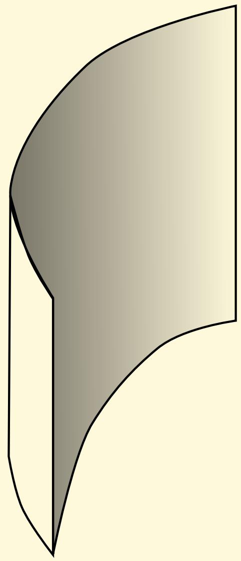
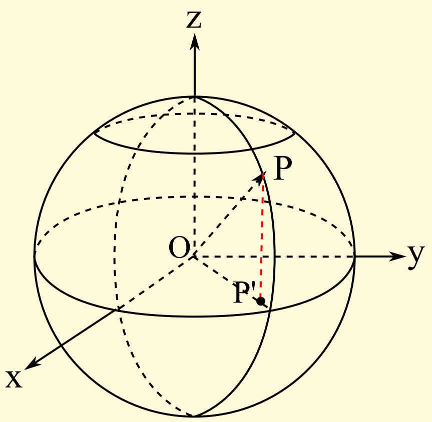
§11.4　向量场在曲面上的积分

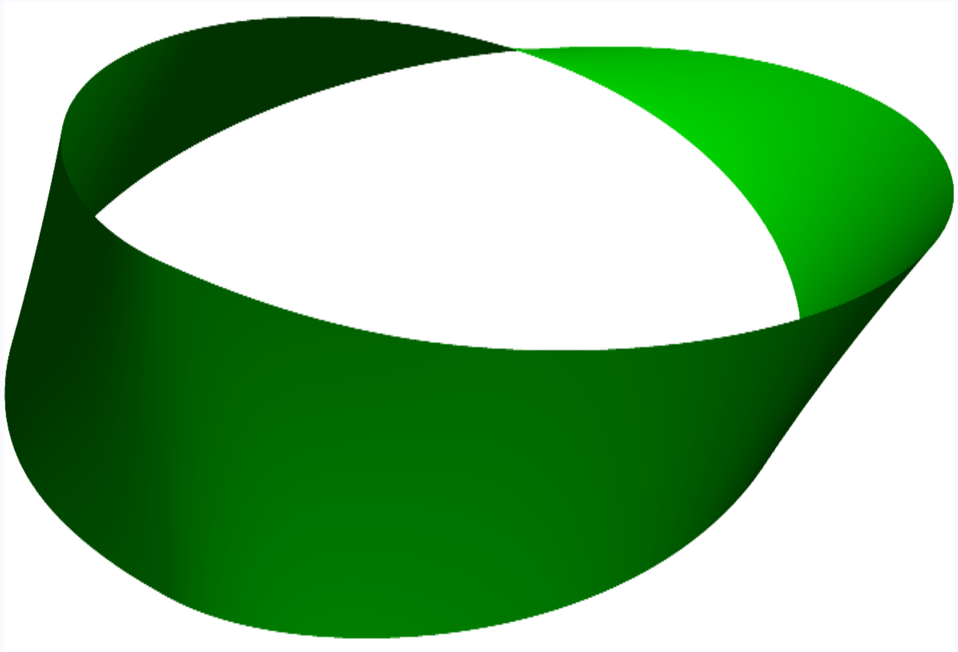
11.4.1　双侧曲面及其定向

通常我们所见到的具有边界的曲面都有正侧和反侧、或 (对于没有边界的封闭曲面来说) 有里侧和外侧之分. 对于这样有双侧的曲面, 如果一个油漆匠油漆曲面的某一侧, 只要他不越过曲面的边界, 是无论如何也不会油漆到另一侧的.

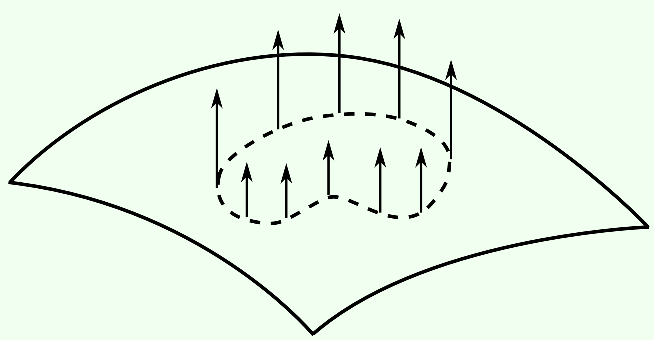


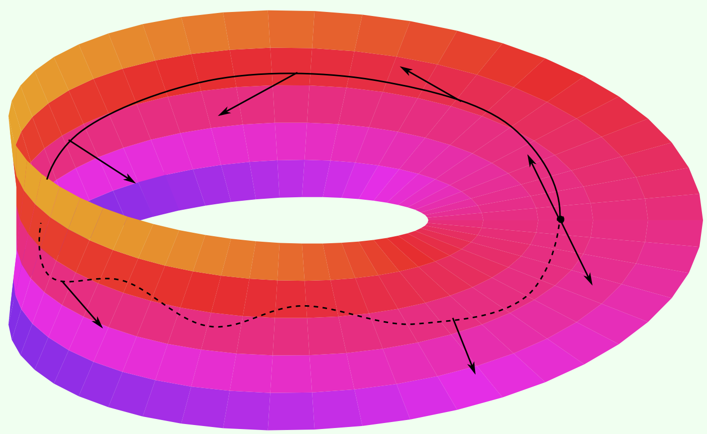


然而, 并非所有的曲面都是如此. 一个典型的例子叫做 "Möbius 带". 将一长方形纸条 $ABCD$ 扭转 180°, 再沿 AB 和 CD 两边粘起来, 使 A 和 C 重合, B 和 D 重合, 就得到了这种带形的模型. 这时, 如果油漆匠从任意一点开始油漆, 他不需要越过边界就可将 Möbius 带的所有地方连续地油漆一遍, 即这种曲面只有一个侧面! 因此, 我们需要在数学上刻划曲面的双侧性或单测性, 明确曲面的定向.



设 S 光滑曲面, 因此在每一点 M 都有非零的法向量 $\vec{n}(M)$. 显然与 $\vec{n}(M)$ 指向相反的向量 $-\vec{n}(M)$ 也是 S 在 M 的法向量, 它们都与曲面的切平面垂直. 对任一点 $M_0 \in S$, 取定 S 在 M_0 的法向量中的一个, 记为 $\vec{n}(M_0)$. 任作一条 S 上过 M_0 的闭曲线 L. 让点 M 从 M_0 出发沿 L 移动, 在 M 经过的每一点取一个法向量 $\vec{n}(M)$ 使 $\vec{n}(M)$ 为连续变化, 如果当 M 回到 M_0 时, 取到的法向量总是 $\vec{n}(M_0)$, 就称 M_0 是曲面 S 的双侧点, 如果曲面上每一点都是双侧的, 则称曲面是一张双侧曲面. 否则, 就称 S 是一张单侧曲面.





双侧曲面的定向 设 S 是三维空间中一个双侧光滑曲面. 对于 S 上任一点 M_0 有两个单位法方向 $\vec{n}(M_0)$ 和 $-\vec{n}(M_0)$, 只要指定其中一个 $\vec{n}(M_0)$, 则通过连续滑动, 就可以确定曲面上所有的点 M 处相对应的 $\vec{n}(M)$. 这样曲面上的所有点和通过上面的方法所得到的法方向就是 S 的一侧. 相反的侧就是曲面上所有点 M 都取法方向 $-\vec{n}(M)$.

当曲面 S 在直角坐标系下具有参数方程表示

$$\vec{r} = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \quad (u,v) \in D$$

时, 它的两个法向量是

$$\pm\, \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v = \pm \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

这时可以指定其中一个代表正侧方向, 另一个就代表负侧方向. 习惯上, 我们选择

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v}{|\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|}$$

作为正方向的单位法向量.

特别当曲面的表示

$$S:\quad z=f(x,y)\quad (x,y)\in D$$

为显式表示时, 取

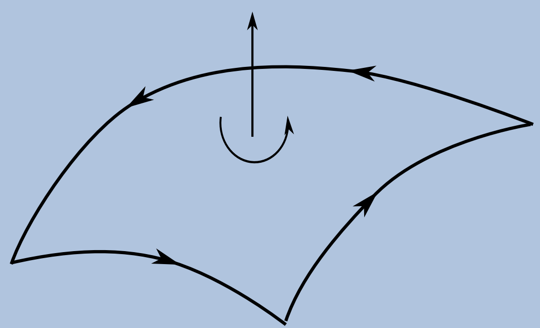
$$\vec{n}=\frac{\left(-f'_x,\ -f'_y,\ 1\right)}{\sqrt{(f'_x)^2+(f'_y)^2+1}}$$

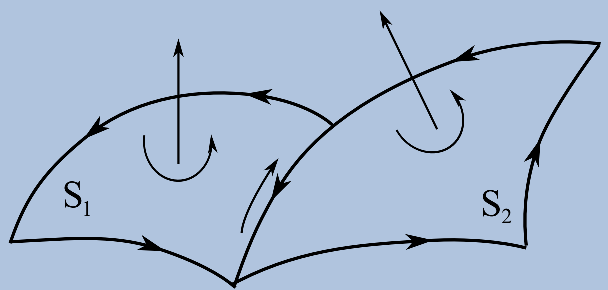
它与 Oz 轴正方向的夹角为锐角. 因此所指向的一侧称为曲面的上侧, 而另一侧称为下侧.

对于封闭曲面, 法向量指向外面的那一侧称为外侧, 另一侧称为内侧. 例如以原点为圆心的球 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 其指向外侧的法向量为

$$\vec{n}=\frac{(x,y,z)}{R}=\frac{\vec{r}}{R}.$$

双侧曲面边界的定向 有时，我们需要将曲面的取向与其边缘曲线的方向相协调，协调的原则是曲面的取向与边界曲线的方向构成右手系，即当右手拇指与法向量保持一致时，其他四个指头弯曲的方向与边界曲线的方向一致. 这样，确定了曲面的方向就可以确定边界的方向；反过来确定了边界的方向以后，也就确定了曲面的方向.



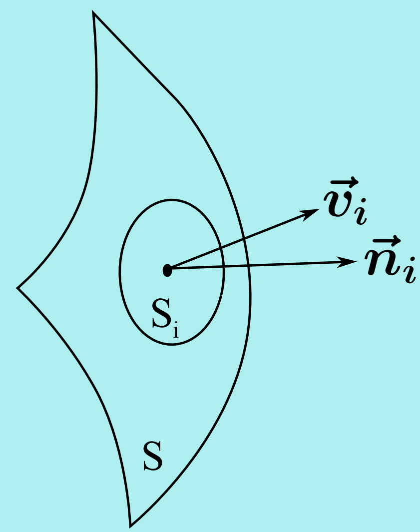


如果曲面 S 是由双侧曲面 S_1 和 S_2 拼接而成. 当 S_1 的边界方向确定后，则应取 S_2 的正方向使 S_1 和 S_2 的公共边界两侧有相反的走向，这就是拼接曲面方向的协调. 由多张双侧曲面拼接成的曲面 S 的定向也应按上述原则在有公共边界的子曲面之间协调.

11.4.2 第二型曲面积分

流通量的计算 设 S 是流速场 $\vec{v}$ 中一张定向光滑曲面. 求单位时间内流过 S 的流量. 为此, 将 S 分割成有限个充分小的小曲面片 $S_1, S_2, \cdots, S_n$. 在每个曲面片 S_i 上, 流速场近似为一个常向量 $\vec{v}_i = \vec{v}(M_i)$ $(M_i \in S_i)$, S_i 上的单位法向 $\vec{n}$ 也近似为单位常向量 $\vec{n}_i = \vec{n}(M_i)$. 记 S_i 的面积为 ΔS_i, 则单位时间内流过 S_i 的流量近似为 $\vec{v}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i)\Delta S_i$. 因而单位时间内流过 S 的流量近似为

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{v}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i)\Delta S_i.$$



如果当对 S 的分割的宽度趋于零时, 上面的和式有极限 A, 则这个极限应该就是所求的流速场中单位时间内流过 S 的流量.

定义 1 设 S 是三维空间向量场 $\vec{F}$ 中一张定向光滑曲面, $\vec{n}$ 是 S 上的单位法向. 将 S 分割成有限个充分小的有面积的小曲面片 $S_1, \cdots, S_n$. 在每个曲面片 S_i 上取一点 M_i, 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \Delta S_i,$$

其中 ΔS_i 为 S_i 的面积. 如果当分割的宽度 (小曲面片直径中的最大者) 趋于零时, 不论 M_i 在 S_i 中如何选, 上面的和式都有固定的极限 A, 那么这个极限 A 就称为向量场 $\vec{F}$ 在有向曲面 S 上的第二型曲面积分, 记为

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS, \tag{11.1}$$

其中 $d\vec{S} = \vec{n} dS$ 称为有向面积微元.

在物理中电通量、磁通量等都是第二型曲面积分.

设 $\vec{F}=(P,Q,R)$, 法向 $\vec{n}$ 与 x 轴, y 轴, z 轴的夹角分别为 α,β,γ, 因而 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 此时

$$\vec{F}\cdot\vec{n}dS=P\cos\alpha dS+Q\cos\beta dS+R\cos\gamma dS.$$

令

$$\begin{cases} dy\wedge dz:=\cos\alpha dS, \\ dz\wedge dx:=\cos\beta dS, \\ dx\wedge dy:=\cos\gamma dS, \end{cases} \tag{11.2}$$

($dy\wedge dz$ 是有向曲面微元 $d\vec{S}$ 在 yz 平面上的投影) 则 $\vec{F}$ 在 S 上的第二型曲面积分可写表为

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy. \tag{11.3}$$

这是第二型曲面积分的另一个常用表达方式, 有时符号 $\wedge$ 不写出.

当曲面 S 是一张光滑曲面, 并且具有参数方程表示时

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in D.$$

面积微元为 $dS = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| dudv$. 如果设曲面指定侧的单位法向量为

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}.$$

则有向面积元为

$$d\vec{S} = \vec{n} dS = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} dS = (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) dudv.$$

$d\vec{S}$ 的分量形式如下:

$$d\vec{S} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} dudv, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} dudv, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv \right),$$

即有向面积微元在三个坐标平面上的投影为

$$dy \wedge dz = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} dudv, \quad dz \wedge dx = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} dudv, \quad dx \wedge dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv.$$

注意到上式中每一个投影可能是正的, 也可能是负的. 如果 Jacobi 行列式大于零 (例如 $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} > 0$, 表示投影面积元是正的, 否则是负的.)

根据面积元向量的上述表示, 向量场 $\vec{F} = (P, Q, R)$ 的曲面积分可以表示为

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) dudv \\
&= \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv \qquad (11.4) \\
&= \iint_D \left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv. \qquad (11.5)
\end{aligned}$$

如果 S 是显式曲面

$$z = f(x, y) \qquad (x, y) \in D,$$

且不妨设曲面指定的方向为曲面的上侧, 则

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} dxdy \\ &= \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R) dxdy. \end{aligned} \tag{11.6}$$

如果指定的方向是曲面的下侧, 则上述积分前应加上负号.

第二型曲面积分的性质

1) 线性性质, 即若 $\vec{F} = c_1\vec{F}_1 + c_2\vec{F}_2$, 则

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = c_1\iint_S \vec{F}_1\cdot\vec{n}dS + c_2\iint_S \vec{F}_2\cdot\vec{n}dS.$$

2) 关于曲面的可加性, 即若定向曲面 S 由曲面 S_1 和 S_2 协调拼接而成, 则有

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}dS + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}dS.$$

3) 关于曲面的方向性, 即若用 S^+ 和 S^- 表示曲面的两不同侧, 则

$$\iint_{S^-} \vec{F}\cdot\vec{n}dS = -\iint_{S^+} \vec{F}\cdot\vec{n}dS.$$

例 1 设在三维空间的原点处放置一个点电荷 q, 其在点 $\vec{r}=(x,y,z)$ 处的电场强度为

$$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r},$$

其中 $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 则 $\vec{E}$ 通过球面 $S: x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧的电通量为

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS &= \iint_S \frac{q\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{R}dS\\ &= \iint_S \frac{qr^2}{r^3R}dS\\ &= \iint_S \frac{q}{R^2}dS\\ &= \frac{q}{R^2}\cdot 4\pi R^2\\ &= 4\pi q.\end{aligned}$$

例 2 设向量场 $\vec{F} = y(x-z)\vec{i} + x^2\vec{j} + (y^2+xz)\vec{k}$, 求 $\vec{F}$ 通过长方体: $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$ 的外表面 S 的通量.

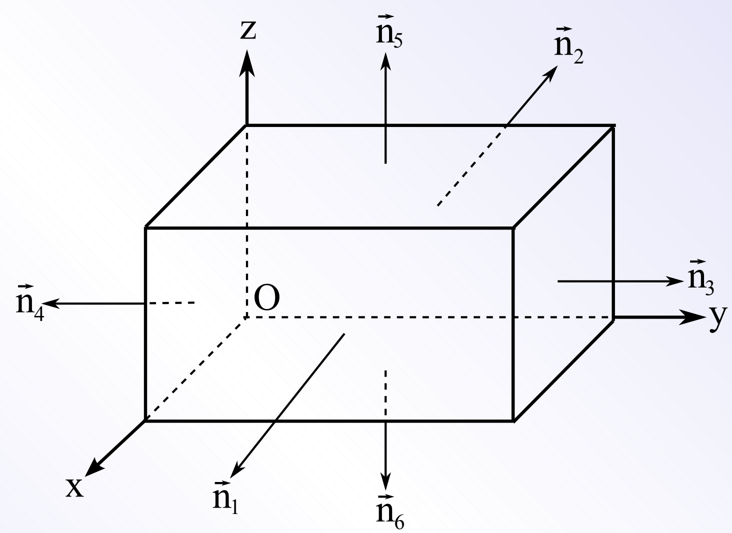
解 设 S 的六个外侧为 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, 法向分别为 $\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_6$. 因此

$$\iint_S y(x-z)dy \wedge dz$$

$$= \iint_{S_1} y(x-z)dy \wedge dz + \iint_{S_2} y(x-z)dy \wedge dz$$

$$= \iint_{\substack{0\leqslant y\leqslant b\\0\leqslant z\leqslant c}} y(a-z)dy \wedge dz - \iint_{\substack{0\leqslant y\leqslant b\\0\leqslant z\leqslant c}} y(0-z)dy \wedge dz$$

$$= \frac{1}{2}ab^2c.$$



类似可得

$$\iint_S x^2 dz\wedge dx = \iint_{S_3} x^2 dz\wedge dx + \iint_{S_4} x^2 dz\wedge dx = 0$$

和

$$\begin{aligned}\iint_S (y^2+xz)dx\wedge dy &= \iint_{S_5}(y^2+xz)dx\wedge dy + \iint_{S_6}(y^2+xz)dx\wedge dy\\ &= \int_0^a dx\int_0^b (y^2+cx)dy - \int_0^a dx\int_0^b y^2 dy\\ &= \frac{1}{2}a^2bc.\end{aligned}$$

所以

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \frac{1}{2}abc(a+b).$$

例 3 求曲面积分

$$I=\iint_S x^2dy\wedge dz+y^2dz\wedge dx+z^2dx\wedge dy,$$

其中 S 是半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0)$ 的上侧.

解 曲面 S 的参数方程是

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\ y=a\sin\theta\sin\varphi,\ z=a\cos\theta,\ (0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\iint_S (x^2,y^2,z^2)\cdot\frac{(x,y,z)}{a}dS=\frac{1}{a}\iint_S(x^3+y^3+z^3)dS\\&=\frac{1}{a}\iint\limits_S z^3dS=\frac{1}{a}\iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}}(a\cos\theta)^3a^2\sin\theta d\theta d\varphi\\&=2\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta d\theta\\&=\frac{\pi}{2}a^4.\end{aligned}$$

|◄ ►| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

例 4 计算曲面积分

$$I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx,$$

其中 S 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,(z \geqslant 0)$ 的上侧.

解 将椭球面 S 表示成参数方程

$$x = a\sin\theta\cos\varphi,\quad y = b\sin\theta\sin\varphi,\quad z = c\cos\theta,$$

其中 θ, φ 的变化范围是矩形 $D:\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. 因为

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)} = bc\sin^2\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)} = ac\sin^2\theta\sin\varphi,\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)} = ab\cos\theta\sin\theta,$$

所以向量 $\vec{r}'_\theta \times \vec{r}'_\varphi$ 指向 S 的上侧, 故由曲面积分的计算公式得

$$\iint_S x^3 dydz = \iint_D a^3\sin^3\theta\cos^3\varphi \cdot bc\sin^2\theta\cos\varphi d\theta d\varphi$$

$$= a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\theta = \frac{2}{5}\pi a^3bc.$$

同理可得

$$\iint_S y^3 dzdx = \frac{2}{5}\pi ab^3 c.$$

从而所求曲面积分的值为

$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx = \frac{2}{5}\pi abc(a^2 + b^2).$$