水平圆盘绕O以角速度w旋转.盘边缘射手相对盘以速度V_0开枪
设$wR << V_0$.为射中盘另一端B.求角θ



习题.



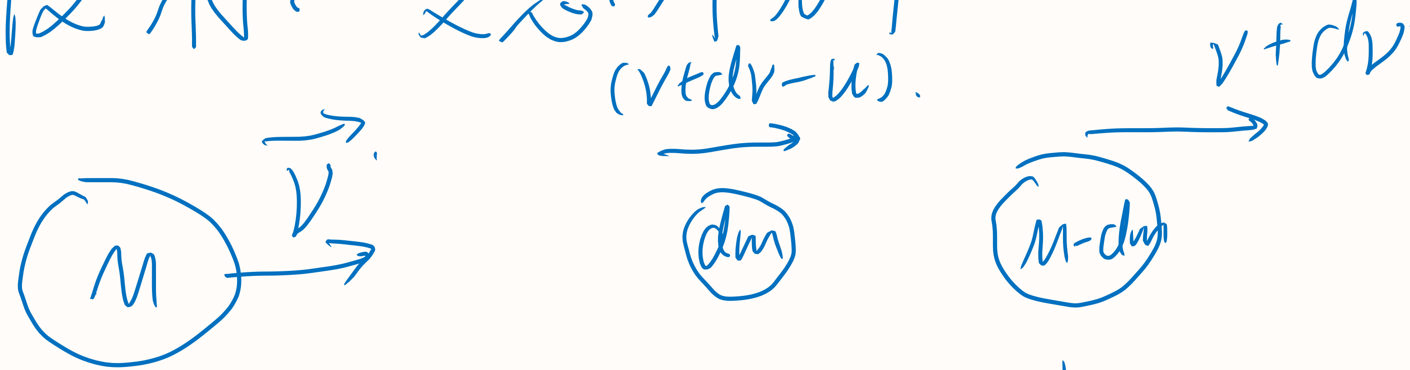
三个盘相对接触间无滑动.O点固定.
求小圆盘上A点.速度.加速度

补:包络线:
$$\begin{cases} f(x,y,\theta)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(x,y,\theta)=0 \end{cases}$$

牛顿第二定理&动量定理.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

火箭发射:受总外力$\vec{F}$



t时刻　　　　t+Δt时刻

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = [(M-dm)(v+dv)+dm(v+dv-u)-Mv]/\Delta t$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{外} = M\frac{dv}{dt} - u\cdot\frac{dm}{dt}$$

质心运动定理：$\vec{F_i} = m_i \cdot \frac{d\vec{v_i}}{dt}$

$$\Rightarrow \sum \vec{F_i} = \sum m_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum m_i v_i) = \frac{d}{dt} M_总 \cdot \vec{V_c} = M_总 \cdot \frac{d\vec{V_c}}{dt}$$

例：

以 $\vec{F}$ 提起线密度 λ 总长 l 的绳 $(F > \lambda l g)$

求刚好被全部提起时速度

错误做法：$\frac{1}{2}\lambda l \cdot v^2 = F \cdot l - \lambda l \cdot g \cdot \frac{l}{2}$ （原因？）

习题：

物块沿斜面下滑，但斜面上有雪，物块与雪发生非弹性碰撞（粘在一起）单位长度雪质量 λ，摩擦系数 μ

求滑到底端速度

能量：$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

定义：保守力：做功与路径无关的力。

$\Rightarrow$ 由格林公式知 $\exists u$

s.t. $du = F_x dx + F_y dy$

$\Rightarrow$ F 可写为 $-\nabla\varphi$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

若F保守力 $\Rightarrow dE_k = (-\nabla\varphi) \cdot d\vec{r}$

$$dE_k = -d\varphi$$

$d(E_k + \varphi) = 0 \Rightarrow E_k + \varphi = \text{Const}$

此即机械能守恒

例：转动参考系 $\vec{\omega}$

$\because \vec{v'} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v'}) = 0 \Rightarrow$ 科氏力无对应势场

对于离心力 $d\vec{r'} \cdot (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})) \neq 0$

$$-\nabla V = m\omega^2 r$$

$$\Rightarrow V = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

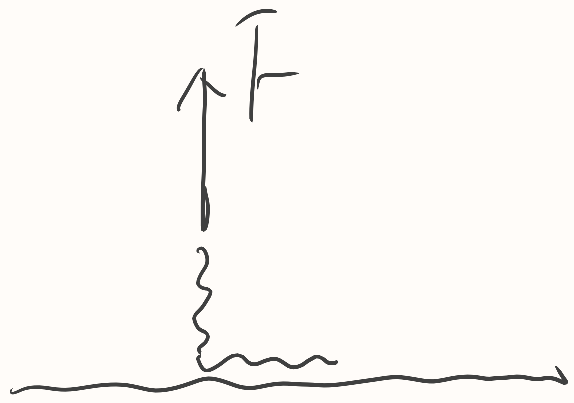
质心动能定理 & 质心系中的动能定理

$$\vec{F_外} = M_总 \frac{d\vec{v_c}}{dt}$$

$\Rightarrow F_{外} \cdot V_c \cdot dt = M_{总} \cdot V_c \cdot dV_c$

$\Rightarrow \vec{F}_{外} \cdot d\vec{r_c} = dE_{kc}$ 质心动能定理.

例:



质心系的动能定理:

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{V_c} + \vec{V_i} - \vec{V_c})^2$$

$$= E_{kc} + \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{V_i} - \vec{V_c})^2 + \frac{1}{2}\vec{V_c} \cdot \underbrace{(\sum m_i \vec{V_i} - \sum m_i \vec{V_c})}_{=0}$$

$$= E_{kc} + E_{kc}'$$

此即柯尼希定理: 总动能 = 质心动能 + 相对质心动能

例:

$\omega R = v$

$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} m R^2) \cdot \omega^2$

$= \frac{3}{4} m v^2$.

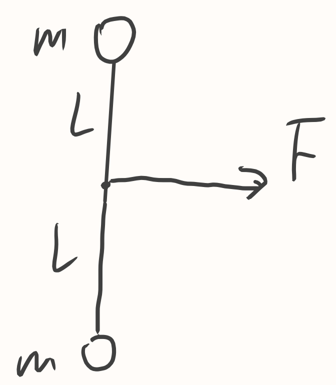
则: $\sum \vec{F_j} \cdot d\vec{r_j} = dE_{k总} = dE_{kc} + dE_{kc}'$

$= \sum \vec{F_j} \cdot d\vec{r_c} + dE_{kc}'$

$\Rightarrow \sum \vec{F_j} \cdot d(\vec{r_j} - \vec{r_c}) = dE_{kc}'$

质心系的动能定理.

例:



求两小球相碰时的相对速度

天体.

天体有很多二级结论, 尽力掌握一些.

1° 方程:
$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) & \text{径向} \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 & \text{切向} \end{cases}$$

$0 = m(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta)$

$= \frac{d}{dt}(mr^2\dot\theta)\cdot\frac{1}{r}$

$\Rightarrow mr^2\dot\theta = C$ 此即角动量守恒 记角动量为L

现做换元: $u=\frac{1}{r}$

$mr^2\dot\theta = L \Leftrightarrow \dot\theta = u^2 h \quad (h=\frac{L}{m})$

化简后有: $u^2h^2\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = -\frac{F(r)}{m}$

比耐方程

1° 若 $F=-\frac{k}{r^2}$ (万有引力)

$\Rightarrow u+\frac{d^2u}{d\theta^2}=c' \Rightarrow u-c'=c''\cos\theta$

$\Rightarrow r=\frac{1}{c'+c''\cos\theta}$ ⇒ 圆锥曲线

拉格朗日-龙格-楞次矢量.

$\vec S = \frac{\vec P\times\vec L}{GMm^2} - \hat r$ ⇒ 守恒. $|\vec S| = e = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$

$\vec S\cdot\vec r = |\vec S|\, r\cos\theta$

$= \frac{(\vec P\times\vec L)\cdot\vec r}{GMm^2} - r$

$= \frac{L^2}{GMm^2} - r$

$\Rightarrow r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+|\vec S|\cos\theta}$

有效势能:

∵ L守恒 ⇒ $\frac12 mr^2\dot\theta^2 = \frac{L^2}{2mr^2}$ (切向动能)

⇒ 一个动量长的像势能!

记 $V_{eff} = E_p + \frac{L^2}{2mr^2}$

$\Rightarrow E=\frac12 m\dot r^2 + V_{eff}$ ⇒ 可化为一维问题讨论.

二体的动能:

$E_k = \frac12 m_1(\vec V_1\cdot\vec V_1) + \frac12 m_2(\vec V_2\cdot\vec V_2)$

$= \frac12(m_1+m_2)(\vec V_c\cdot\vec V_c) + \frac12\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\vec V'\cdot\vec V')$

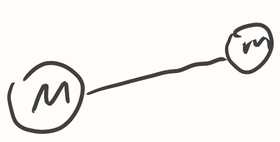
$\vec V_c = \frac{m_1\vec V_1+m_2\vec V_2}{m_1+m_2} \qquad V' = \vec V_2 - \vec V_1$

⇒ 视一个不动

另一个: $\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec a' = \vec F$

⇒ 对于两个天体可做以下等效处理

将一个固定



⇒ 另一个的质量变为 "$\frac{Mm}{M+m}$"

而势能不变 仍为 $\frac{GMm}{r}$

刚体.

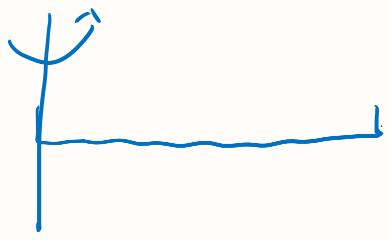
定义 $I=\int m r_i^2$ 见下表:

动量 $\vec P$	角动量 $\vec L$

因此可以完全类比的计算

质量 m	转动惯量 I
速度 v	角速度 $\vec{\omega}$
$\vec{p}=m\vec{v}$	$\vec{L}=\overleftrightarrow{I}\vec{\omega}$
$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$
$E=\frac{1}{2}mv^2$	$E=\frac{1}{2}I\omega^2$

I的求法：



$m=\lambda l$

设 $I=k\cdot m\cdot l^2$

$=k\cdot\lambda\cdot l^3$

$\Rightarrow \Delta I=3k\lambda l^2\cdot\Delta l$

又：$\Delta I=\lambda\Delta l\cdot l^2$

$\Rightarrow k=\frac{1}{3}$

补：关于 $\vec{L}=\overleftrightarrow{I}\vec{\omega}$ 说明：

刚体必有一个转轴.（原因：三阶正交阵有特征值 1）

$\Rightarrow$ 则 $\vec{v}$ 可写为 $\vec{\omega}\times\vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{L}=\sum \vec{r_i}\times m_i(\vec{\omega}\times\vec{r_i})$$

$$=\sum\vec{\omega}(m_i r_i^2)-\sum\vec{r_i}(m_i\vec{\omega}\cdot\vec{r_i})$$

记 $\vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{L}=\vec{i}\left[\omega_x\sum m_i(y^2+z^2)-\omega_y\sum m_i xy-\omega_z\sum m_i xz\right]$$

$$+\vec{j}\left[\omega_y\sum m_i(x^2+z^2)-\cdots\cdots\right]$$

$$+\vec{k}\left[\cdots\cdots\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}I_{xx}&-I_{xy}&-I_{xz}\\-I_{yx}&I_{yy}&-I_{yz}\\-I_{zx}&-I_{zy}&I_{zz}\end{bmatrix}}_{\text{称为惯量张量. 记为 }\overleftrightarrow{I}}\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}$$

$$E_k=\sum\frac{1}{2}m_i(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\sum\frac{1}{2}\vec{p_i}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

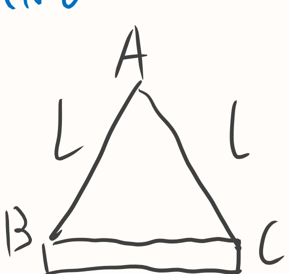
$$=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}=\frac{1}{2}\omega^T\overleftrightarrow{I}\omega.$$

从物理直观. $\omega\neq 0\Rightarrow E_k>0$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{I}$ 为正定矩阵. 可通过旋转变为 $\begin{bmatrix}I_x&&\\&I_y&\\&&I_z\end{bmatrix}$ 称为惯量主轴

同样. 有质心角动量定理：$\vec{M_c}=\frac{d\vec{L_c}}{dt}$

例：



$\downarrow g$. 剪断AC.求杆的角加速度

L, m.

振动

基本方程: $ma=-kx$

$(m\ddot{x}+kx=0,\quad \ddot{x}+\omega^2x=0)$

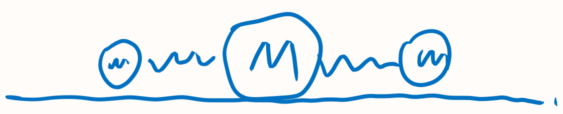
$\Rightarrow m\frac{dv}{dt}=-kx$ $\Rightarrow$ 因此若能量为 $\frac{1}{2}A\dot{q}^2+\frac{1}{2}Bq^2$

$\Rightarrow m\,v\,dv=-kx\,dx$ 则角频率 $\omega=\sqrt{\frac{B}{A}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=0$

例1. 质量m 处在平衡位置 势能Ep 坐标x 求小振动角频率

补:多自由度:简正模



$\omega_1=\sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}}$

$\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega_3=0$ (平动)

波动方程: $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-V_s^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=0$

驻波: $A_0\cos(\omega t-kx+\varphi_1)+A_0\cos(\omega t+kx+\varphi_2)$ 不妨令 $\varphi_1=\varphi_2=0$

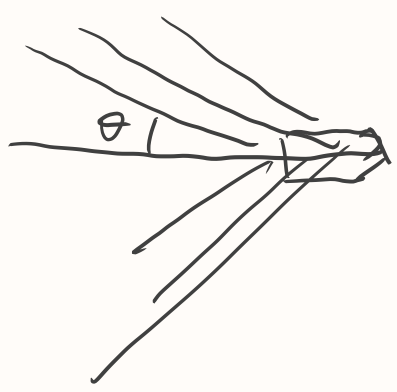
$=2A_0\cos\omega t\cos kx$

$\Rightarrow$ 稳定存在: $L=k\cdot\frac{\lambda}{2}$, $k=1,2,\cdots\cdots$

相速度 群速度

$V_1=\frac{\omega}{k}$, $V_2=\frac{d\omega}{dk}$ 波的传播速度

例:

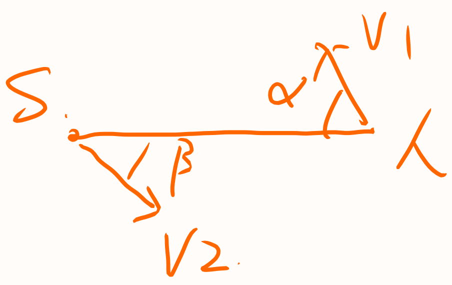


船笔直走

求水纹夹角θ

已知对于水 $\omega\propto k^{\frac{1}{2}}$

多普勒: $f'=f_0\cdot\frac{V_s+V_1\cos\alpha}{V_s-V_2\cos\beta}$



流体. 设: $f(x,y,z,t)$.

$\Rightarrow \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial z}$

$=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)$

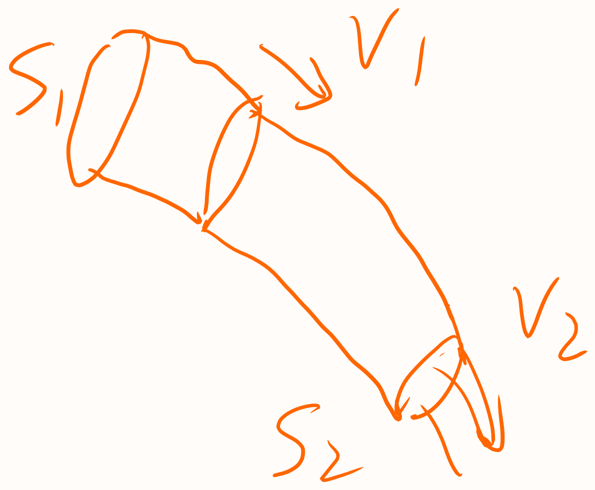
连续性方程：$\nabla\cdot(\rho\vec{v})=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$

静态：$\underset{压强}{\nabla P}=-\underset{势能}{\nabla V}$ $\Rightarrow$ 重力 $\nabla P=-\rho g$，$P=-\rho g z$

粘滞系数：$\frac{f}{S}=\eta\cdot\underset{速度梯度}{\frac{\partial v}{\partial x}}$ $\Rightarrow$ 阻力 $f=6\pi\eta R v$

表面张力：$f=\sigma l$

可压缩流体 ρ、P 关系



$\rho_1\cdot v_1\cdot S_1=\rho_2\cdot v_2\cdot S_2=A$

$dW_1=P_1S_1v_1dt-P_2S_2v_2dt$

$dW_2=A\cdot dt\cdot(U_1-U_2)$

$\Rightarrow\frac{1}{2}(A\cdot dt)(v_2^2-v_1^2)=dW_1+dW_2$

$\Rightarrow\frac{1}{2}v^2+\frac{P}{\rho}+\underset{单位质量对应势能}{\underline{U}}=C$

更一般的
只需 $\nabla\times\vec{v}=0$
此式成立

条件：
- 无能量损耗
- 同一流管
- 稳定流动

相对论（狭义）

关键：光速不变

洛伦兹变换：
$$\begin{cases}x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ y'=y\\ z'=z\end{cases}$$

守恒量：$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$

相对论动能 $E_k=mc^2-m_0c^2$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2 - m_0 c^2$$

$$\approx m_0\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)c^2 - m_0 c^2$$

$$= \frac{1}{2} m v^2.$$

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

飞船相对地面速度 v. 飞船头部向尾部发出光信号

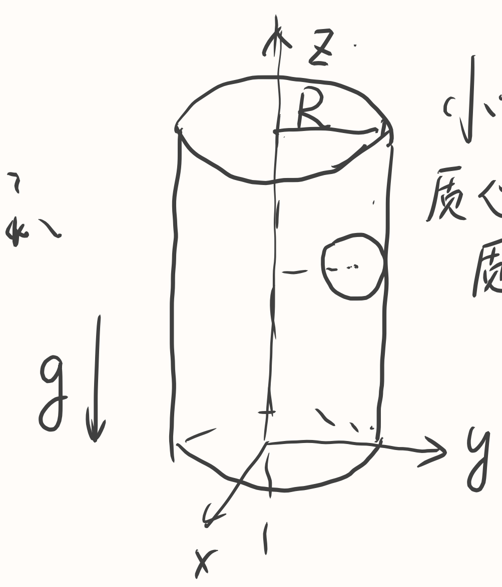
Δt 后(飞船钟)被尾部接受.

则飞船固有长度:

若 Δt 是地面系时间

则飞船固有长度:

力学综合习题:



小球沿圆柱内壁纯滚动(即小球与圆柱内表面无相对滑动)

质心初始位置 $(0, R-r, h)$

质心初始速度 $(v, 0, 0)$

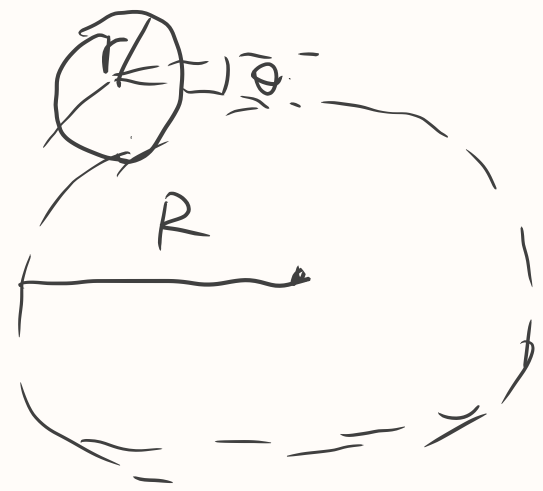
试求位置随时间变化.

力学综合习题2:

半径为 r 硬币. 绕半径 R 圆

滚动 质心速度 v.

求 θ.



(书上 8.37)