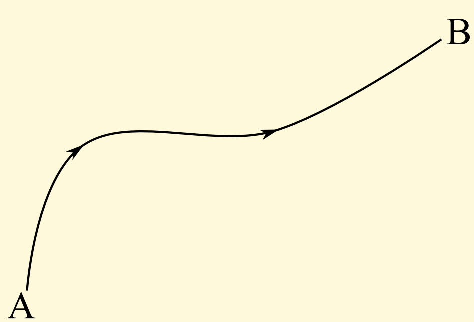
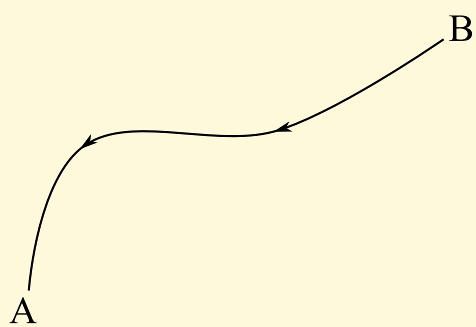
§11.3 向量场在曲线上的积分

11.3.1 曲线的定向

设空间中一条曲线 L 的两个端点为 A 和 B. 若为 L 指定一个运动的方向从 A 到 B, 或从 B 到 A, 则 L 就成为一条有向曲线. 方向指定为从 A 到 B 时, A 称为起点, B 称为终点. 反之, 方向指定为从 B 到 A 时, B 称为起点, A 称为终点. 确定了一个方向为正向时, 相反的方向就为负向.



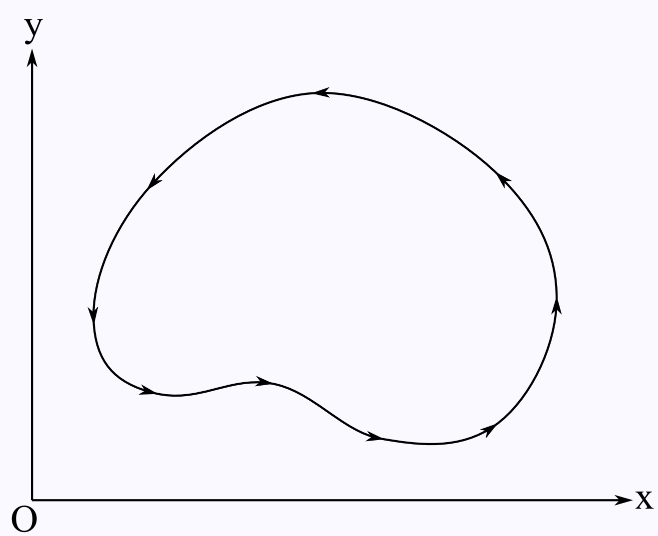


当 L 有一个参数表示时

$$L:\ \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

L 就有一个自然的方向, 即参数增加的方向. 此时 $\vec{r}(\alpha)$ 为起点, $\vec{r}(\beta)$ 为终点. 通常将此方向作为正向. 如果 $\vec{r}(t)$ 是连续可微的, 且 $\vec{r}\,'(t)$ 不为零向量, 那么称 $\vec{r}(t)$ 称为光滑曲线. 这时, $\vec{r}\,'(t)$ 就表示参数增加的方向.

如果 L 为 Oxy 平面上一条 Jordan 闭曲线, 则习惯上将逆时针方向作为正向. 此时, 在曲线上行走时, 曲线所围的区域在行人的左边.



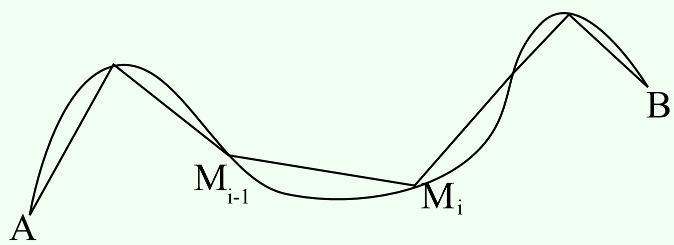
11.3.2 第二型曲线积分

设空间中有一个力场 $\vec{F}=(P,Q,R)$. 求质点在 $\vec{F}$ 的作用下沿曲线 L 从一端 A 运动到另一端 B 所做的功.

在 L 上从 A 到 B 顺序取分点 $A=M_0,M_1,\cdots,M_n=B$. 小曲线段 $L_i=\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 可近似看成有向直线段 $\overline{M_{i-1}M_i}=\Delta\vec{r}_i$. 在 L_i 上 $\vec{F}$ 近似于一个常力 $\vec{F}_i$. 这样, 质点在 L_i 运动所做的功近似等于

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\Delta\vec{r}_i.$$

当分割无限加密时, 若上述和式有极限, 则此极限就是质点沿曲线 L 从一端 A 运动到另一端 B 所做的功.



定义 1 设 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是空间区域 D 中一个向量场. L 是 D 中一条可求长的有向曲线, 起点为 A 终点为 B. 在 L 上依次从 A 到 B 的方向顺序取点 $\{\vec{r}_i:\ i=0,1,\cdots,n\}$ 使得 $\vec{r}_0=A$, $\vec{r}_n=B$. 令

$$\Delta\vec{r}_i=\vec{r}_i-\vec{r}_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n,\quad \|T\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta\vec{r}_i|.$$

如果对于弧段 $\overset{\frown}{r_{i-1}r_i}$ 上任取的点 ξ_i, 极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\xi_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$$

为一个固定的数, 则将此数记为

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{11.1}$$

称为向量场 $\vec{F}$ 沿有向曲线 L 的第二型曲线积分.

若 L 是有向封闭曲线, 则上面的积分也称为向量场 $\vec{F}$ 沿环路 L 的环量, 常用 $\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 表示.

设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 则 $d\vec{r}=(dx,dy,dz)$. 于是第二型曲线积分也常表示为

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \tag{11.2}$$

定理 1 设有区域 $D\subset\mathbb{R}^3$, 连续向量场 $\vec{F}:D\to\mathbb{R}^3$. 又设 $L\subset D$ 是一条有向光滑曲线, 其参数方程为 $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, 并且参数增加的方向为 L 的方向, 则有

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha^\beta(\vec{F}\circ\vec{r})\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt. \tag{11.3}$$

若 $\vec{F}=(P,Q,R)$, $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 则

$$\begin{aligned}\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha^\beta\Big(&P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\\&+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\Big)dt.\end{aligned} \tag{11.4}$$

证明 令 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec{F} = (P, Q, R)$. 设定义中的点列 $\{\vec{r}_i\}$ 为 $\{\vec{r}(t_i)\}$, $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$. 弧段 $\overset{\frown}{r_{i-1}r_i}$ 上的点 $\xi_i = \vec{r}(\tau_i)$, $t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i$. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i) \cdot \Delta\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^n \vec{F} \circ \vec{r}(\tau_i) \cdot (\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}))\\ &= \sum_{i=1}^n P(\vec{r}(\tau_i))(x(t_i) - x(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^n Q(\vec{r}(\tau_i))(y(t_i) - y(t_{i-1}))\\ &\quad + \sum_{i=1}^n R(\vec{r}(\tau_i))(z(t_i) - z(t_{i-1})).\end{aligned}$$

由微分中值定理, 存在 $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in [t_{i-1}, t_i]$ 使得

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\lambda_i)\Delta t_i,$$

$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\mu_i)\Delta t_i,$$

$$z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\nu_i)\Delta t_i,$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\xi_i) \cdot \Delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} P(\vec{r}(\tau_i)) x'(\lambda_i) \Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\vec{r}(\tau_i)) y'(\mu_i) \Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} R(\vec{r}(\tau_i)) z'(\nu_i) \Delta t_i.$$

令 $\max\limits_i |\Delta t_i| \to 0$, 就得到

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \Big(P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \Big) dt.$$

注意, 对于形如 $\int_L P dx$ 的积分, 应该理解成是一个特殊的向量场 $\vec{F} = (P, 0, 0)$ 的第二型曲线积分, 而不是通常的定积分, 这里的 dx 是有向弧长元在 x 轴的投影. 其他情形类似.

第二型曲线积分具有以下性质:

1) **线性**: 即若 $\vec{F} = c_1\vec{F}_1 + c_2\vec{F}_2$, 则有

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = c_1\int_L \vec{F}_1\cdot d\vec{r} + c_2\int_L \vec{F}_2\cdot d\vec{r}.$$

特别, 当 $\vec{F}_1 = P\vec{i},\ \vec{F}_2 = Q\vec{j},\ \vec{F}_3 = R\vec{k}$ 时, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. 因此

$$\begin{aligned}\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_L Pdx + Qdy + Rdz\\ &= \int_L Pdx + \int_L Qdy + \int_L Rdz\end{aligned}$$

2) **对积分曲线的可加性**: 若 L_{AC} 是由 L_{AB} 和 L_{BC} 连接而成的, 则有

$$\int_{L_{AC}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{L_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{L_{BC}} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

所以对于逐段光滑的曲线, 可以分段进行积分.

3) **积分的方向性**: $\int_{L_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{L_{BA}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

例 1 计算曲线积分 $\int_L xydx + x^2dy$, L 是三角形 OAB 的正向周界, 其中 $A = (1, 2)$, $B = (0, 2)$.

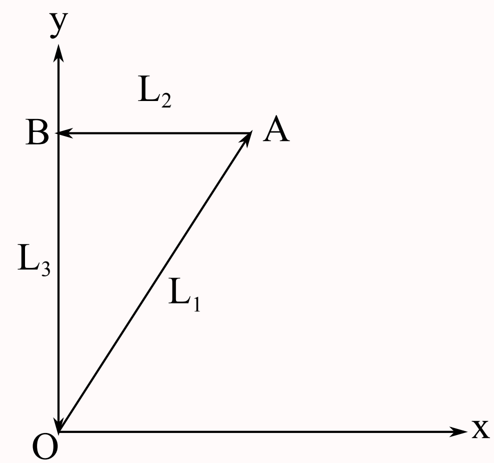
解

$$\int_L xydx + x^2dy = \left(\int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3}\right) xydx + x^2dy.$$

$$\int_{L_1} xydx + x^2dy = \int_0^1 (t \cdot 2t + 2t^2)dt = 4\int_0^1 t^2dt = \frac{4}{3}$$

$$\int_{L_2} xydx + x^2dy = -2\int_0^1 (1 - t)dt = -1,$$

$$\int_{L_3} xydx + x^2dy = 0$$



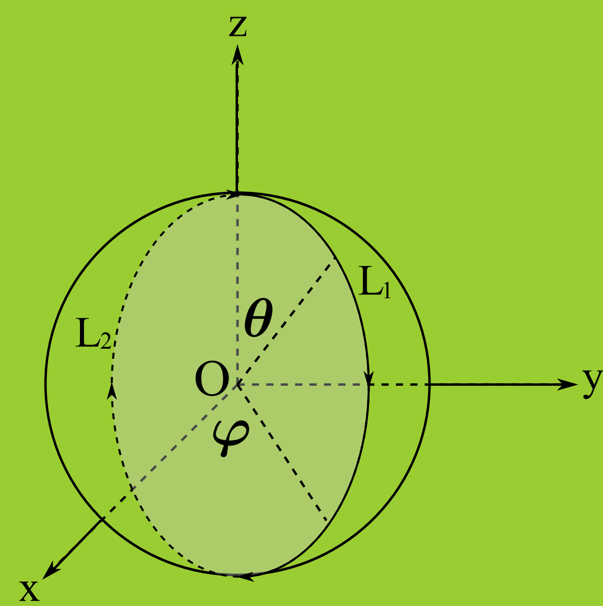
所以

$$\int_L xydx + x^2dy = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

例 2 计算曲线积分

$$I = \int_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $y = x\tan\alpha$ 的交线, 方向为从 x 轴正向看去为顺时针, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.



解 因为球面的参数方程是

$$x = R\sin\theta\cos\varphi,\ y = R\sin\theta\sin\varphi,\ z = R\cos\theta,\ \begin{array}{l} 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{array}$$

由于 L 在球面上又在平面 $y = x\tan\alpha$ 上, 所以

$$\tan\varphi = \tan\alpha,\ \text{即},\ \varphi = \alpha\ \text{或}\ \varphi = \pi + \alpha.$$

如图 L_1 和 L_2 的方程分别为

$$x = R\sin\theta\cos\alpha,\ y = R\sin\theta\sin\alpha,\ z = R\cos\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

$$x = -R\sin\theta\cos\alpha,\ y = -R\sin\theta\sin\alpha,\ z = -R\cos\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

于是 L 的方程可表示为

$$x = R\sin\theta\cos\alpha,\ y = R\sin\theta\sin\alpha,\ z = R\cos\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

于是有

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^{2\pi} \Big[& (R\sin\theta\sin\alpha - R\cos\theta)(R\cos\theta\cos\alpha) \\
& + (R\cos\theta - R\sin\theta\cos\alpha)(R\cos\theta\sin\alpha) \\
& + (R\sin\theta\cos\alpha - R\sin\theta\sin\alpha)(-R\sin\theta)\Big]\, d\theta \\
= R^2 & \int_0^{2\pi} (\sin\alpha - \cos\alpha)\, d\theta \\
= 2\pi & (\sin\alpha - \cos\alpha) R^2.
\end{aligned}
$$

例 3 设在力场 $\vec{F} = (y, -x, z)$ 的作用下，质点从 $A(R, 0, 0)$ 沿圆柱螺旋线 $L: x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = kt\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 运动到 $B(R, 0, 2\pi k)$. 求力场 $\vec{F}$ 对质点所做的功.

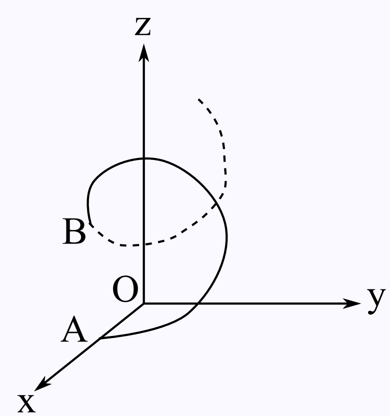
解 A 对应参数 $t = 0$, B 对应参数 $t = 2\pi$.

$$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, kt), \quad \vec{r}'(t) = (-R\sin t, R\cos t, k).$$

$$\begin{aligned}\text{功} &= \int_0^{2\pi} (R\sin t, -R\cos t, kt) \cdot (-R\sin t, R\cos t, k)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (k^2 t - R^2)dt = \frac{1}{2}k^2(2\pi)^2 - 2\pi R^2 \\ &= 2\pi(\pi k^2 - R^2).\end{aligned}$$

沿直线从 A 运动到 B 所做的功为

$$\int_{\overrightarrow{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi k} z\, dz = 2\pi^2 k^2.$$

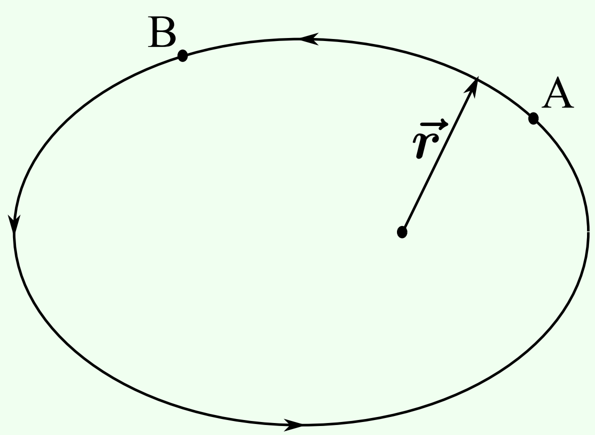


例 4 当地球在其轨道上从 A 运动到 B 时, 求太阳对地球的引力所做的功.

解 根据万有引力定律, 太阳对地球的引力为

$$\vec{F} = -k\frac{mM}{r^3}\vec{r},$$

其中 m 是地球的质量, M 是太阳的质量, k 是引力常数, $\vec{r}$ 是从太阳指向地球的向量, $r = |\vec{r}|$.



设轨道 L_{AB} 的参数方程为 $\vec{r}=\vec{r}(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \vec{r}(\alpha)=A, \vec{r}(\beta)=B$.

$$
\begin{aligned}
\text{功} &= \int_{L_{AB}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -kmM\int_{L_{AB}} \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{r} \\
&= -kmM\int_\alpha^\beta \frac{\vec{r}(t)}{r^3}\cdot \vec{r}'(t)\,dt \\
&= -kmM\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r})'}{r^3}\,dt \\
&= -kmM\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\frac{(r^2(t))'}{r^3}\,dt \\
&= -kmM\int_\alpha^\beta \frac{r'(t)}{r^2}\,dt \\
&= kmM\int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{r(t)}\right)'dt \\
&= kmM\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right).
\end{aligned}
$$