13.4.3 几个重要的积分

1° Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

由 Dirichlet 判别法可知这个积分收敛, 但不绝对收敛. 引进收敛因子 e^{-ux}, 并考虑含参变量的积分

$$I(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx.$$

由于当 $u \geqslant 0$时, 此积分是一致收敛的. 而被积函数在区域 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续, 因而 $I(u)$ 就在 $[0, +\infty)$ 上连续. 特别在点 $u = 0$ 连续, 可推得

$$\lim_{u \to 0^+} I(u) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

另一方面, 将 $I(u)$ 微商又得

$$I'(u) = -\int_0^{+\infty} e^{-ux} \sin x dx,$$

其中在积分号下对 u 微商的合理性是因为 $u \geqslant u_0 > 0$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-ux} \sin x dx$$

是一致收敛的. 由分部积分法

$$\begin{aligned} I'(u) &= e^{-ux} \cos x \Big|_0^{+\infty} + u \int_0^{+\infty} e^{-ux} \cos x \, dx \\ &= -1 + u \left(e^{-ux} \sin x \Big|_0^{+\infty} + u \int_0^{+\infty} e^{-ux} \sin x \, dx \right) \\ &= -1 - u^2 I'(u), \end{aligned}$$

从而得到

$$I'(u) = -\frac{1}{1+u^2},$$

两边积分求得

$$I(u) = -\arctan u + c,$$

当 $u > 0$ 时, 我们有

$$|I(u)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-ux} dx = \frac{1}{u},$$

可知当 $u \to +\infty$ 时 $I(u) \to 0$, 由此定出常数 $c = \frac{\pi}{2}$. 故有

$$I(u) = \frac{\pi}{2} - \arctan u, \qquad (u > 0).$$

令 u 趋于零即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2}.$$

注　比较级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

2° Laplace 积分

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx\quad(\alpha>0,\ \beta\geqslant 0),$$
$$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx\quad(\alpha>0,\ \beta>0).$$

因为对任意的 $\beta\geqslant 0$ 和 $\alpha>0$, 有

$$\frac{|\cos\beta x|}{\alpha^2+x^2}\leqslant\frac{1}{\alpha^2+x^2},$$

故 $I(\beta)$ 在 $\beta\in[0,+\infty)$ 上一致收敛.

另外, 由 Dirichlet 判别法知, $J(\beta)$ 对任意的 $\beta\geqslant\beta_0>0$ 一致收敛. 显然, $I(\beta)$ 与 $J(\beta)$ 都在 $\beta\geqslant\beta_0>0$ 上一致收敛. 由积分号下求导的可微性定理知, $I(\beta)$ 对 β 的微商可在积分号下进行, 并有

$$I'(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\right)dx=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=-J(\beta).$$

当 $\beta > 0$ 时, 有

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx,$$

于是有

$$\begin{aligned} I'(\beta) + \frac{\pi}{2} &= -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx \\ &= \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)} dx, \end{aligned}$$

上式又可对 β 在积分号下求微商, 于是又有

$$I''(\beta) = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \alpha^2 I(\beta),$$

这是一个二阶常系数线性微分方程, 求得通解为

$$I(\beta) = c_1 e^{\alpha\beta} + c_2 e^{-\alpha\beta},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 由于对 $\beta > 0$ 有

$$|I(\beta)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha},$$

可知 $I(\beta)$ 有界, 又因为 $\alpha > 0$, 所以 c_1 必须为零, 故有

$$I(\beta) = c_2 e^{-\alpha\beta}.$$

注意, 到此为止, 运算都是在 $\beta > 0$ 的假设下进行的.

下面来确定 c_2 的值, 由于积分 $I(\beta)$ 在 $\beta \in [0, +\infty)$ 上一致收敛, 故 $I(\beta)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 特别在 $\beta = 0$ 处右连续, 于是有

$$c_2 = \lim_{\beta \to 0^+} I(\beta) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

故得到

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta} \qquad (\alpha > 0, \beta \geqslant 0).$$

最后, 对 $\alpha > 0, \beta > 0$, 有

$$J(\beta) = -I'(\beta) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta},$$

于是得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta} \qquad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

例 1 求积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{1+x^2}\, dx$.

解 因为 $\sin^2 \alpha x = \frac{1-\cos 2\alpha x}{2}$, 所以

$$
\begin{aligned}
I(\alpha) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2\alpha x}{1+x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\alpha x}{1+x^2}\, dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-2\alpha} \\
&= \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

3° Fresnel 积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

作积分变换可得

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt,$$

该积分是条件收敛的. 当 $t > 0$ 时, 由

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du,$$

可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-vt} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-vt}\sin t dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du,$$

交换积分次序就得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-vt} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v)t}\sin t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(u^2+v)^2}.\end{aligned}$$

等式

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-vt} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(u^2+v)^2}.$$

右端的积分关于 v 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 而左端的积分关于 v 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 因此当 $v \to 0^+$ 时, 可以在等式两端的积分号下取极限值, 即有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

类似可得

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

还需验证上面交换几分次序的合理性.

(1) 首先对于固定的 $v>0$, $\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+v)}|\sin t|dt$ 存在, 因为

$$\int_b^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+v)}|\sin t|dt \leqslant \int_b^{+\infty}\left|\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+v)}dt\right|du$$
$$=\int_b^{+\infty}\frac{du}{u^2+v}<\frac{1}{b}.$$

(2) 其次 $\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+v)}\sin t dt$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 因为有

$$|e^{-t(u^2+v)}\sin t| \leqslant e^{-tv}.$$

(3) 最后证明 $\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+v)}\sin t du$ 关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 这是因为

$$\left|e^{-t(u^2+v)}\sin t\right| \leqslant e^{-t(u^2+v)}t \leqslant \frac{e^{-1}}{u^2+v}.$$

返回 全屏 关闭 退出

例 2 设 $x \geqslant 0$. 求证: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt.$

证明 因为

$$\int_0^{+\infty} e^{-ut}\sin u\,du = \frac{1}{1+t^2},$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-ut}\sin u\,du\right) e^{-tx}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(u+x)t}\sin u\,du\right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(u+x)t}\sin u\,dt\right) du \qquad (\text{交换积分次序}) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}\,du.
\end{aligned}$$

例 3 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx \ (0 < p < 1)$.

解 由于 0 是一个瑕点，将积分分成两个部分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int_0^{1} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$$
$$= I_1 + I_2.$$

当 $0 < x < 1$ 时，可利用展开式

$$\frac{x^{p-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+p-1}.$$

该级数在 $(0, 1)$ 的任何闭子区间 J 上一致收敛. 设 S_n 是其前 n 项部分和，则

$$0 \leqslant S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{k+p-1} = \frac{x^{p-1}(1-(-1)^n x^n)}{1+x}$$
$$\leqslant 2\frac{x^{p-1}}{1+x} \leqslant 2x^{p-1}.$$

因为 $\int_0^1 x^{p-1}\,dx$ 收敛, 所以 $\int_0^1 S_n(x)\,dx$ 关于 n 一致收敛. 于是有

$$I_1=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^n x^{n+p-1}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}.$$

对于积分 I_2, 作变换 $x=1/t$, 得

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^1\frac{t^{-p}}{1+t}\,dt=\int_0^1\frac{t^{(1-p)-1}}{1+t}\,dt\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p-n}.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p-n}\\&=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2p(-1)^n}{p^2-n^2}.\end{aligned}$$

在 Fourier 级数的章节中已经证明了

$$\frac{\pi}{\sin p\pi} = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p(-1)^n}{p^2 - n^2}.$$

因此, 最后得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (0 < p < 1).$$

例 4 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^p}\,dx \quad (p > 1).$

解 作变换 $t = x^p$, 则 $x = t^{1/p}$, $dx = \frac{1}{p} t^{(1/p)-1} dt$, 因而

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^p}\,dx = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{p}-1}}{1+t}\,dx = \frac{1}{p} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{p}}.$$