

微分几何第七次习题课

黄天一

USTC

更新: 2024 年 1 月 20 日

目录

1 作业解答	1
2 补充习题	8

1 作业解答

作业 1 设曲面的第一基本形式为 $I = du \otimes du + G(u, v) dv \otimes dv$, 且 $G(0, v) = 1, G_u(0, v) = 0$. 证明: $G(u, v) = 1 - u^2 K(0, v) + o(u^2)$.

证明. 首先计算高斯曲率的表达式. 此时

$$\omega^1 = du, \omega^2 = \sqrt{G} dv.$$

从而

$$d\omega^1 = 0, d\omega^2 = (\sqrt{G})_u du \wedge dv = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}} \omega^1 \wedge \omega^2.$$

设 $\omega_1^2 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2$, 则 $d\omega^1 = \omega_1^2 \wedge \omega^2 = \alpha\omega^1 \wedge \omega^2, d\omega^2 = \omega_2^1 \wedge \omega^1 = \beta\omega^1 \wedge \omega^2$, 所以

$$\omega_1^2 = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}} \omega^2 = (\sqrt{G})_u dv.$$

根据 Gauss 方程可得

$$K = -\frac{d\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

现在我们来考虑原题证明. 考虑 Maclaurin 展开可得

$$G(u, v) = G(0, v) + G_u(0, v)u + \frac{G_{uu}(0, v)}{2!}u^2 + o(u^2) = 1 + \frac{G_{uu}(0, v)}{2}u^2 + o(u^2).$$

而根据高斯曲率的表达式可得

$$G_u = \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G})^2 = 2\sqrt{G}(\sqrt{G})_u.$$

$$G_{uu} = \frac{\partial}{\partial u} G_u = 2(\sqrt{G})_u^2 + 2\sqrt{G}(\sqrt{G})_{uu} = 2(\sqrt{G})_u^2 - 2KG.$$

将 $G(0, u) = 1, G_u(0, v) = 0$ 代入可得 $(\sqrt{G})_u(0, v) = 0$, 从而 $G_{uu}(0, v) = -2K(0, v)$. 代回 MacLaurin 展开式可得

$$G(u, v) = 1 - u^2 K(0, v) + o(u^2).$$

作业 2 在测地平行坐标系下计算常高斯曲率曲面的第一基本形式.

证明. 回忆测地平行坐标系下曲面的第一基本形式为

$$I = du \otimes du + G(u, v) dv \otimes dv,$$

其中 $G(0, v) = 1, G_u(0, v) = 0$. 由此可得 $(\sqrt{G})_u(0, v) = 0$. 在作业 1 里, 我们算出了

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

下面考虑 K 为常数的情况. 此时考虑常微分方程的初值问题

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0, \sqrt{G}(0, v) = 1, (\sqrt{G})_u(0, v) = 0.$$

1. 如果 $K > 0$, 那么通解为 $\sqrt{G} = A \cos(\sqrt{K}u) + B \sin(\sqrt{K}u)$. 代入初值可得 $\sqrt{G} = \cos(\sqrt{K}u)$. 所以第一基本形式为

$$I = du \otimes du + \cos^2(\sqrt{K}u) dv \otimes dv.$$

2. 如果 $K = 0$, 那么通解为 $\sqrt{G} = A + Bu$, 代入初值可得 $\sqrt{G} = 1$. 所以第一基本形式为

$$I = du \otimes du + dv \otimes dv.$$

3. 如果 $K < 0$, 那么通解为 $\sqrt{G} = A \cosh(\sqrt{-K}u) + B \sinh(\sqrt{-K}u)$, 代入初值可得 $\sqrt{G} = \cosh(\sqrt{-K}u)$. 所以第一基本形式为

$$I = du \otimes du + \cosh^2(\sqrt{-K}u) dv \otimes dv.$$

作业 3 设曲面 S 上以点 P 为中心, r 为半径的测地圆周长为 $L(r)$, 所围区域的面积为 $A(r)$. 证明: P 点处的高斯曲率满足

$$K(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4}.$$

证明. 在测地极坐标系下, 曲面片的第一基本形式为

$$I = d\rho \otimes d\rho + G(\rho, \theta) d\theta \otimes d\theta,$$

其中 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$ 且 $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$. 类似作业 1 可得 $(\sqrt{G})_{\rho\rho} = -K\sqrt{G}$, 所以 $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_{\rho\rho} = 0$, 并且

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho} = -K_\rho\sqrt{G} - K(\sqrt{G})_\rho,$$

由此可得 $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{G})_{\rho\rho\rho} = -K(P)$. 因此 \sqrt{G} 的三阶 Maclaurin 展开式为

$$\sqrt{G}(\rho, \theta) = \rho - \frac{K(P)}{6}\rho^3 + o(\rho^3).$$

当然, 我们也可以展开到更高阶, 但对于本题而言三阶就足够了. 在测地极坐标系下, 测地圆周即为 θ -参数曲线, 所以

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \theta)} d\theta = 2\pi \left(r - \frac{K(P)}{6}r^3 \right) + o(r^3).$$

整理上式并令 $r \rightarrow 0$ 即可得

$$K(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3}.$$

下面我们记半径为 r 的测地圆盘为 $B_r(P)$. 由于曲面上的面积元为 $dA = \sqrt{G(\rho, \theta)} d\rho \wedge d\theta$, 所以

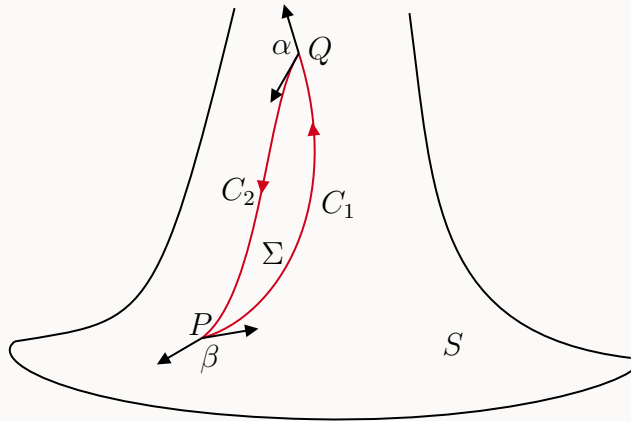
$$\begin{aligned} A(r) &= \iint_{B_r(P)} dA = \iint_{(0,r) \times (0,2\pi)} \sqrt{G(\rho, \theta)} d\rho d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^r \left(\rho - \frac{K(P)}{6}\rho^3 + o(\rho^3) \right) d\rho = 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{K(P)}{24}r^4 \right) + o(r^4). \end{aligned}$$

整理上式并令 $r \rightarrow 0$ 可得

$$K(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4}.$$

作业 4 设 $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为常负高斯曲率曲面片, 并且是单连通的. 证明: 从 S 内一点出发的两条测地线不会相交于 S 内另外一点.

注 这里的叙述和书上有一点出入, 因为按照书上的题干, 可能会出现测地线跑到单连通区域 D 外面的情形, 这时 Gauss-Bonnet 公式就失效了. 所以干脆扩大所讨论的区域到整个曲面片上.



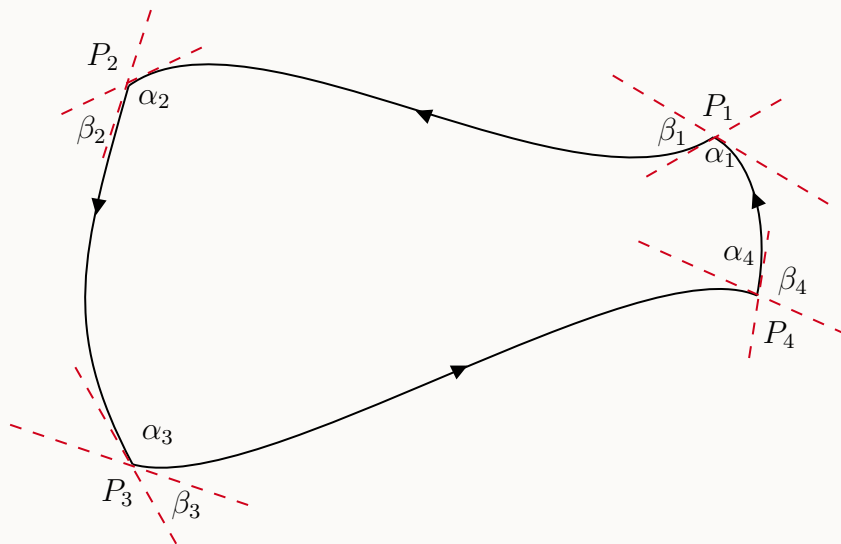
证明. 假设存在从 $P \in S$ 出发的两条渐近线 C_1 和 C_2 , 相交于另一点 $Q \in S$, 如上图所示. 设两条测地线所围的曲面上的区域为 Σ , P, Q 处两曲线的外角分别为 β, α . 由于整个曲面片都是单连通的, 由 Gauss-Bonnet 公式可得

$$\iint_{\Sigma} K \, dA = 2\pi - \alpha - \beta.$$

注意到 $\alpha, \beta \in [0, \pi]$, 所以 $\iint_{\Sigma} K \, dA \geq 0$, 但这与 $K < 0$ 矛盾!

作业 5 设 A 为单连通曲面片 S 上的一个四边形, P_i 是顶点, α_i 是对应的内角 ($i = 1, 2, 3, 4$). 证明:

$$\int_A K \, d\sigma + \int_{\partial A} k_g \, ds = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi.$$



证明. 如图所示, 每个外角 β_i 和内角 α_i 满足 $\alpha_i + \beta_i = \pi, i = 1, 2, 3, 4$. 根据 Gauss-Bonnet 公式可得

$$\int_A K \, d\sigma + \int_{\partial A} k_g \, ds = 2\pi - \sum_{i=1}^4 \beta_i = \sum_{i=1}^4 \alpha_i - 2\pi.$$

作业 6 求下述两个曲面之间的一个等距变换.

1. $D = \{(u, v) : v > 0\}, ds^2 = \frac{a^2}{v^2}(du \otimes du + dv \otimes dv).$

2. $\Omega = \mathbb{R}^2, ds^2 = dx \otimes dx + e^{\frac{2x}{a}} dy \otimes dy.$

证明. 待定一一变换 $D \rightarrow \Omega : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$, 其 Jacobi 矩阵记为 J . 那么该变换等距当且仅当成立

$$\begin{pmatrix} \frac{a^2}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{v^2} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2x}{a}} \end{pmatrix} J^T = \begin{pmatrix} (\frac{\partial x}{\partial u})^2 + e^{\frac{2x}{a}} (\frac{\partial y}{\partial u})^2 & \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + e^{\frac{2x}{a}} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + e^{\frac{2x}{a}} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} & (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + e^{\frac{2x}{a}} (\frac{\partial y}{\partial v})^2 \end{pmatrix}.$$

我们可以考虑特殊的变换, 把上述偏微分方程组化为常微分方程组. 考虑变换 $x = x(v), y = y(u)$, 则有

$$e^{\frac{x}{a}} \frac{dy}{du} = \frac{a}{v}, \quad \frac{dx}{dv} = -\frac{a}{v}.$$

从第二个方程可以解出 $x = -a \log v$, 代入第一个方程可得 $\frac{dy}{du} = a$, 所以满足要求的一个等距变换是 $x = -a \log v, y = au$, 这当然是一一的.

作业 7 设 ds^2 是参数区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的一个黎曼度量, $C : (u(t), v(t))$ 是 D 上的一条正则参数曲线, $\mathbf{v} = u'(t) \frac{\partial}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial}{\partial v}$ 是 C 的切向量场. 证明: C 是测地线当且仅当存在函数 $\lambda(t)$ 使得沿 C 成立 $\frac{D\mathbf{v}}{dt} + \lambda\mathbf{v} = 0$.

证明. 由 C 是正则曲线可得切向量场 \mathbf{v} 沿 C 处处非零. 设 s 为弧长参数, $\mathbf{w} = \dot{u}(s) \frac{\partial}{\partial u} + \dot{v}(s) \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, 那么 C 是测地线当且仅当 $\frac{D\mathbf{w}}{ds} = 0$.

如果 C 是测地线, 那么 $0 = \frac{D\mathbf{w}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{D\mathbf{w}}{dt} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|} \right) \mathbf{v} + \frac{dt}{ds} \frac{1}{|\mathbf{v}|} \frac{D\mathbf{v}}{dt}$. 此时取 $\lambda(t) = |\mathbf{v}| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|} \right)$ 即可.

反之, 如果 $\frac{D\mathbf{v}}{dt} + \lambda\mathbf{v} = 0$ 对某个函数 $\lambda(t)$ 成立, 那么

$$\frac{D\mathbf{w}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|} \right) \mathbf{v} + \frac{dt}{ds} \frac{1}{|\mathbf{v}|} \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{dt}{ds} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|} \right) - \frac{\lambda}{|\mathbf{v}|} \right) \mathbf{v}.$$

这说明 $\frac{D\mathbf{w}}{ds}$ 与 \mathbf{v} 共线. 另一方面, 由 $|\mathbf{w}| = 1$ 可得 $0 = \frac{d}{ds} |\mathbf{w}|^2 = 2 \langle \frac{D\mathbf{w}}{ds}, \mathbf{w} \rangle$, 所以 $\frac{D\mathbf{w}}{ds}$ 与 \mathbf{w} 正交, 进而和 \mathbf{v} 正交. 结合 \mathbf{v} 非零即可得 $\frac{D\mathbf{w}}{ds} = 0$.

作业 8 给定区域 D 上的黎曼度量, 求测地线.

1. $D = \{(u, v) : v > 0\}, ds^2 = v(du \otimes du + dv \otimes dv).$

2. $D = \mathbb{R}^2, ds^2 = \frac{du \otimes du + dv \otimes dv}{(1+u^2+v^2)^2}.$

证明. 我们来总结一下测地线的求法, 有两种基本方式.

(a) 根据活动标架下的运动方程, 弧长参数曲线 $r(s) = r(u^1(s), u^2(s))$ 是曲面 S 上的测地线, 当且仅当

$$\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

所以可以求解 Christoffel 符号 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, 然后代入求解常微分方程即可.

(b) 设 (u, v) 为曲面的正交参数, 考虑自然的正交标架 $e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}}$. 给定任一弧长参数曲线 $C: r(s) = r(u(s), v(s))$, 由定义可得 C 是测地线当且仅当 $\mathbf{v} = \dot{r}(s) = \dot{u}r_u + \dot{v}r_v = \sqrt{E}\dot{u}e_1 + \sqrt{G}\dot{v}e_2$ 沿 C 的协变导数 $\frac{D\mathbf{v}}{ds}$ 为零. 计算可得

$$\begin{aligned} 0 = \frac{D\mathbf{v}}{ds} &= \frac{d(\sqrt{E}\dot{u})}{ds}e_1 + \sqrt{E}\dot{u}\frac{De_1}{ds} + \frac{d(\sqrt{G}\dot{v})}{ds}e_2 + \sqrt{G}\dot{v}\frac{De_2}{ds} \\ &= \left(\frac{d(\sqrt{E}\dot{u})}{ds} + \sqrt{G}\dot{v}\frac{\omega_2^1}{ds} \right) e_1 + \left(\frac{d(\sqrt{G}\dot{v})}{ds} + \sqrt{E}\dot{u}\frac{\omega_1^2}{ds} \right) e_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

这样, 先算出曲面的联络形式 ω_1^2 , 就可以算出测地线所满足的常微分方程.

现在我们计算这两个曲面的测地线.

1. 对于 (1) 我们用两种方法分别计算.

(a) 此时 $g_{11} = g_{22} = v, g_{12} = 0$. 对应 $g^{11} = g^{22} = \frac{1}{v}, g^{12} = 0$. 所以

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u} = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = \frac{1}{2v}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial u} = 0.$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = -\frac{1}{2v}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial u} = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial v} = \frac{1}{2v}.$$

所以 S 上的测地线满足方程

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{1}{2v} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2v} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0.$$

这个方程组可以整理为

$$\frac{du}{ds}v = A, \quad \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{1}{2v} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 - \frac{A^2}{2v^3} = 0.$$

其中 A 为常数. 为了求解 v 满足的方程, 作变换 $v = \omega^{\frac{2}{3}}$, 整理可得

$$\omega^{\frac{5}{3}} \frac{d^2 \omega}{ds^2} = \frac{3A^2}{4}.$$

再作变换 $y = \frac{d\omega}{ds}$, 整理可得

$$y \frac{dy}{d\omega} = \frac{3A^2}{4\omega^{\frac{5}{3}}}.$$

求解可得

$$\frac{d\omega}{ds} = y = \pm \sqrt{\frac{9A^2}{4}\omega^{-\frac{2}{3}} + B_0}.$$

将 $\omega = v^{\frac{3}{2}}$ 代入可得

$$\frac{dv}{ds} = \pm \sqrt{\frac{A^2}{v^2} + \frac{B}{v}}, \quad B = \frac{4}{9}B_0.$$

$B = 0$ 时求出特解 $v = \sqrt{A^2s + C}$, $u = \int \frac{A ds}{\sqrt{A^2s + C}}$ (分情况讨论积出来). 如果 $B \neq 0$, 整理即可得

$$s = \pm \int \frac{v dv}{\sqrt{A^2 + Bv}} = \frac{2}{B^2} \left(\frac{(A^2 + Bv)^{\frac{3}{2}}}{3} - A^2 \sqrt{A^2 + Bv} \right) + C.$$

根据上述通积分确定 v , 然后由 $\frac{du}{ds} = \frac{A}{v}$ 积分得到 u . 这就是所有的测地线方程.

(b) 首先 $\omega^1 = \sqrt{v} du$, $\omega^2 = \sqrt{v} dv$. 所以

$$d\omega^1 = \frac{1}{2\sqrt{v}} dv \wedge du = -\frac{1}{2\sqrt{v}} \omega^1 \wedge \omega^2, \quad d\omega^2 = 0.$$

由此可得

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{2\sqrt{v}} \omega^1 = -\frac{1}{2v} du.$$

代入 (1.1) 可得测地线方程为

$$\frac{d(\dot{u}\sqrt{v})}{ds} + \frac{d(\sqrt{v})}{ds} \frac{du}{ds} = \frac{d(\sqrt{v}\dot{v})}{ds} - \frac{d(\sqrt{v})}{ds} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 = 0$$

整理可得 (a), (b) 得到的方程是相同的.

2. 先用方法 (b) 计算测地线方程. 此时 $E = G = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}$, 并且

$$\omega^1 = \frac{du}{1+u^2+v^2}, \quad \omega^2 = \frac{dv}{1+u^2+v^2}.$$

计算可得

$$d\omega^1 = \frac{2v}{(1+u^2+v^2)^2} du \wedge dv = 2v\omega^1 \wedge \omega^2.$$

$$d\omega^2 = -\frac{2u}{1+u^2+v^2} du \wedge dv = -2u\omega^1 \wedge \omega^2.$$

所以联络形式为

$$\omega_1^2 = 2v\omega^1 - 2u\omega^2 = \frac{2v du - 2u dv}{1+u^2+v^2}.$$

代入 (1.1) 可得测地线方程为

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{u}}{1+u^2+v^2} \right) - \frac{2\dot{v}(v\dot{u} - u\dot{v})}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{v}}{1+u^2+v^2} \right) + \frac{2\dot{u}(v\dot{u} - u\dot{v})}{(1+u^2+v^2)^2} = 0.$$

可以进一步整理为

$$\begin{cases} (1+u^2+v^2)\ddot{u} + 2u(\dot{v}^2 - \dot{u}^2) - 2v\dot{u}\dot{v} = 0, \\ (1+u^2+v^2)\ddot{v} + 2v(\dot{u}^2 - \dot{v}^2) - 2u\dot{u}\dot{v} = 0. \end{cases}$$

但这个方程组的解析解几乎不可能直接求得, 为了求解这个曲面的测地线, 我们需要换个路子 (**以下不要求掌握**).

可以借助复分析的工具给出更好的解答. 我们令 $z = u + iv$. 任取复方阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SU}(2)$, 即行列式为 1 的二阶酉方阵. 考虑分式线性变换

$$S \rightarrow S, w \mapsto \frac{aw + b}{cw + d}.$$

那么计算可得

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{dz \otimes d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} = \frac{dw \otimes d\bar{w}}{|aw + b|^2 + |cw + d|^2} \\ &= \frac{dw \otimes d\bar{w}}{|b|^2 + |d|^2 + w(\bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d}) + \bar{w}(\bar{a}b + \bar{c}d) + (|a|^2 + |c|^2)|w|^2} \end{aligned}$$

这里第二个等号用了 $ad - bc = 1$. 根据酉方阵性质可得 $\bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} = \bar{a}b + \bar{c}d = 0$ 且 $|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1$. 所以有 $ds^2 = \frac{dw \otimes d\bar{w}}{1 + |w|^2}$, 这是球极投影下球面 (去掉北极点) 的黎曼度量. 所以题设曲面和球面是等距同构的. 而球面的测地线即为大圆, 对应参数化为 $w = e^{i\mu t}$, μ 为复常数. 所以

$$z = \frac{ae^{i\mu t} + b}{ce^{i\mu t} + d}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SU}(2)$$

就给出了题设曲面上所有的测地线.

2 补充习题

习题 1 考察旋转曲面 $S : r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, 其中 $f > 0, f'^2 + g'^2 > 0$.

1. 求出沿 S 的纬线圈平行的切向量场.
2. 设旋转面的非零切向量沿纬线圈平行移动时, 向量在开始 ($v = 0$) 和结束 ($v = 2\pi$) 位置的夹角为 θ , 计算 $\cos \theta$ 的值.

证明. (1) 由于 $r_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), r_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$, 所以第一基本形式为

$$I = (f'(u)^2 + g'(u)^2) du \otimes du + f(u)^2 dv \otimes dv.$$

曲面上的正交标架为 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 其中 $e_1 = \frac{(f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u))}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}, e_2 = (-\sin v, \cos v, 0)$. 计算可得

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2} du, \omega^2 = f(u) dv. \\ d\omega^1 &= 0, d\omega^2 = f'(u) du \wedge dv = \frac{f'(u)}{f(u)\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}} \omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

所以曲面的联络形式为

$$\omega_1^2 = \frac{f'(u)}{f(u)\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}\omega^2 = \frac{f'(u)}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}dv.$$

在给定的纬线圈 $u = u_0$ 上, 设 $\mathbf{w} = \alpha(v)e_1 + \beta(v)e_2$ 沿纬线圈平行, 我们记 $\omega = \frac{f'(u_0)}{\sqrt{f'(u_0)^2 + g'(u_0)^2}}$. 那么

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D\mathbf{w}}{dv} = \left(\alpha'(v) + \beta(v)\frac{\omega_1^2}{dv} \right) e_1 + \left(\beta'(v) + \alpha(v)\frac{\omega_1^2}{dv} \right) e_2 \\ &= (\alpha'(v) - \beta(v)\omega)e_1 + (\beta'(v) + \alpha(v)\omega)e_2. \end{aligned}$$

由此可得

$$\alpha'(v) - \beta(v)\omega = 0, \quad \beta'(v) + \alpha(v)\omega = 0.$$

求解可得

$$\alpha(v) = A \cos \omega v + B \sin \omega v, \quad \beta(v) = B \cos \omega v - A \sin \omega v.$$

代回 $\mathbf{w} = \alpha e_1 + \beta e_2$ 即得.

(2) 本小问我们令 e_1, e_2 就表示纬线圈 $u = u_0$ 上起始点处的正交标架. 那么

$$\mathbf{w}(0) = A e_1 + B e_2, \quad \mathbf{w}(2\pi) = (A \cos 2\pi\omega + B \sin 2\pi\omega)e_1 + (B \cos 2\pi\omega - A \sin 2\pi\omega)e_2.$$

由此可得

$$|\mathbf{w}(0)| = |\mathbf{w}(2\pi)| = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \langle \mathbf{w}(0), \mathbf{w}(2\pi) \rangle = (A^2 + B^2) \cos 2\pi\omega.$$

因此

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{w}(0), \mathbf{w}(2\pi) \rangle}{|\mathbf{w}(0)||\mathbf{w}(2\pi)|} = \cos \left(2\pi \frac{f'(u_0)}{\sqrt{f'(u_0)^2 + g'(u_0)^2}} \right).$$

这是与初始切向量本身无关的量, 只与纬线圈有关. 并且 $\cos \theta$ 不总为 1.

习题 2 1. $S: r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ 为一旋转面, 其中 $f(u) > 0$. 若过 S 上任意一点, 存在 S 上的测地线与经线 (即 u -参数曲线) 交成定角 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 S 是圆柱面的一部分.

2. 设曲面的第一基本形式为 $I = \frac{a^2}{v^2}(du \otimes du + dv \otimes dv)$, $v > 0$. 计算 $u = kv + b$ 对应曲线的测地曲率.

证明. (1) 首先计算可得 $E = f'(u)^2 + g'(u)^2$, $G = f(u)^2$. 回忆测地曲率的 Liouville 公式:

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} + \frac{\omega_1^2}{ds} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{\cos \theta}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{E} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{G},$$

其中 θ 是曲线与 u -参数曲线的夹角. 任给一点 $P \in S$, 设 C 是过 P 点且与经线成定角的测地线. 将 $k_g = 0$, θ 为常数代入, 并注意到 E 只与 u 有关, 可得 $\frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{G} = 0$, 所以沿

测地线总有 G 为常数, 亦即沿测地线总有 f 为常数. 注意到夹角 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以这条测地线当然不是纬线, 因此我们得到了: 任给参数区域 D 内一点 (u_0, v_0) , 存在 $\delta > 0$ 使得 f 在 $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$ 内恒为常数, 从而 f 在 u 的取值范围内都为常数¹. 因此曲面片 S 是圆柱面 $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2\}$ 的一部分.

(2) 设 C 为参数区域内 $u = kv + b$ 对应曲面上的曲线, 一个参数化为 $r(t) = r(kt + b, t)$. 那么 C 的切向量为 $r'(t) = kr_u + r_v$, 与 u -参数曲线夹成定角 $\theta = \arctan \frac{1}{k}$. 所以由 Liouville 公式可得

$$k_g = -\frac{\cos \theta}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{E} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{G} = \frac{1}{a} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

习题 3 (21 韦勇班) 设 S 为单位球面, $p \in S$ 为北极点.

1. 对每个固定的 $r_0 \in (0, \pi)$, 求测地圆 $S_{r_0}(p)$ 的测地曲率.
2. 取 p 处的切向量 $v \in T_p S$, 长度为 $\frac{2\pi}{3}$, 且方向与东经 107° 经线在 p 处的切向量相同. 求 $\exp_p(v)$ 的经纬度.

证明. (1) 考虑测地极坐标系, 第一基本形式为 $I = d\rho \otimes d\rho + G(\rho, \theta) d\theta \otimes d\theta$. 由于单位球面的高斯曲率恒为 1, 所以得到初值问题

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} = -\sqrt{G}, \quad \sqrt{G}(0, \theta) = 0, \quad (\sqrt{G})_{\rho}(0, \theta) = 1.$$

计算可得 $G(\rho, \theta) = \sin^2 \rho$. 由 Liouville 公式可得

$$k_g = \frac{\partial}{\partial \rho} \log \sqrt{G} \Big|_{\rho=r_0} = \frac{\cos r_0}{\sin r_0}.$$

(2) 在以 p 为原点的测地极坐标系 (ρ, θ) 中, θ 就代表球面上一点的经度, ρ 则代表距离北极点 p 的大圆距离. 所以, $\exp_p(v)$ 的经度同样是东经 107° , 而纬度则与北极相差 $\frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 120^\circ$, 即南纬 30° .

习题 4 (19 张希 H 班) 设 S 为高斯曲率恒为负常数 K 的曲面片. 计算测地半径为 r_0 的测地圆周上每点处的测地曲率.

证明. 考虑测地极坐标系, 第一基本形式为 $I = d\rho \otimes d\rho + G(\rho, \theta) d\theta \otimes d\theta$. 由于 K 为负常数, 所以得到初值问题

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} = -K\sqrt{G}, \quad \sqrt{G}(0, \theta) = 0, \quad (\sqrt{G})_{\rho}(0, \theta) = 1.$$

¹用连通性比较容易说明这件事, 任取一点 u_0 , 考虑集合 $E = \{(u, v) \in D : f(u) = f(u_0)\}$, 用参数区域的连通性证明 $E = D$ 就好. 但这不是我们的重点. 事实上, 如果本题能用 Liouville 公式推导出 f 每点附近都是常数, 就已经达到微分几何层次的要求了, 放在期末考试里就不会扣你的分.

计算可得 $G(\rho, \theta) = -\frac{1}{K} \sinh^2(\sqrt{-K}\rho)$. 利用 Liouville 公式可得

$$k_g = \frac{\partial}{\partial \rho} \log \sqrt{G} \Big|_{\rho=r_0} = \sqrt{-K} \frac{\cosh(\sqrt{-K}r_0)}{\sinh(\sqrt{-K}r_0)}.$$

注 习题 3, 4 已经演示了常正、常负高斯曲率曲面的测地圆周具有常测地曲率. 对于高斯曲率恒为零的曲面片, 计算可得测地极坐标系下黎曼度量为 $I = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\theta \otimes d\theta$. 此时测地圆周 $S_{r_0}(P)$ 的测地曲率为

$$k_g = \frac{\partial}{\partial \rho} \log \sqrt{G} \Big|_{\rho=r_0} = \frac{1}{r_0}.$$

这也是个常数.

习题 5 (18, 22 刘世平班) 设 S 为 \mathbb{E}^3 的正则曲面片, 参数化为 $r = r(u, v)$. 证明:

$$\frac{D}{dv} \frac{D}{du} r_u - \frac{D}{du} \frac{D}{dv} r_u = K \sqrt{EG - F^2} \cdot \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u),$$

其中 K 为高斯曲率, $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u)$ 表示将 r_u 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到的向量, 这里切平面取使得 $\{r_u, r_v\}$ 为右手系的定向.

证明. 回忆任一向量场 w 的协变导数定义为该函数的导数在曲面切平面上的投影, 所以

$$\frac{Dw}{du} = \frac{dw}{du} - \left\langle \frac{dw}{du}, n \right\rangle n, \quad \frac{Dw}{dv} = \frac{dw}{dv} - \left\langle \frac{dw}{dv}, n \right\rangle n.$$

现在用上式计算本题. 分别计算可得

$$\begin{aligned} \frac{D}{dv} \frac{D}{du} r_u &= \frac{D}{dv} (r_{uu} - \langle r_{uu}, n \rangle n) = \frac{D}{dv} (r_{uu} - Ln) \\ &= (r_{uu} - Ln)_v - \langle (r_{uu} - Ln)_v, n \rangle n \\ &= r_{uuv} - \langle r_{uuv}, n \rangle n - Ln_v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{du} \frac{D}{dv} r_u &= \frac{D}{du} (r_{uv} - \langle r_{uv}, n \rangle n) = \frac{D}{du} (r_{uv} - Mn) \\ &= (r_{uv} - Mn)_u - \langle (r_{uv} - Mn)_u, n \rangle n \\ &= r_{uvu} - \langle r_{uvu}, n \rangle n - Mn_u. \end{aligned}$$

所以可得

$$\frac{D}{dv} \frac{D}{du} r_u - \frac{D}{du} \frac{D}{dv} r_u = Mn_u - Ln_v.$$

首先, 注意到 $\langle Mn_u - Ln_v, r_u \rangle = -ML + LM = 0$, 所以二者正交. 下面我们考虑如何求出具体表达式. 因为切平面取 $\{r_u, r_v\}$ 为右手系的定向, 所以 $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u)$ 与 $r_v - \langle r_v, \frac{r_u}{\sqrt{E}} \rangle \frac{r_u}{\sqrt{E}} = r_v - \frac{F}{E} r_u$ 方向相同, 我们记这个方向上的单位向量为 e . 计算可得

$$\left\langle Mn_u - Ln_v, r_v - \frac{F}{E} r_u \right\rangle = \langle Mn_u - Ln_v, r_v \rangle = L^2 - MN.$$

另一方面,有

$$\left| r_v - \frac{F}{E} r_u \right|^2 = |r_v|^2 + \frac{F^2}{E^2} |r_u|^2 - \frac{2F}{E} \langle r_v, r_u \rangle = \frac{EG - F^2}{E^2}.$$

因此

$$Mn_u - Ln_v = \frac{L^2 - MN}{|r_v - \frac{F}{E} r_u|} e = \frac{E(LN - M^2)}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u)}{\sqrt{E}} = K\sqrt{EG - F^2} \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(r_u).$$

习题 6 证明如下结论.

1. (22 刘世平 H 班) 如果曲面上一条曲线既是测地线, 又是渐近线, 则必然是直线.
2. (22 刘世平 H 班) 如果曲面上一条曲率恒不为零的曲线既是测地线, 又是曲率线, 则必然是平面曲线.
3. (22 刘世平 H 班) 如果曲面上一条测地线是曲率恒不为零的平面曲线, 则必然是曲率线.
4. 如果曲面上所有测地线都是平面曲线, 则曲面必然是全脐点曲面.
5. (17 张希 H 班) 如果曲面上存在两族测地线彼此交成定角, 则曲面高斯曲率恒为零.

证明. (1) 设这条曲线的曲率为 κ , 回忆我们推导过 $\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2$. 由测地线可得 $k_g = 0$, 由渐近线可得 $k_n = 0$, 所以曲率 κ 恒为零, 该曲线为直线.

(2) 设曲线的弧长参数化为 $C: r = r(s)$, 取 $e_1 = \dot{r}(s)$, 结合 $e_3 = n$ 沿曲线构成正交标架 $\{e_1, e_2, e_3\}$. 要证 C 是平面曲线, 只需证挠率恒为零. 结合挠率的计算公式可得只需证 $(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}})$ 恒为零. 由于 C 是测地线, 所以 $0 = k_g = \langle \frac{De_1}{ds}, e_2 \rangle = \langle \ddot{r}, e_2 \rangle$. 又因为 \ddot{r} 和 $e_1 = \dot{r}$ 正交, 所以 $\ddot{r} = \pm \kappa e_3$. 因此

$$\ddot{\ddot{r}} = \pm(\dot{\kappa}e_3 + \kappa\dot{e}_3).$$

由于曲线是曲率线, 所以 $\dot{e}_3 = -\mathcal{W}(\dot{r}) = -k_1\dot{r} = -k_1e_1$, 其中 \mathcal{W} 是 Weingarten 变换. 综上所述可得

$$(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}}) = \langle e_1, \pm\kappa e_3 \wedge \pm(\dot{\kappa}e_3 - \kappa k_1 e_1) \rangle = \langle e_1, \mp\kappa^2 k_1 e_2 \rangle = 0.$$

由此即证.

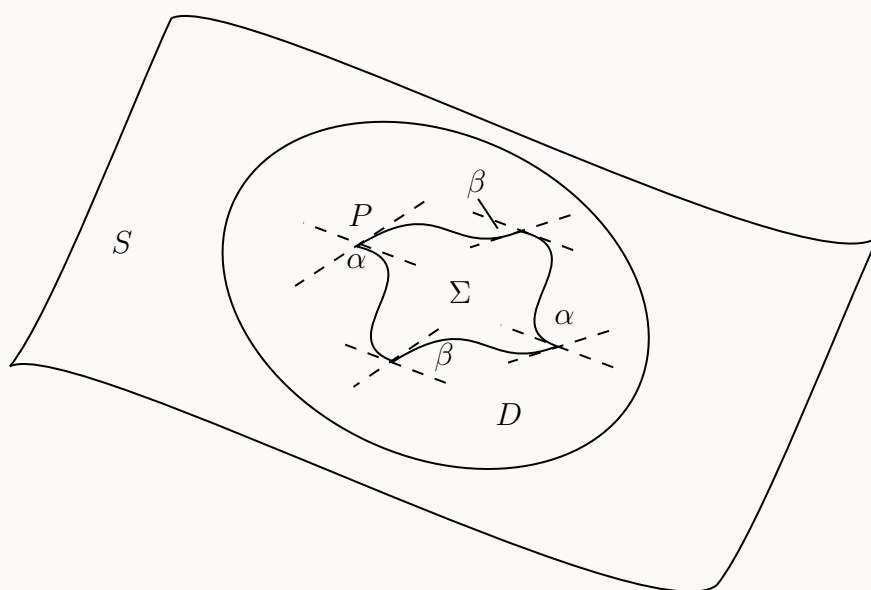
(3) 我们沿用 (2) 中的记号. 由于 C 测地且为平面曲线, 所以

$$0 = (\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}}) = \langle \pm(\dot{\kappa}e_3 + \kappa\dot{e}_3), e_1 \wedge (\pm\kappa e_3) \rangle = \langle \pm(\dot{\kappa}e_3 + \kappa\dot{e}_3), \mp\kappa e_2 \rangle = -\kappa^2 \langle e_2, \dot{e}_3 \rangle.$$

由于曲率 κ 恒不为零, 所以 \dot{e}_3 与 e_2 正交. 又因为 \dot{e}_3 与 e_3 正交, 所以 $\dot{e}_3 = -\mathcal{W}(e_1)$ 与 e_1 共线, 即 e_1 总为主方向, 因此 C 是曲率线.

(4) 假设曲面 S 上一点 P 不是脐点, 设两个主曲率函数为 k_1, k_2 , 不妨设 P 点处 k_2 不为零. 根据 Euler 公式可得 P 点处切方向 v 的法曲率可以表为 $k_n(v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$, 其中 $\theta \in [0, \pi]$ 为 v 和主方向 e_1 的夹角. 所以 $k_n(v) = 0$ 当且仅当 $\tan^2 \theta = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$, 由此可见法曲率为零的切方向至多只有两个. 注意到每个切方向 v 都唯一确定了一条过 P 点的测地线, 该测地线的曲率 κ 满足 $|\kappa| = |k_n(v)|$. 这说明过 P 点且 P 点处曲率为零的测地线至多只有两条, 从而存在无限多条 P 点处曲率不为零的测地线. 但根据 (3) 的结论, 这些测地线在 P 点处的切方向都是主方向, 与 P 非脐点矛盾! 所以 S 是全脐点曲面.

(5) 假设存在点 $P \in S$, 使得高斯曲率 $K(P) \neq 0$, 不妨设 $K(P) > 0$. 存在 P 在曲面内的单连通邻域 D , 使得 D 内曲面的高斯曲率恒大于 $\frac{1}{2}K(P) > 0$.



以 P 点为一个顶点, 根据题设, 可以找到 D 内部的两对测地线, 它们围成单连通区域 Σ , 并且形成一个曲边平行四边形. 换言之, 图中成立 $\alpha + \beta = \pi$. 根据 Gauss-Bonnet 公式, 可得

$$\iint_{\Sigma} K \, dA = 2\pi - 2(\alpha + \beta) = 0.$$

但另一方面, $\iint_{\Sigma} K \, dA \geq \frac{1}{2}K(P)\text{Area}(\Sigma) > 0$, 矛盾! 所以 S 的高斯曲率恒为零.

习题 7 (改编自 19 杨迪班期末附加) 证明: 在曲面片 S 上每点附近存在沿任意光滑曲线都平行的非零切向量场 \mathbf{v} , 当且仅当 S 的高斯曲率恒为零.

证明. \Rightarrow : 任取一点 $P \in S$, 由于 \mathbf{v} 在 P 附近处处非零, 所以 $f(u, v) := |\mathbf{v}|$ 是 P 附近的光滑函数, $\log f$ 当然也是. 取定 S 上的正交标架 $\{e_1, e_2\}$, 则存在 P 附近的光滑函数 $\theta(u, v)$, 使得 $\mathbf{v} = f \cdot (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2)$. 任取过 P 点的光滑曲线 $u = u(s), v = v(s), s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

我们有

$$0 = \frac{D\mathbf{v}}{ds} = \left(\dot{f} \cos \theta - f \dot{\theta} \sin \theta + f \frac{\omega_2^1}{ds} \sin \theta \right) e_1 + \left(\dot{f} \sin \theta + f \dot{\theta} \cos \theta + f \frac{\omega_1^2}{ds} \cos \theta \right) e_2.$$

整理可得

$$f \cdot \left(\dot{\theta} + \frac{\omega_1^2}{ds} \right) \sin \theta = \dot{f} \cos \theta, \quad -f \cdot \left(\dot{\theta} + \frac{\omega_1^2}{ds} \right) \cos \theta = \dot{f} \sin \theta.$$

由此可得

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{\omega_1^2}{ds} \pm \frac{d}{ds} \log f = 0.$$

注意到曲线的任意性, 我们得到: 在 P 附近成立 $\omega_1^2 = -d\theta \pm d(\log f)$, 进而有 $d\omega_1^2 = 0$. 所以 $K(P) = 0$. 结合 P 的任意性可得 S 的高斯曲率恒为零.

⇐: 任取一点 $P \in S$, 此时取 P 附近的测地平行坐标系 (u, v) , 那么第一基本形式为 $I = du \otimes du + G(u, v) dv \otimes dv$. 结合 $K \equiv 0$ 和 G 的初值计算可得 G 恒为 1, 即 $I = du \otimes du + dv \otimes dv$. 由此可得 $e_1 = r_u, e_2 = r_v$ 构成正交标架, 并且 $\omega^1 = du, \omega^2 = dv$, 自然有 $\omega_1^2 = 0$. 所以 P 附近的非零切向量场 $\mathbf{v} = e_1$ 即为所求.

习题 8 (17 张希 H 班) 设 $S: r = r(u, v)$ 为正则曲面片, D 为 S 的单连通子集. \mathbf{v} 是一个沿正则曲线 $C = \partial D$ 的平行切向量场, 并且和 C 夹成定角.

1. 证明 C 是测地线.
2. 如果 S 的高斯曲率 $K \geq 2$, 证明 D 的面积不超过 π .

证明. (1) 设曲线 C 的弧长参数化为 $r = r(s)$, 我们记 $e_1 = \dot{r}(s), e_3 = n$ 为曲面法向量, $\{r(s); e_1, e_2 = e_3 \wedge e_1, e_3\}$ 为沿 C 定义的正交标架. 由于 \mathbf{v} 和 e_1 夹成定角, 所以存在常数 θ 使得 $\mathbf{v} = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$. 由此可得

$$0 = \frac{D\mathbf{v}}{ds} = \cos \theta \frac{De_1}{ds} + \sin \theta \frac{De_2}{ds} = k_g (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2).$$

因此 C 的测地曲率 $k_g = 0$, C 是测地线.

(2) 由于 $C = \partial D$ 处处光滑, 所以 Gauss-Bonnet 公式中外角项为零. 结合 C 是测地线可得

$$2\pi = \iint_D K \, dA \geq 2\text{Area}(D).$$

因此 $\text{Area}(D) \leq \pi$.

习题 9 我们称曲面片 S 的参数化 $r = r(u, v)$ 为一个 Chebyshev 网, 是指参数曲线都为弧长参数化的, 即 $|r_u| = |r_v| = 1$. 更进一步, 称 r 为渐近 Chebyshev 网, 是指每条参数曲线都为渐近线. 现在, 我们设 S 为高斯曲率恒为 -1 的曲面片, $r = r(u, v)$ 是一个渐近 Chebyshev 网, $\alpha = \alpha(u, v) \in (0, \pi)$ 表示 $r(u, v)$ 处两个渐近方向的夹角.

1. 利用 α 确定曲面片 S 的第一基本形式和第二基本形式.
2. 利用 Gauss 方程证明 α 满足 Sine-Gordon 方程 $\alpha_{uv} = \sin \alpha$.
3. 证明: S 上由参数曲线围成的任一四边形面积均小于 2π .

证明. (1) 依定义可得 S 的参数曲线夹角为 α , 并且 $|r_u| = |r_v| = 1$, 所以

$$I = du \otimes du + \cos \alpha (du \otimes dv + dv \otimes du) + dv \otimes dv.$$

另一方面, 由于 r_u, r_v 都是渐近方向, 所以对应的法曲率均为零, 即 $L = N = 0$, 又因为 $K = -1$, 所以由 $K = \frac{-M^2}{EG-F^2}$ 求解得到 $M = \pm \sin \alpha$. 所以第二基本形式为

$$II = \pm \sin \alpha (du \otimes dv + dv \otimes du).$$

(2) 根据第一基本形式可得

$$\omega^1 = du + \cos \alpha dv, \quad \omega^2 = \sin \alpha dv.$$

由此可以反解出 $du = \omega^1 - \omega^2 \cot \alpha, dv = \omega^2 \csc \alpha$. 所以

$$d\omega^1 = -\alpha_u \sin \alpha du \wedge dv = -\alpha_u \omega^1 \wedge \omega^2,$$

$$d\omega^2 = \alpha_u \cos \alpha du \wedge dv = \alpha_u \cot \alpha \omega^1 \wedge \omega^2.$$

因此联络形式为

$$\omega_1^2 = -\alpha_u \omega^1 + \alpha_u \cot \alpha \omega^2 = -\alpha_u du.$$

所以

$$-1 = K = -\frac{d\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = -\frac{\alpha_{uv}}{\sin \alpha}.$$

这说明 α 需要满足 Sine-Gordon 方程 $\alpha_{uv} = \sin \alpha$.

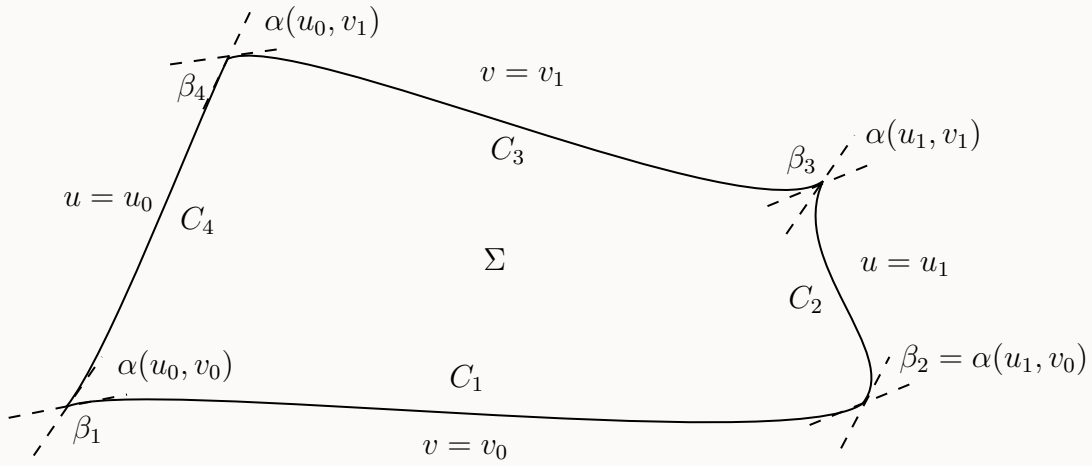
(3) 首先求参数曲线的测地曲率. (1) 中已求得了 $\omega_1^2 = -\alpha_u du$. 先考虑 u -参数曲线. 由于 u 是弧长参数, 此时由 Liouville 公式可得

$$k_g = \frac{\omega_1^2}{du} = -\alpha_u.$$

对于 v -参数曲线, 由于 v 也是弧长参数, 并且和 u -参数曲线的夹角为 α , 由 Liouville 公式可得

$$k_g = \alpha_v + \frac{\omega_1^2}{dv} = \alpha_v.$$

回到原题证明. 我们任取 $u_0 < u_1, v_0 < v_1$, 考虑对应的参数曲线 $C_1: v = v_0, C_2: u = u_1, C_3: v = v_1, C_4: u = u_0$ 围成的四边形区域 Σ , 如图所示. $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 表示对应的各个外角.



根据几何关系可得

$$\alpha(u_0, v_0) + \beta_1 = \pi, \alpha(u_1, v_0) = \beta_2, \alpha(u_1, v_1) + \beta_3 = \pi, \alpha(u_0, v_1) = \beta_4.$$

由于 u, v 均为对应参数曲线的弧长参数, 将边界上测地曲率的积分累和可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} k_g ds &= \int_{u_0}^{u_1} -\alpha_u(u, v_0) dv + \int_{v_0}^{v_1} \alpha_v(u_1, v) du \\ &+ \int_{u_1}^{u_0} -\alpha_u(u, v_1) du + \int_{v_1}^{v_0} \alpha_v(u_0, v) dv \\ &= 2\alpha(u_0, v_0) - 2\alpha(u_1, v_0) + 2\alpha(u_1, v_1) - 2\alpha(u_0, v_1) \\ &= 4\pi - 2 \sum_{i=1}^4 \beta_i. \end{aligned}$$

结合 $K = -1$, 代入 Gauss-Bonnet 公式可得

$$- \iint_{\Sigma} dA + 4\pi - 2 \sum_{i=1}^4 \beta_i + \sum_{i=1}^4 \beta_i = 2\pi.$$

所以

$$\text{Area}(\Sigma) = 2\pi - \sum_{i=1}^4 \beta_i < 2\pi.$$