13.4.2 含参变量反常积分的性质

本节将证明由参变量积分给出的函数

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$$

的连续、可导、积分等性质.

定理 1 若函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 且积分

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上关于 u 一致收敛, 则函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

证明 由于积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 故对任意的正数 ε, 总存在实数 X, 只要 $b>X$, 就有

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,u)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3},\ (\forall\ u\in[\alpha,\beta]).$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上任取一点 u_0, 因为含参变量的常义积分 $\int_a^b f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 所以存在正数 δ, 当 $|u-u_0|<\delta$ 时有

$$\left|\int_a^b f(x,u)dx - \int_a^b f(x,u_0)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

于是, 只要 $|u-u_0|<\delta$, 即可推得

$$\begin{aligned}|\varphi(u)-\varphi(u_0)| &= \left|\int_a^{+\infty} f(x,u)dx - \int_a^{+\infty} f(x,u_0)dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^b f(x,u)dx - \int_a^b f(x,u_0)dx\right| + \left|\int_b^{+\infty} f(x,u)dx\right| \\ &\quad + \left|\int_b^{+\infty} f(x,u_0)dx\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

这就证明了 $\varphi(u)$ 在点 u_0 连续. 由于 u_0 的任意性, 故 $\varphi(u)$ 在整个区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续. 证毕.

定理 2 设 $f(x,u)$ 在 $D=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 在 (α,β) 上一致收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x,\beta)\,dx$ 都收敛, 且积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 因而在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

证明 若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 在 (α,β) 上一致收敛, 则由 Cauchy 准则, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $B>a$ 使得当 $b_2>b_1\geqslant B$ 时

$$-\varepsilon<\int_{b_1}^{b_2} f(x,u)\,dx<\varepsilon$$

对一切 $u\in(\alpha,\beta)$ 成立. 在上式中令 $u\to\alpha^+$ 和 $u\to\beta^-$, 根据含参变量常义积分的性质, 得

$$-\varepsilon\leqslant\int_{b_1}^{b_2} f(x,\alpha)\,dx\leqslant\varepsilon,$$

$$-\varepsilon \leqslant \int_{b_1}^{b_2} f(x,\beta)\,dx \leqslant \varepsilon.$$

因此

$$-\varepsilon \leqslant \int_{b_1}^{b_2} f(x,u)\,dx \leqslant \varepsilon,\ \forall u \ \in [\alpha,\beta].$$

这说明 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. 因此,

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

用此结论很容易判断积分 $\int_a^{+\infty} e^{-ux^2} dx$ 在 $0 < u < 1$ 上不一致收敛.

例 1 证明积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos xu}{x}\, dx$ 在 $0 < u < 1$ 上不一致收敛.

证明 用 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos xu}{x}\, dx$ 对任意 $u \in (0, 1)$ 收敛. 因为 $f(x, u) = \frac{\cos xu}{x}$ 在 $D = [1, +\infty) \times [0, 1]$ 连续, 但

$$\int_1^{+\infty} f(x, 0)\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

发散. 故, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos xu}{x}\, dx$ 在 $0 < u < 1$ 上不一致收敛.

定理 3 若函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 且积分

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上关于 u 一致收敛, 则有

$$\int_\alpha^\beta\varphi(u)du=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^{+\infty}f(x,u)dx\right]du=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx.$$

证明 由假设可知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在这样的数 X, 只要 $b>X$, 对任何 $u\in[\alpha,\beta]$ 都有

$$\left|\int_b^{+\infty}f(x,u)dx\right|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}.$$

因为 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续 (定理1), 所以可积, 且

$$\int_\alpha^\beta\varphi(u)du=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^{b}f(x,u)dx\right]du+\int_\alpha^\beta\left[\int_b^{+\infty}f(x,u)dx\right]du,$$

而对含参变量的常义积分应有

$$\int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(x,u)dx\right] du = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right] dx,$$

所以当 $b > X$ 时就得到

$$\left|\int_\alpha^\beta \varphi(u)du - \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right] dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta \left|\int_b^{+\infty} f(x,u)dx\right| du < \varepsilon.$$

因此, 定理得证.

在定理 3 的条件下, 定理的结论告诉我们, 对 x 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的积分, 和 u 在有限区间 $[\alpha,\beta]$ 上的积分, 两者的次序是可以交换的. 但是, 如果关于 u 的积分区间也是无限的 $[\alpha+\infty)$, 两个积分的交换问题就更复杂一些.

定理 4 如果 $f(x,u)$ 满足下列条件:

1° 函数 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续;

2° 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 关于参变量 u 在任何有限区间 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛; 而且积分 $\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)du$ 关于 x 在任何有限区间 $[a,b]$ 上也一致收敛;

3° 下列两个积分

$$\int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^{+\infty} |f(x,u)|du, \quad \int_\alpha^{+\infty} du \int_a^{+\infty} |f(x,u)|dx$$

中至少有一个存在,

那么

$$\int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^{+\infty} f(x,u)du, \quad \int_\alpha^{+\infty} du \int_a^{+\infty} f(x,u)dx$$

都存在且相等, 即有

$$\int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^{+\infty} f(x,u)du = \int_\alpha^{+\infty} du \int_a^{+\infty} f(x,u)dx.$$

证明 不妨设

$$\int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^{+\infty} |f(x,u)|du \tag{1}$$

收敛. 因此

$$\int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\, du$$

收敛. 只需证

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_\alpha^{\beta} \left(\int_a^{+\infty} f(x,u)dx \right) du = \int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)du \right) dx.$$

由定理 3, 只需证

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^{\beta} f(x,u)du \right) dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)du \right) dx.$$

即,

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_a^{+\infty} \left(\int_\beta^{+\infty} f(x,u)du \right) dx = 0. \tag{2}$$

由 (1), 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $b_0>a$ 使得

$$\int_{b_0}^{+\infty}\left(\int_{\alpha}^{+\infty}|f(x,u)|du\right)dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为 $\int_{\alpha}^{+\infty}f(x,u)du$ 关于 x 在 $[a,b_0]$ 上一致收敛, 所以, 存在 $\beta_0>\alpha$, 使得当 $\beta>\beta_0$ 时, 有

$$\left|\int_{\beta}^{+\infty}f(x,u)du\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b_0-a)},\ \forall\, x\in[a,b_0].$$

所以当 $\beta>\beta_0$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{a}^{+\infty}\left(\int_{\beta}^{+\infty}f(x,u)du\right)dx\right|\\=&\left|\int_{a}^{b_0}\left(\int_{\beta}^{+\infty}f(x,u)du\right)dx+\int_{b_0}^{+\infty}\left(\int_{\beta}^{+\infty}f(x,u)du\right)dx\right|\\\leqslant&\int_{a}^{b_0}\frac{\varepsilon}{2(b_0-a)}dx+\int_{b_0}^{+\infty}\left(\int_{\beta}^{+\infty}|f(x,u)|du\right)dx\\\leqslant&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

此即 (2) 成立. 证毕.

例 2 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, 其中 $0 < a < b$.

解 被积函数可以表成积分

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-ux}du,$$

于是所要计算的积分就变为

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-ux}du,$$

由于对任意 $u \in [a,b]$, 有

$$e^{-ux} \leqslant e^{-ax},$$

而无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ 收敛 $(a > 0)$, 由比较判别法知, $\int_0^{+\infty} e^{-ux}dx$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 又 e^{-ux} 在 $[0,+\infty) \times [a,b]$ 上连续, 根据定理 3 便得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \int_a^b du \int_0^{+\infty} e^{-ux}dx = \int_a^b \frac{du}{u} = \ln\frac{b}{a}.$$

最后再来研究含参变量广义积分的求导问题.

定理 5 如果函数 $f(x,u)$ 满足下列条件:

1° $f(x,u)$ 和 $\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续;

2° $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上收敛;

3° $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

那么 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 并有

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx \qquad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta).$$

定理中的区间 $[\alpha,\beta]$ 换成开区间, 或半开半闭的区间时, 定理的结论也成立.

证明 令 $a_i(u)=\int_{a+i-1}^{a+i} f(x,u)\,dx \quad i=1,2,\cdots$, 则

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx=\sum_{i=1}^{+\infty}a_i(u).$$

利用级数中相应的定理即可.

例 3 计算积分

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx, \qquad \beta \in (-\infty, +\infty).$$

解 因为对任意的实数 β 有

$$|e^{-x^2} \cos 2\beta x| \leqslant e^{-x^2}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 收敛, 故积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$ 收敛. 现计算它的值, 可将 β 视为参数, 由于当 $x > 0$ 时有不等式

$$\left| \frac{\partial}{\partial \beta}(e^{-x^2} \cos 2\beta x) \right| = |2xe^{-x^2} \sin 2\beta x| \leqslant 2xe^{-x^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ 收敛, 所以积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin 2\beta x dx$ 在整个数轴上关于 β 一致收敛, 故依定理 4 得

$$\begin{aligned}\frac{dI(\beta)}{d\beta} &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\beta}(e^{-x^2}\cos 2\beta x)dx \\ &= -2\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin 2\beta x dx \\ &= e^{-x^2}\sin 2\beta x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\big(2\beta\cos 2\beta x\big)dx \\ &= -2\beta I(\beta)\end{aligned}$$

从而函数 $I(\beta)$ 满足微分方程

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -2\beta I(\beta).$$

解微分方程, 并注意到 $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 即得

$$I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}.$$

例 4 设 $x \geqslant 0$. 求证: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt.$

证明 设 $f(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$. 则 $f(x,t)$ 在 $D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续. 由 $0 < f(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ 可知 $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ 关于 x 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 又

$$f'_x(x,t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2}, \quad f''_{xx}(x,t) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}$$

在 D 上连续, 并且对于任意 $x_0 > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$$

都在 $x \in [x_0, +\infty)$ 上一致收敛. 因此, 函数 $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导, 且

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\,dt, \quad F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.$$

于是

$$F(x)+F''(x)=\int_0^{+\infty}e^{-tx}\,dt=\frac{1}{x},\quad (x>0).$$

对于 $G(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt$ 作变换 $t+x=u$ 可得

$$G(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}\,du,\ (x>0).$$

因此, 有

$$G'(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u-x)}{u}\,du,\ G''(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}\,du+\frac{1}{x}.$$

于是当 $x>0$ 时, $F(x)$ 与 $G(x)$ 都满足微分方程 $y''(x)+y(x)=\frac{1}{x}$. 因此

$$F(x)-G(x)=C_1\sin x+C_2\cos x,\ (x>0).$$

显然有 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=0$. 故, $C_1=C_2=0$. 于是 $F(x)=G(x)$.
显然, 当 $x=0$ 时, 也有 $F(0)=G(0)=\frac{\pi}{2}$.