《方兆本随机过程第三版》答案整理

ypa

2022 年 12 月 19 日起
Last Modified: 2023 年 10 月 22 日

0 前言

尚未完成的题目:
(一) 本章已全部完成
(二) 本章已全部完成
(三) 3.25-3.31
(四) 4.9 4.18 4.19 4.30 4.32 4.33 4.35-4.42
第三章 Markov 过程中纯生过程、生灭过程、分支过程不讲；第四章平稳过程中白噪声序列、AR(p) 模型、Yule-Walker 方程等不讲
欢迎访问主页http://home.ustc.edu.cn/~cc22155 本答案的 PDF 文件和 LaTeX 文件可在主页下载,

- http://home.ustc.edu.cn/~cc22155/resource/SPanswer.pdf
- http://home.ustc.edu.cn/~cc22155/resource/SPanswer.zip

如有错漏, 欢迎联系lzw2003@mail.ustc.edu.cn

目录

1 第一章 引论

1.1 令 $X(t)$ 为二阶矩存在的随机过程. 试证它是宽平稳的当且仅当 $\mathbb{E}[X(s)]$ 与 $\mathbb{E}[X(s)X(s+t)]$ 都不依赖 s.

Solution

充分性：

若 $\mathbb{E}[X(s)]$ 与 $\mathbb{E}[X(s)X(s+s')]$ 都不依赖 s

则 $\mathbb{E}[X(s)] =$ 常数 m, $\mathbb{E}[X(s)X(s+s')] = f(t)$

令 $s' = s + t$,

$$\therefore \mathbb{E}[X(s)X(s')] = f(s'-s)$$

$$\begin{aligned} \therefore R_X(s,s') &= \mathbb{E}[X(s)X(s')] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(s')] \\ &= f(t-s) - m^2 \end{aligned}$$

$\therefore X(t)$ 是宽平稳的

必要性：

若 $X(t)$ 宽平稳则 $\mathbb{E}[X(S)]$ 为常数 m，即 $\mathbb{E}[X(S)]$ 与 s 无关

则

$$\begin{aligned} R_X(s,s') &= \mathbb{E}[X(s)X(s')] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(s')] \\ &= g(s'-s) \end{aligned}$$

令 $s' = s + t$

则 $\mathbb{E}[X(s)X(s+t)] = m^2 + g(t)$ 与 s 无关

1.2 记 $U_1, \cdots, U_n$ 为在 $(0,1)$ 中均匀分布的独立随机变量. 对 $0 < t, x < 1$ 定义

$$I(t,x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant t, \\ 0, & x > t, \end{cases}$$

并记 $X(t) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} I(t, U_k), 0 \leqslant t \leqslant 1$, 这是 $U_1, \cdots, U_n$ 的经验分布函数. 试求过程 $X(t)$ 的均值和协方差函数.

Solution

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(t,U_k)\right] = \mathbb{E}[I(t,U_1)] = \int_0^t 1\,\mathrm{d}x = t$$

$$
\begin{aligned}
R_X(s,t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(t)] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} I(s,U_i)\cdot\sum_{j=1}^{n} I(s,U_j)\right] - st \\
&= \frac{1}{n^2}\Big\{(n^2-n)\mathbb{E}[I(s,U_1)\cdot I(t,U_2)] + n\mathbb{E}[I(s,U_1)\cdot I(t,U_1)]\Big\} - st \\
&= \frac{1}{n^2}[(n^2-n)st + n\cdot\min(s,t)] - st \\
&= \frac{1}{n}[\min(s,t) - st]
\end{aligned}
$$

1.3 令 Z_1, Z_2 为独立的正态随机变量, 均值为 0, 方差为 σ^2, λ 为实数. 定义过程 $X(t) = Z_1\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t$. 试求 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

Solution

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}(Z_1)\cos\lambda t + \mathbb{E}(Z_2)\sin\lambda t = 0 \\
R_X(s,t) &= \mathrm{Cov}[(Z_1\cos\lambda s + Z_2\sin\lambda s), (Z_1\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t)] \\
&= \mathrm{Cov}(Z_1,Z_1)\cos\lambda s\cos\lambda t + \mathrm{Cov}(Z_2,Z_2)\sin\lambda s\sin\lambda t \\
&= \sigma^2\cos\lambda(s-t)
\end{aligned}
$$

$R_X(s,t)$ 只与 $s-t$ 有关, 故是宽平稳的

1.4 Poisson 过程 $X(t), t \geqslant 0$ 满足

(i) $X(t) = 0$

(ii) 对 $t > s$, $X(t) - X(s)$ 服从均值为 $\lambda(t-s)$ 的 Possion 分布

(iii) 过程是有独立增量的.

试求其均值函数和协方差函数. 它是宽平稳的吗?

Solution [1]

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}[X(t) - X(0)] = \lambda t \\
R_X(s,t) &= \mathrm{Cov}[X(t), X(s)] \\
&= \mathrm{Cov}\left[\big(X(s) - X(t) + X(t) - X(0)\big), \big(X(t) - X(0)\big)\right] \\
&= \mathrm{Cov}(X(t) - X(0), X(t) - X(0)) \quad \text{（独立增量）} \\
&= \lambda t \quad (s \geqslant t)
\end{aligned}
$$

均值不为常数, 协方差非仅与 $\tau = s - t$ 有关, 故非宽平稳

[1] 注意答案中的协方差函数假设 $s \geqslant t$

1.5 $X(t)$ 为第 4 题中的 Possion 过程. 记 $Y(t)=X(t+1)-X(t)$, 试求过程 $Y(t)$ 的均值函数和协方差函数, 并研究其平稳性.

Solution

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y(t)] &= \mathbb{E}[X(t+1)]-\mathbb{E}[X(t)]=\lambda \\
R_X(s,t) &= \mathrm{Cov}(X(s+1)-X(s),X(t+1)-X(t)) \\
&= \mathrm{Cov}(X(s+1),X(t+1))+\mathrm{Cov}(X(s),X(t)) \\
&\quad -\mathrm{Cov}(X(s),X(t+1))-\mathrm{Cov}(X(s+1),X(t)) \\
&= \lambda[\min(s+1,t+1)+\min(s,t)-\min(s,t+1)-\min(s+1,t)]
\end{aligned}$$

令 $\beta=s-t$, 当 $\beta>1$ 或 $\beta<-1$ 时, $R_Y(s,t)=0$

当 $0<\beta\leqslant 1$ 时, $R_Y(s,t)=\lambda(t+1+t-s-t)=\lambda(t-s+1)$

当 $-1\leqslant\beta\leqslant 0$ 时, $R_Y(s,t)=\lambda(s+1+s-s-t)=\lambda(s-t+1)$

故为宽平稳

1.6 令 Z_1 和 Z_2 是独立同分布的随机变量. $\mathbb{P}(Z_1=-1)=\mathbb{P}(Z_1=1)=\frac{1}{2}$. 记 $X(t)=Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t$, $t\in\mathbb{R}$. 试证 $X(t)$ 是宽平稳的, 它是严平稳的吗?

Solution

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_1) &= \mathbb{E}(Z_2)=0 \\
\mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}(Z_1)\cos\lambda t+\mathbb{E}(Z_2)\sin\lambda t=0 \\
R_X(s,t) &= \mathrm{Cov}[(Z_1\cos\lambda s+Z_2\sin\lambda s),(Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t)] \\
&= \mathrm{Cov}(Z_1,Z_1)\cos\lambda s\cos\lambda t+\mathrm{Cov}(Z_2,Z_2)\sin\lambda s\sin\lambda t \\
&= 2\mathrm{Var}(Z_1)\cos\lambda(s-t) \\
&= 2\left[\mathbb{E}(Z_1^2)-\mathbb{E}^2(Z_1)\right]\cos\lambda(s-t) \\
&= \cos\lambda(s-t)
\end{aligned}$$

故是宽平稳

$F_t(x)=\mathbb{P}(Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t\leqslant x)$

考虑 $F_t(0)=\mathbb{P}(Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t\leqslant 0)$

当 $t=0$ 时 $F_t(0)=\mathbb{P}(Z_1\leqslant 0)=\frac{1}{2}$

当 $t=\frac{\pi}{4\lambda}$ 时 $F_t(0)=\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(Z_1+Z_2)\leqslant 0\right)=\frac{3}{4}$

$\therefore F_t(x)$ 与 t 有关, 故 $X(t)$ 不是严平稳过程

1.7 试证：若 $Z_0,Z_1,\cdots$ 为独立同分布随机变量, 定义 $X_n=Z_0+Z_1+\cdots+Z_n$, 则 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是独立增量过程.

Solution

对 $\forall n$ 及 $\forall t_1,\cdots,t_n \in \{0,1,2,\cdots\}, t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 有

$$\begin{cases} X(t_2) - X(t_1) = Z_{t_1+1} + \cdots + Z_{t_2}, \\ X(t_3) - X(t_2) = Z_{t_2+1} + \cdots + Z_{t_3}, \\ \quad \vdots \\ X(t_n) - X(t_{n-1}) = Z_{t_{n-1}+1} + \cdots + Z_{t_n}. \end{cases}$$

由题知 $Z_{t_1+1},\cdots,Z_{t_n}$ 互相独立,

$\therefore (Z_{t_1+1},\cdots,Z_{t_2}),(Z_{t_2+1},\cdots,Z_{t_3}),\cdots,(Z_{t_{n-1}+1},\cdots,Z_{t_n})$ 互相独立,

$\therefore \{X_n, n \geqslant 0\}$ 为独立增量过程.

1.8 若 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立随机变量, 还要添加什么条件才能确保它是严平稳的随机过程?

Solution

若 $\{X_1, X_2, \cdots\}$ 严平稳, 则对任意正整数 m 和 n, X_m 和 X_n 的分布都相同, 从而 $X_1, X_2, \cdots$ 是一列同分布的随机变量. 而当 $X_1, X_2, \cdots$ 是一列独立同分布的随机变量时. 对任意正整数 k 及 $n_1,\cdots,n_k, k$ 维随机向量 $(X_{n_1},\cdots,X_{n_k})$ 的分布函数为 (记 $X_1, X_2, \cdots$ 的共同分布函数为 $F(x)$)

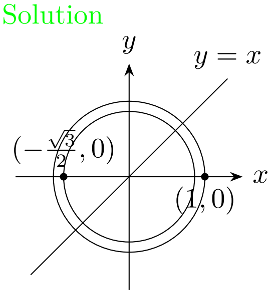
$$\begin{aligned} &F_{X_{n_1},\cdots,X_{n_k}}(x_1,\cdots,x_k) = F_{X_{n_1}}(x_1)\cdots F_{X_{n_k}}(x_n) \\ =&F(x_1)\cdots F(x_k). \qquad (-\infty < x_1,\cdots,x_k < +\infty) \end{aligned}$$

这说明了 $(X_{n_1},\cdots,X_{n_k})$ 的分布函数与 $n_1,\cdots,n_k$ 无关, 故 $\{X_1, X_2, \cdots\}$ 严平稳.

1.9 令 X 和 Y 是从单位圆内的均匀分布中随机选取一点所得的横坐标和纵坐标. 试计算条件概率

$$\mathbb{P}\left(X^2 + Y^2 \geqslant \frac{3}{4} \middle| X > Y\right).$$

Solution



由对称性得,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(X^2 + Y^2 \geqslant \frac{3}{4} \middle| X > Y\right) \\ =&\frac{1}{2}\cdot\mathbb{P}\left(X^2 + Y^2 \geqslant \frac{3}{4}\right) \\ =&\frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

1.10 粒子依参数为 λ 的 Possion 分布进入计数器, 两粒子到达的时间间隔 $T_1, T_2, \cdots$ 是独立的参数为 λ 的指数分布随机变量. 记 S 是 $[0,1]$ 时段中的粒子总数. 时间区间 $I \subset [0,1]$, 其长度记为 $|I|$. 试证明 $\mathbb{P}(T_1 \in I, S = 1) = \mathbb{P}(T_1 \in I, T_1 + T_2 > 1)$, 并由此计算 $\mathbb{P}(T_1 \in I | S = 1) = |I|$.

Solution

设 W_i 为第 i 个离子进入计数器时的时刻, 显然有 $W_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$ 那么有 $\{S = 1\} = \{W_2 > 1\} \Rightarrow \{T_1 \in$

$I, S=1\} = \{S=1\} = \{T_1 \in I, T_1+T_2>1\}$ 于是有

$$\mathbb{P}(T_1 \in I, S=1) = \mathbb{P}(T_1 \in I, T_1+T_2>1)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 \in I | S=1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \in I, S=1)}{\mathbb{P}(S=1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}[N(t)=0, N(t+|I|=1, N(1)=1)]}{\mathbb{P}[N(1)=1]} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \lambda |I| \cdot \mathrm{e}^{-\lambda |x|} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(1-t-|I|)}}{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}} \\ &= |I|\end{aligned}$$

1.11 X, Y 为两独立随机变量且分布相同. 证明 $\mathbb{E}(X|X+Y=z) = \mathbb{E}(Y|X+Y=z)$. 并试求基于 $X+Y=z$ 的 X 的最佳预报, 并求出预报误差 $\mathbb{E}(X-\phi(X+Y))^2$

Solution

X, Y 是独立同分布的随机变量，且分布相同，故条件分布相同。故有

$$\mathbb{E}[X|X+Y=Z] = \mathbb{E}[Y|X+Y=Z]$$

其于 $X+Y=z$ 的 X 的最佳预报为 $\mathbb{E}[X|X+Y=z] = \frac{z}{2}$

同理，预报误差为

$$\mathbb{E}[X-\varphi(X+Y)]^2 = \mathbb{E}[\frac{X-Y}{2}]^2 = \frac{1}{4}[\mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + E(Y^2) = \frac{1}{2}\mathrm{Var}(X)]$$

1.12 气体分子的速度 V 有三个垂直分量 V_x, V_y, V_z, 它们的联合分布密度依 Maxwell-Boltzman 定律为

$$f_{V_x,V_y,V_z}(v_1,v_2,v_3) = \frac{1}{(2\pi kT)^{3/2}} \exp\left\{-\left(\frac{v_1^2+v_2^2+v_3^2}{2kT}\right)\right\},$$

其中 k 是 Boltzman 常数, T 为绝对温度, 给定分子的总动能为 e. 试求 x 方向的动量的绝对值的期望值.

Solution

$$\begin{aligned}f_{V_x,V_y,V_z}(v_x,v_y,v_z) &= \frac{1}{(2\pi kT)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2kT}\right\} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{v_x^2}{2kT}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{kT}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\frac{v_y^2}{2kT}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{kT}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\frac{v_z^2}{2kT}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{kT}} \\ V_x, V_y, V_z &\sim N(0, kT) \\ e &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}mV^2\right] = \frac{1}{2}m\mathbb{E}[V^2] = \frac{1}{2}m\mathbb{E}[V_x^2+V_y^2+V_z] = \frac{1}{2}m \cdot 3kT = \frac{3mkT}{2} \\ m &= \frac{2e}{3kT} \\ \mathbb{E}[|p_x|] &= m\mathbb{E}[|v_x|] = m\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{kT}} |v_x| \, \mathrm{e}^{-\frac{v_x^2}{2kT}} \, \mathrm{d}v_x \\ &= \frac{2m}{(2\pi kT)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} v_x \mathrm{e}^{-\frac{v_x^2}{2kT}} \, \mathrm{d}v_x \\ &= m\sqrt{\frac{2kT}{\pi}} = \frac{2e}{3kT}\sqrt{\frac{2kT}{\pi}} = \frac{2e}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi kT}}\end{aligned}$$

1.13 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布. 它们服从参数为 λ 的指数分布. 试证 $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 是参数为 (n, λ) 的 Γ 分布, 其密度为

$$f(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\}(\lambda t)^{n-1}/(n-1)!\,, \quad t \geqslant 0.$$

Solution

X_i 的矩母函数为

$$g_{X_i}(t) = \int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \cdot \mathrm{e}^{tx}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$\because X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \quad \therefore g_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(t) = (g_{X_i}(t))^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

参数为 (n, λ) 的 Γ 分布的矩母函数为:

$$\begin{aligned} g_\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \mathrm{e}^{tx}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-1} \mathrm{e}^{-(\lambda - t)x}\, \mathrm{d}x \\ &\xlongequal{u=(\lambda-t)x} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}}{(\lambda - t)^n}\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(\lambda - t)^n} \cdot \Gamma(n) \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(\lambda - t)^n} \cdot (n-1)! = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^n X_i$ 是参数为 (n, Γ) 的 Γ 分布

1.14 设 X_1 和 X_2 为相互独立的均值为 λ_1 和 λ_2 的 Possion 随机变量. 试求 $X_1 + X_2$ 的分布, 并计算给定 $X_1 + X_2 = n$ 时 X_1 的条件分布.

Solution

令 $Y = X_1 + X_2$

$$\begin{aligned} g_Y(t) &= g_{X_1}(t) g_{X_2}(t) \\ &= \mathrm{e}^{\lambda_1(\mathrm{e}^t - 1)} \mathrm{e}^{\lambda_2(\mathrm{e}^t - 1)} \\ &= \mathrm{e}^{(\lambda_1 + \lambda_2)(\mathrm{e}^t - 1)} \end{aligned}$$

$\therefore Y \sim \mathrm{Poi}\,(\lambda_1 + \lambda_2)$

$\therefore$ 给定 $X_1+X_2=n$ 时 X_1 服从参数为 $p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}, n=n$ 的二项分布

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_1+X_2=n] &= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} \\
\mathbb{P}[X_1=m|X_1+X_2=n] &= \frac{\mathbb{P}[X_1=m, X_1+X_2=n]}{\mathbb{P}[X_1+X_2=n]} = \frac{\mathbb{P}[X_1=m, X_2=n-m]}{\mathbb{P}[X_1+X_2=n]} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1}\lambda_1^m}{m!}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}}{\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} \\
&= \frac{\lambda_1^m\lambda_2^{n-m}n!}{m!(n-m)!\lambda_1^n\lambda_2^n} \\
&= \binom{n}{m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-m}
\end{aligned}
$$

故服从二项分布

1.15 若 $X_1, X_2, \cdots$ 独立且有相同的以 λ 为参数的指数分布, N 服从几何分布, 即

$$\mathbb{P}(N=n)=\beta(1-\beta)^{n-1}, n=1,2,\cdots,0<\beta<1.$$

试求随机和 $Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$ 的分布.

Solution 1

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tY}|N=n)=g_X^n(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n \triangleq \alpha^n$$

$$\therefore g_Y(t)=\mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tY}|N)]=\mathbb{E}(\alpha^N)=\sum_{n=1}^{+\infty}\beta(1-\beta)^{n-1}\alpha^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha\beta(\alpha-\alpha\beta)^{n-1}$$

当 $|\alpha-\alpha\beta|<1$ 时 $g_Y(t)=\frac{\alpha\beta}{1-\alpha(1-\beta)}=\frac{\lambda\beta}{\lambda\beta-t}$

$\therefore Y$ 服从参数为 $\lambda\beta$ 的指数分布

Solution 2

利用题 1.13 的结论

$$X_1,\ldots,X_n \text{ i.i.d.}\quad X_i\sim \mathrm{Exp}\,(\lambda) \Rightarrow f(t)=\frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{Y|N}(y|n)\mathbb{P}[N=n]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda t}t^{n-1}}{(n-1)!}\beta(1-\beta)^{n-1} \\
&= \beta\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n\left[(1-\beta)t\right]^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda\beta\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t(1-\beta))^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda\beta\mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot\mathrm{e}^{\lambda t(1-\beta)}=\lambda\beta\mathrm{e}^{-\lambda\beta t}
\end{aligned}
$$

> **1.16** 若 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, $P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. N 与 X_i, $i \geqslant 1$ 独立且服从参数为 β 的几何分布, $0 < \beta < 1$. 试求随机和 $Y = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ 的均值, 方差和三、四阶矩.

Solution 1

使用矩母函数法。但据助教的习题提示，没有使用 MATLAB 等软件，矩母函数法求出来的应该是错误的 [4]

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tY}|N=n) = g_X^n(t) = \mathbb{E}^n(\mathrm{e}^{tY}) = \left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^n$$

$$\therefore g_Y(t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tY}|N)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^N\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^n \beta(1-\beta)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{E}(Y) &= g_Y'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^{n-1}\beta(1-\beta)^{n-1}\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\Bigg|_{t=0} = 0\\
\mathbb{E}(Y^2) &= g_Y''(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[n(n-1)\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^{n-2}\beta(1-\beta)^{n-1}\left(\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 + \\
&\qquad n\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^n\beta(1-\beta)^{n-1}\Bigg]\Bigg|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1} = \frac{1}{\beta}\\
\mathrm{Var}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y) = \frac{1}{\beta^2}\\
\mathbb{E}(Y^3) &= g_Y^{(3)}(0)\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\beta(1-\beta)^{n-1}\left[(n-1)\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^{n-2}\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}^{2} + \left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^n\right]\right\}\right)'\Bigg|_{t=0}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{n\beta(1-\beta)^{n-1}\Bigg[(n-1)(n-2)\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^3 + \\
&\qquad (n-1)\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^{n-2}\cdot 2\cdot\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} + n\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\Bigg]\Bigg\}\Bigg|_{t=0}\\
&= 0\\
\mathbb{E}(Y^4) &= g_Y^{(4)}(0)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\beta(1-\beta)^{n-1}\left[(n-1)\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^{n-1}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) + n\left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^n\right]\right\}\Bigg|_{t=0}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(3n^2 - 2n)\beta(1-\beta)^{n-1} = 3\sum_{n=1}^{\infty} n^2\beta(1-\beta)^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1}\\
&= 3\left(\frac{1-\beta}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) - 2\frac{1}{\beta^2} = \frac{6-5\beta}{\beta^2}
\end{aligned}$$

Solution 2

使用条件期望

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y|N=n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\mathbb{E}(X_i) = 0 \\
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y|N=n)\mathbb{P}(N=n) = 0 \\
\mathbb{E}(Y^2|N=n) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2 \middle| N=n\right] = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i X_j\right) \\
&= n\mathbb{E}(X_i^2) + 2\sum \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = n \\
\mathbb{E}(Y^2) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y^2|N=n)\mathbb{P}(N=n) = \sum_{i=1}^{\infty} n\mathbb{P}(N=n) = \sum_{i=1}^{\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1} = \frac{1}{\beta} \\
\mathbb{E}(Y^3|N=n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^3 + 3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i X_j^2 + 3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i^2 X_j\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^3 + 3\sum_{i\neq j} X_i^2 X_j\right) = n\mathbb{E}(X_i^3) + 3\sum_{i\neq j}\mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j) = 0 \\
\mathbb{E}(Y^3) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y^3|N=n)\mathbb{P}(N=n) = 0 \\
\mathbb{E}(Y^4|N=n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^4 + 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i X_j^3 + 6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i^2 X_j^2 + 4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i^3 X_j\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^4 + 4\sum_{i\neq j} X_i^3 X_j + 6\sum_{i\neq j} X_i^2 X_j^2\right) \\
&= n\mathbb{E}(X_i^4) + 0 + 6\cdot\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) = n + 6\cdot\binom{n}{2} = 3n^2 - 2n \\
\mathbb{E}(Y^4) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y^4|N=n)\mathbb{P}(N=n) = \sum_{i=1}^{\infty} 3n^2\beta(1-\beta)^{n-1} - 2\sum_{i=1}^{\infty} n\beta(1-\beta)^{n-1} \\
&= \frac{6-5\beta}{\beta^2}
\end{aligned}
$$

计算 $\mathbb{E}(Y^4)$ 时会出现一项 $\sum_{i=1}^{\infty} n^2\beta(1-\beta)^{n-1}$, 计算方法如下：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} n^2\beta(1-\beta)^{n-1} &= \beta\sum_{i=1}^{\infty}[n(n-1)+n](1-\beta)^{n-1} \\
&= \beta\left[\sum_{i=1}^{\infty} n(n-1)(1-\beta)^{n-1} + \sum_{i=1}^{\infty} n(1-\beta)^{n-1}\right] \\
&= \beta\left[(1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}((1-\beta)^n)'' + \sum_{n=1}^{\infty}((1-\beta)^n)'\right] \\
&= \beta\left[(1-\beta)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)'' - \left(\frac{1}{\beta}-1\right)'\right] \\
&= \beta\left[\frac{2\beta(1-\beta)}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^2}\right] = \frac{2-\beta}{\beta^2}
\end{aligned}
$$

或者可以采用稍微有点数学性的方法：$\mathbb{E}(Y^4) = \beta\sum_{n=1}^{\infty} n^2(1-\beta)^{n-1}$ 在 $(0,1)$ 上内闭一致收敛，$\therefore$ 求和和偏导次序可交换

令 $a=1-\beta \Rightarrow n^2a^{n-1}=\frac{\partial}{\partial a}(a\cdot\frac{\partial}{\partial a}a^n)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}n^2a^{n-1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(a\frac{\partial a^n}{\partial a}\right)=\frac{\partial}{\partial a}\left(a\frac{\partial\sum_{n=1}^{\infty}a^n}{\partial a}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial a}\left(a\frac{\partial(\frac{a}{1-a})}{\partial a}\right)=\frac{1+a}{(1-a)^3}=\frac{2-\beta}{\beta^3}\end{aligned}$$

1.17 随机变量 N 服从参数为 λ 的 Possion 分布. 给定 $N=n$, 随机变量 M 服从以 n 和 p 为参数的二项分布. 试求 M 的无条件概率分布.

Solution

$$\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tM}|N=n\big)=\big(p\mathrm{e}^t+(1-p)\big)^n\triangleq a^n$$

$$g_M(t)=\mathbb{E}(a^N)=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\frac{\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}=\mathrm{e}^{\lambda p(\mathrm{e}^t-1)}$$

$$\therefore M\sim\mathrm{Poi}\,(\lambda p)$$

2 第二章 Poisson 过程

2.1 $N(t)$ 为一 Possion 过程, 对 $s < t$ 试求条件概率 $\mathbb{P}\{N(s) = k | N(t) = n\}$.

Solution

$$\mathbb{P}\{N(s) = k|N(t) = n\} = \frac{\mathbb{P}[N(s) = k, N(t) = n]}{\mathbb{P}[N(t) = n]}$$
$$= \frac{\mathbb{P}[N(s) - N(0) = k, N(t) - N(s) = n - k]}{\mathbb{P}[N(t) = n]}$$
$$= \left[\frac{(\lambda s)^k \mathrm{e}^{-\lambda s}}{k!} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^{n-k}\, \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!}\right] \Big/ \left[\frac{(\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}}{n!}\right]$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

2.2 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为一强度是 λ 的 Possion 过程. 对 $s > 0$ 试计算 $E[N(t) \cdot N(t+s)]$.

Solution

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \mathbb{E}\Big\{N(t)\big[N(t+s) - N(t) + N(t)\big]\Big\} \\
&= \mathbb{E}\Big\{N(t)\big[N(t+s) - N(t)\big]\Big\} + \mathbb{E}[N^2(t)] \\
&= \lambda t \cdot \lambda s + \mathrm{Var}[N(t)] + \mathbb{E}^2[N(t)] \\
&= \lambda^2 ts + \lambda t + (\lambda t)^2 \\
&= \lambda^2 t(s+t) + \lambda t
\end{aligned}$$

2.3 电报依平均速率为每小时 3 个的 Possion 过程到达电报局, 试问:

(i) 从早上八时到中午没收到电报的概率;

(ii) 下午第一份电报到达时间的分布是什么?

Solution

(i) 令 t 的计时单位为小时, 并以早上 8:00 为起始时刻, 所求事件的概率即

$$\mathbb{P}[N(4) = 0] = \frac{\mathrm{e}^{-3\times 4} \cdot (3 \times 4)^0}{0!} = \frac{1}{\mathrm{e}^{12}} \approx 6.1 \times 10^{-6}$$

(ii) 取中午 12:00 为起始时刻, T 表示下午第一份电报到达时间

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leqslant t) = \mathbb{P}[N(t) \geqslant 1] = 1 - \mathrm{e}^{-3t}$$

$\therefore f(t) = \dfrac{\mathrm{d}F_T(t)}{\mathrm{d}t} = 3\mathrm{e}^{-3t}$, 即 T 服从参数为 3 的指数分布

2.4 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为一 $\lambda = 2$ 的 Possion 过程, 试求:

(i) $P\{N(1) \leqslant 2\}$;

(ii) $P\{N(1) = 1 \text{ 且 } N(2) = 3\}$;

(iii) $P\{N(1) \geqslant 2 | N(1) \geqslant 1\}$.

Solution

(i) $\mathbb{P}[N(1) \leqslant 2] = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}[N(1) = k] = \sum_{k=0}^{2} \frac{\mathrm{e}^{-2}2^k}{k!} = \frac{5}{\mathrm{e}^2}$

(ii) 原式 $= \mathbb{P}[N(1) - N(0) = 1]\mathbb{P}[N(2) - N(1) = 2] = \frac{\mathrm{e}^{-2}2}{1!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-2}2^2}{2!} = \frac{4}{\mathrm{e}^4}$

(iii)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\mathbb{P}[N(1) \geqslant 2 | N(1) \geqslant 1]}{\mathbb{P}[N(1) \geqslant 1]} = \frac{\mathbb{P}[N(1) \geqslant 2]}{\mathbb{P}[N(1) \geqslant 1]} = \frac{1 - \mathbb{P}[N(1) - N(0) \leqslant 1]}{1 - \mathbb{P}[N(1) - N(0) = 0]} \\ &= \frac{1 - \frac{\mathrm{e}^{-2}2^0}{0!} - \frac{\mathrm{e}^{-2}2^1}{1!}}{1 - \frac{\mathrm{e}^{-2}2^0}{0!}} = \frac{1 - 3\mathrm{e}^{-2}}{1 - \mathrm{e}^{-2}} = \frac{\mathrm{e}^2 - 3}{\mathrm{e}^2 - 1} \end{aligned}$$

2.5 证明概率 $P_m(t) = \mathbb{P}[N(t) = m]$ 在命题 2.1 的假定 (1) $\sim$ (4) 下满足微分方程

$$P'_m(t) = -\lambda P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, \cdots,$$

并证明在初始条件下 $P_m(0) = 0, m = 1, 2, \cdots$ 下的解为 $\frac{\lambda^m t^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

4 个假定分别为:

(1) 在不相交区间中事件发生的数目相互独立, 也即对任何整数 $n = 1, 2, \cdots$, 设时刻 $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 增量 $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ 相互独立;

(2) 对任何时刻 t 和正数 h, 随机变量 (增量)$N(t+h) - N(t)$ 的分布只依赖于区间长度 h 而不依赖于时刻 t;

(3) 存在正常数 λ, 当 $h \downarrow 0$ 时, 使在长度为 h 的小区间中事件至少发生一次的概率

$$\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) \geqslant 1] = \lambda h + o(h);$$

(4) 在小区间 $(t, t+h]$ 发生两个或以上事件的概率为 $o(h)$(可以忽略不计), 即当 $h \downarrow 0$,

$$\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) \geqslant 2] = o(h)$$

Solution

$$
\begin{aligned}
P_m(t+h) &= P_m(t)P_0(h) + P_{m-1}(t)P_1(h) + \sum_{i=2}^{m} P_{m-i}(t)P_i(h) \\
&= \frac{\sum_{i=2}^{m} P_{m-i}(t)P_i(h)}{h} \\
&\leq \frac{\sum_{i=2}^{m} P_i(h)}{h} \\
&= \frac{o(h)}{h} = 0 \quad (h \downarrow 0) \\
P_0(h) &= 1 - p(h) = 1 - \lambda h + o(h) \\
P_1(h) &= p(h) = \lambda h - o(h) \\
&\text{代入并令 } h \downarrow 0 \\
P_m(t+h) - P_m(t) &= -\lambda h P_m(t) + \lambda h P_{m-1}(t) + o(h) \\
&\xlongequal{\text{同除以 } h} P_m'(t) = -\lambda P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t) \\
P_0(t) &= C\mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda t}(P_0(0) = 0) = \frac{\lambda^m t^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big|_{t=0} = 0
\end{aligned}
$$

若 $P_{m-1}(t) = \frac{\lambda^{m-1}t^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}$, 令

$$
\begin{aligned}
F(t) &\xlongequal{\text{def}} P_m(t)\mathrm{e}^{\lambda t} \\
F'(t)\mathrm{e}^{-\lambda t} &= \frac{\lambda^{m-1}t^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t} \Rightarrow F'(t) = \frac{\lambda^{m-1}t^{m-1}}{(m-1)!} \Rightarrow F(t) = \frac{\lambda^m t^m}{m} + C \\
P_n(t) &= \frac{(\lambda t)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t} + C\mathrm{e}^{-\lambda t} \\
P_m(t) &\xlongequal{P_m(0)=0 \Rightarrow C=0} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

2.6 一部 600 页的著作总共有 240 个印刷错误, 试利用 Possion 过程近似求出某连续三页无错误的概率.

Solution

设 Poisson 参数为 λ, 有 $600\lambda = 240 \Rightarrow \lambda = 0.4$

$$
\mathbb{P}[N(m+3) - N(m) = 0] = \frac{\mathrm{e}^{-0.4\times 3}(0.4\times 3)^0}{0!} = \frac{1}{\mathrm{e}^{1.2}}
$$

2.7 $N(t)$ 是强度为 λ 的 Possion 过程. 给定 $N(t) = n$, 试求第 r 个事件 ($r \leqslant n$) 发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)$.

Solution 1

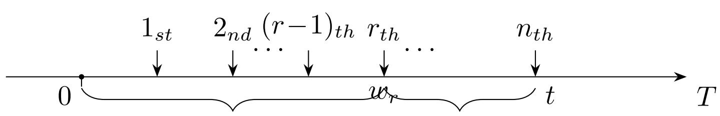
$$
\begin{aligned}
& f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)\cdot\Delta w_r \\
=& \mathbb{P}[N(w_r)-N(0)=r-1, N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1|N(t)=n] \\
=& \mathbb{P}[N(w_r)-N(0)=r-1]\cdot\mathbb{P}[N(w_r+\Delta w_r)-N(w_r)=1] \\
& \cdot\frac{\mathbb{P}[N(t)-N(w_r+\Delta w_r)=n-r]}{\mathbb{P}[N(t)=n]} \\
=& \frac{\frac{(\lambda w_r)^{r-1}}{(r-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda w_r}\cdot[\lambda\Delta w_r+o(\Delta w_r)]\cdot\frac{[\lambda(t-w_r-\Delta w_r)]^{n-r}}{(n-r)!}\mathrm{e}^{-\lambda(t-w_r-\Delta w_r)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{\lambda t}}
\end{aligned}
$$

两边除以 Δw_r 并令 $\Delta w_r\to 0$ 得

$$
f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{(w_r)^{r-1}(t-w_r)^{n-r}}{t^n}
$$

Solution 2

直观理解如下



将之分为三段，然后得到类似多项分布的结论 (分三组乘起来)

$$
f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)=\frac{n!}{(r-1)!\cdot 1\cdot(n-r)!}\left(\frac{w_r}{t}\right)^{r-1}\cdot\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{t-w_r}{t}\right)^{n-r}
$$

Solution 3

比较暴力的方法. 因为泊松分布两次事件之间的时间间隔 $W_{i+1}-W_i=\delta_i$ 遵循指数分布 $\delta_i\sim\mathrm{Exp}\,(\lambda)$, 利用 **1.13** 的结论 $W_r=\sum_{i=1}^r\delta_i\sim\Gamma(r,\lambda)$ 有:

$$
\begin{aligned}
f_{W_r}(w_r) &= \frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda w_r}(\lambda w_r)^{r-1}}{(r-1)!} \\
f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n) &= \frac{f_{W_r}(w_r)\cdot\mathbb{P}(t-w_r\text{ 间到达了 }n-r\text{ 次})}{\mathbb{P}[(N(t)=n]}=\frac{f_{W_r}(w_r)\cdot\mathbb{P}[N(t)-N(w_r)=n-r]}{\mathbb{P}[N(t)=n]} \\
&= \frac{\frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda w_r}(\lambda w_r)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t-w_r)}[\lambda(t-w_r)]^{n-r}}{(n-r)!}}{\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{(w_r)^{r-1}(t-w_r)^{n-r}}{t^n}
\end{aligned}
$$

2.8 令 $\{N_i(t),t\geqslant 0\},i=1,2,\cdots,n$ 为 n 个独立的有相同强度参数 λ 的 Possion 过程. 记 T 为在全部 n 个过程中至少发生了一件事的时刻, 试求 T 的分布.

Solution 1

本题与 1.14 几乎一样，是 Poisson 和 Exp 的一体两面.

记 $N(t)=N_1(t)+\cdots+N_n(t)\Rightarrow N(t)\sim\mathrm{Poi}\,(n\lambda t)$, 其对应首达时 $X\sim\mathrm{Exp}\,(n\lambda)$

$$
\begin{aligned}
F_T(t)=\mathbb{P}[T\leqslant t] &= 1-\mathbb{P}(T<t) \\
&= 1-\mathbb{P}[N_i(t)=0,i=1,2,\cdots,n] \\
&= 1-\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^n
\end{aligned}
$$

$\therefore f_T(t) = F_T'(t) = n\lambda \mathrm{e}^{-n\lambda t}$
即 T 服从参数为 $n\lambda$ 的指数分布.
Solution 2
大差不差,$N(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(t) \sim \mathrm{Poi}\,(n\lambda t)$, 那么

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N(t) \geqslant 1] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[N(t) = k] = 1 - \mathbb{P}[N(t) = 0] \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t} \\
f_T(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{P}[N(t) \geqslant 1] = n\lambda \mathrm{e}^{-n\lambda t}
\end{aligned}$$

2.9 考虑参数为 λ 的 Possion 过程 $N(t)$, 若每一事件独立地以概率 p 被观察到, 并将观察到的过程记为 $N_1(t)$. 试问 $N_1(t)$ 是什么过程? $N(t) - N_1(t)$ 呢? $N_1(t)$ 与 $N(t) - N_1(t)$ 是否独立?

Solution
由题设得

(i) $N_1(0) = 0$

(ii) $\{N_1(t) : t \geqslant 0\}$ 是独立增量过程

从而, 对 $0 \leqslant s < t$,$N_1(t) - N_1(s)$ 服从参数为 $\lambda p(t-s)$ 的 Poisson 分布. 故 $\{N_1(t) : t \geqslant 0\}$ 是参数为 λp 的 Possion 过程.

2.10 到达某加油站的公路上的卡车服从参数为 λ_1 的 Possion 过程 $N_1(t)$, 而到达的小汽车服从参数为 λ_2 的 Possion 过程 $N_2(t)$, 且过程 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立. 试问随机过程 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 是什么过程? 并计算在总车流数 $N(t)$ 中卡车首先到达的概率.

Solution

$$g_N(v) = g_{N_1}(v) \cdot g_{N_2}(v) = \mathrm{e}^{\lambda_1 v(\mathrm{e}^t - 1)}\mathrm{e}^{\lambda_2 v(\mathrm{e}^t - 1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(\mathrm{e}^t-1)}$$

$\therefore N(t)$ 是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Possion 过程
记 W_1, W_2 分别为卡车、小汽车的第一次到达时间, 则 W_1 服从参数为 λ_1 的指数分布, W_1 服从参数为 λ_1 的指数分布.

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}(W_1 < W_2) &= \iint\limits_{0 \leqslant W_1 < W_2 \leqslant +\infty} f_{W_1,W_2}(w_1, w_2)\,\mathrm{d}w_1\,\mathrm{d}w_2 \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}w_1 \int_{w_1}^{+\infty} \lambda_1\lambda_2 \mathrm{e}^{-w_1\lambda_1 - w_2\lambda_2}\,\mathrm{d}w_2 \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}
\end{aligned}$$

或者另一个思路: 卡车的首达时 $T \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda_1)$, 在 $(0, T]$ 之间没有汽车到达

$$\mathbb{P}[T = t, N_2(t) = 0] = (\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\,\mathrm{d}t) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^0}{0!} = \lambda_1 \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathbb{P}(W_1 < W_2) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}[T = t, N_2(t) = 0] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

2.11 冲击模型 (Shock Model) 记 $N(t)$ 为某系统到某时刻 t 受到的冲击次数, 它是参数为 λ 的 Possion 过程. 设第 k 次冲击对系统的损害大小 Y_k 服从参数为 μ 的指数分布, $Y_k, k = 1, 2, \cdots$, 独立同分布. 记 $X(t)$ 为系统所受到的总损害. 当损害超过一定的极限 α 时系统不能运行, 寿命终止, 记 T 为系统寿命. 试求该系统的平均寿命 $\mathbb{E}(T)$, 并对所得结果作出直观解释.

提示：对非负随机变量 $\mathbb{E}(T) = \displaystyle\int_0^{\infty} \mathbb{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$

Solution 1

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}\{X(t) \leqslant \alpha\} &= \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leqslant \alpha\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leqslant \alpha \middle| N(t) = n\right\} \cdot \mathbb{P}\{N(t) = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{n} Y_k \leqslant \alpha \middle| N(t) = n\right\} \cdot \mathbb{P}\{N(t) = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{W_n \leqslant \alpha\} \cdot \mathbb{P}\{N(t) = n\}
\end{aligned}
$$

求和式中当 $n = 0$ 时认为 $\mathbb{P}\{W_n \leqslant \alpha | N(t) = n\} = 1$

$\because Y_k \sim \mathrm{Exp}\,(\mu), \quad \therefore W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \sim \Gamma(n, \mu)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_n \leqslant \alpha) &= \frac{\mu^n}{(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\mu s}\,\mathrm{d}s \quad (n \geqslant 1) \\
\mathbb{P}[N(t) = n] &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \mathbb{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} + \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \mu t)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\mu s}\,\mathrm{d}s
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \mathbb{E}(T) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{\infty} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \int_0^{\alpha} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\mu s}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n \Gamma(n+1)}{n!(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\mu s}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu s)^{n-1} \mathrm{e}^{-\mu s}}{(n-1)!}\right] \mathrm{d}(\mu s) \\
&= \frac{1 + \mu\alpha}{\lambda}
\end{aligned}
$$

从结果看, 若 λ 越大 (系统所受冲击越频繁), μ 越小 (每次冲击所造成的平均损害越大), α 越小 (系统所能承受的的损害极限越小), 则系统平均寿命越短, 且当 α 等于 0 时系统的平均寿命即为第一次冲击到来的平均时间, 符合常识.

Solution 2

$$G_n(\alpha)=\mathbb{P}\{Y_1+\cdots+Y_k\leqslant\alpha\}=\mathbb{P}\{W_n\leqslant\alpha\}=\mathbb{P}\{N_1(\alpha)\geqslant n\}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\mu\alpha)^n}{k!}\mathrm{e}^{-\mu\alpha}$$

其中 $N_1(t)$ 是强度为 μ 的 Possion 过程

$$\begin{aligned}
\therefore \mathbb{P}(T>t)&=\mathbb{P}\{X(t)\leqslant\alpha\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n\mathrm{e}^{-\lambda t}}{n!}G_n(\alpha)\qquad(\text{课本 }\mathbf{P}_{21}\text{ 例 }2.4)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\mu\alpha)^n}{k!}\mathrm{e}^{-\mu\alpha}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu\alpha)^n}{k!}\mathrm{e}^{-\mu\alpha}\sum_{n=0}^{k}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\\
\therefore \mathbb{E}(T)&=\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(T>t)\,\mathrm{d}t\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu\alpha)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu\alpha}\sum_{n=0}^{k}\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu\alpha)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu\alpha}\frac{(k+1)\Gamma(n+1)}{n!\lambda}\\
&=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\mu\alpha)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu\alpha}+\frac{\mu\alpha}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\mu\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\mu\alpha}\\
&=\frac{1+\mu\alpha}{\lambda}
\end{aligned}$$

Solution 3[②]

$$\begin{aligned}
1-F_T(t)=\mathbb{P}(T<t)=\mathbb{P}[X(t)<\alpha]&=\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\le\alpha\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\le\alpha\,\middle|\,N(t)=n\right)\mathbb{P}[N(t)=n]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n}Y_k\le\alpha\right)\mathbb{P}[N(t)=n]
\end{aligned}$$

$Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ i.i.d. 且 $Y_i\sim\operatorname{Exp}(\mu)$. 设 $S_n=\sum_{k=1}^n Y_k$ 由独立同分布的指数分布随机和为参数为 (n,μ) 的 Γ 分布

$$f_{S_n}(s)=\mu\frac{\mathrm{e}^{-\mu s}(\mu s)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\mathbb{P}(S_n\le\alpha)=\int_0^{\alpha}\mu\frac{\mathrm{e}^{-\mu s}(\mu s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}s=\frac{\mu}{(n-1)!}\int_0^{\alpha}\mathrm{e}^{-\mu s}(\mu s)^{n-1}\,\mathrm{d}s$$

②Sol 3 和 Sol 4 都是我写的, 计算结果为 $\frac{\mu\alpha}{\lambda}$. 但实际结果应为 $\frac{1+\mu\alpha}{\lambda}$, 懒得去找漏项了

$$
\begin{aligned}
1-F_T(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \cdot \frac{\mu}{(n-1)!} \int_0^{\alpha} \mathrm{e}^{-\mu s}(\mu s)^{n-1}\,\mathrm{d}s \\
&= \mu \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\alpha} \frac{(\lambda t)^n}{n!(n-1)!} \mathrm{e}^{-\mu s}(\mu s)^{n-1}\,\mathrm{d}s \\
&\xlongequal{\text{交换求和和积分符号}} \mu \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(\mu s)^n \mathrm{e}^{-\mu s}}{n!}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

因为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} = \mathrm{e}^{\lambda t}-1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu s)^n \mathrm{e}^{-\mu s}}{n!} = 1$

所以由Mertens 定理得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(\mu s)^n \mathrm{e}^{-\mu s}}{n!} = (\mathrm{e}^{\lambda t}-1)\cdot 1 = \mathrm{e}^{\lambda t}-1$

$$
\begin{aligned}
1-F_T(t) &= \mu \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^{\alpha} (\mathrm{e}^{\lambda t}-1)\cdot 1\,\mathrm{d}s = \mu\alpha(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}) \\
f_T(t) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-F_T(t)) = \lambda\mu\alpha \mathrm{e}^{-\lambda t} \\
\mathbb{E}(T) &= \int_0^{+\infty} t f_T(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mu\alpha}{\lambda}
\end{aligned}
$$

Solution 4[③]

可以采用不那么暴力的方法，即使用题目里的提示 $\mathbb{E}(T) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T>t)\,\mathrm{d}t$, 先把这个提示证一遍

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T>t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} f_T(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \xlongequal{\text{交换积分次序}} \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_0^{x} f_T(x)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x f_T(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} t f_T(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \mathbb{E}(T)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{P}(T>t) = 1-F_T(t) = \mu \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(\mu s)^n \mathrm{e}^{-\mu s}}{n!}\,\mathrm{d}s
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T>t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu\lambda)^n}{n!(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^{\alpha} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\mu s}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} \int_0^{\alpha} s^{n-1} \mathrm{e}^{-\mu s}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha} \mathrm{e}^{-\mu s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} s^{n-1}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{\mu}{\lambda} \int_0^{\alpha} \mathrm{d}s = \frac{\mu\alpha}{\lambda}
\end{aligned}
$$

2.12 令 $N(t)$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Possion 过程, $X_1, X_2, \cdots$ 为事件间的时间间隔.

(i) X_i 是否独立;

③请查看上页的脚注

(ii) X_i 是否同分布;

(iii) 试求 X_1 与 X_2 的分布.

Solution 1

记 $m(t)=\displaystyle\int_0^t \lambda(u)\,\mathrm{d}u$ 等待时间 W_1, W_2 的联合分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_{W_1,W_2}(t_1,t_2) &= \mathbb{P}(W_1 \leqslant t_1, W_2 \leqslant t_2), \qquad (0 \leqslant t_1 < t_2)\\
&= \mathbb{P}(N(t_1) \geqslant 1, N(t_2) \geqslant 2)\\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}[N(t_1)=\ell, N(t_2)=k]\\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}[N(t_1)=\ell, N(t_2)-N(t_1)=k-\ell]\\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}[N(t_1)=\ell)\mathbb{P}(N(t_2)-N(t_1)=k-\ell]\\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{k} \frac{(m(t_1)^{\ell})}{\ell!}\mathrm{e}^{-m(t_1)} \cdot \frac{[m(t_2)-m(t_1)]^{k-\ell}}{(k-\ell)!}\mathrm{e}^{-[m(t_2)-m(t_1)]}\\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{k} \frac{(m(t_1))^{\ell}[m(t_2)-m(t_1)]^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!}\mathrm{e}^{-m(t_2)}\\
&= \mathrm{e}^{-m(t_2)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}[m(t_1)]^{\ell}[m(t_2)-m(t_1)]^{k-\ell}\\
&= \mathrm{e}^{-m(t_2)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}[m(t_1)]^{\ell}[m(t_2)-m(t_1)]^{k-\ell} - [m(t_2)-m(t_1)]^{k}\right\}\\
&= \mathrm{e}^{-m(t_2)}\left\{\mathrm{e}^{m(t_2)} - \mathrm{e}^{m(t_2)-m(t_1)} - m(t_1)\right\}\\
&= 1-\mathrm{e}^{-m(t_1)} - m(t_1)\mathrm{e}^{-m(t_2)}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore f_{W_1,W_2}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F_{W_1,W_2}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \lambda(t_1)\lambda(t_2)\mathrm{e}^{-m(t_2)}
$$

$$
\because \begin{cases} W_1 = X_1 \\ W_2 = X_1 + X_2 \end{cases}
$$

$\therefore f_{X_2,X_2}(t_1,t_2)=\lambda(t_1)\lambda(t_1+t_2)\mathrm{e}^{-m(t_1+t_2)}$ 不能写为 $g_1(t_1)g_2(t_2)$ 形式

$\therefore X_1, X_2$ 不独立, 又有

$$
f_{X_1}(t_1) = \lambda(t_1)\int_0^{+\infty}\lambda(t_1+t_2)\mathrm{e}^{-m(t_1+t_2)}\,\mathrm{d}t_2 = \lambda(t_1)\left[\mathrm{e}^{-m(t_1)} - \mathrm{e}^{-m(+\infty)}\right] \quad (t_1 > 0)
$$

下面确定 $\mathrm{e}^{-m(\infty)}$:

$$
1 = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t_1)\,\mathrm{d}t_1 = \int_0^{+\infty}\lambda(t_1)\left[\mathrm{e}^{-m(t_1)} - \mathrm{e}^{-m(+\infty)}\right]\mathrm{d}t_1 = 1-[m(+\infty)+1]\mathrm{e}^{-m(+\infty)}
$$

$\therefore \mathrm{e}^{-m(+\infty)} = 0$

$$\therefore f_{X_1}(t_1) = \lambda(t_1)\mathrm{e}^{-m(t_1)} \qquad (t_1 > 0)$$
$$f_{X_2}(t_2) = \int_0^{+\infty} \lambda(t_1)\lambda(t_1+t_2)\mathrm{e}^{-m(t_1+t_2)}\,\mathrm{d}t_1 \qquad (t_2 > 0)$$

$\therefore X_1, X_2$ 不同分布且其概率密度函数如上.

2.13 考虑对所有 t, 强度函数 $\lambda(t)$ 均大于 0 的非齐次 Possion 过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$. 令 $m(t) = \int_0^t \lambda(u)\,\mathrm{d}u, m(t)$ 的反函数为 $\ell(t)$, 记 $N_1(t) = N(\ell(t))$. 试证 $N_1(t)$ 是通常的 Possion 过程, 试求 $N_1(t)$ 的强度参数 λ.

Solution

(i) $N_1(0) = N(\ell(0)) = N(0) = 0$

(ii) $\because m(\ell)$ 单增, $\therefore \ell(t)$ 单增

$\therefore$ 对任意 $0 \leqslant t_1 < t_2 \cdots < t_n$, 有 $0 \leqslant \ell(t_1) < \ell(t_2) < \cdots < \ell(t_n)$, 且有

$$N_1(t_2) - N_1(t_1) = N(\ell(t_2)) - N(\ell(t_1))$$
$$N_1(t_3) - N_1(t_2) = N(\ell(t_3)) - N(\ell(t_2))$$
$$\vdots$$
$$N_1(t_n) - N_1(t_{n-1}) = N(\ell(t_n)) - N(\ell(t_{n-1}))$$

$\because N(t)$ 是独立增量过程 $\quad \therefore N_1(t)$ 也是独立增量过程

(iii) $\forall\, 0 \leqslant s < t$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1(t) - N_1(s) = k) &= \mathbb{P}\{N(\ell(t)) - N(\ell(s)) = k\} \\ &= \frac{[m(\ell(t)) - m(\ell(s))]^k}{k!}\mathrm{e}^{-[m(\ell(t)) - m(\ell(s))]} \\ &= \frac{(t-s)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(t-s)} \qquad (k = 0, 1, \cdots)\end{aligned}$$

$\therefore N_1(t)$ 是强度为 1 的 Possion 过程

2.14 设 $N(t)$ 为更新过程, 试判断下述命题的真伪：

(i) $\{N(t) < k\} \Longleftrightarrow \{W_k > t\}$;

(ii) $\{N(t) \leqslant k\} \Longleftrightarrow \{W_k \geqslant t\}$;

(iii) $\{N(t) > k\} \Longleftrightarrow \{W_k < t\}$;

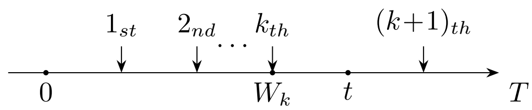
其中 W_k 为第 k 个事件的等待时间.

Solution

(i) $\{N(t) < k\} = \overline{\{N(t) \geqslant k\}} = \overline{\{W_k \leqslant t\}} = \{W_k > t\}$

(ii)

$$\begin{aligned}\{N(t) \leqslant k\} &= \{N(t) < k+1\} = \overline{\{N(t) \geqslant k+1\}} = \overline{\{W_{k+1} \leqslant t\}} \\ &= \{W_{k+1} > t\} \neq \{W_k \geqslant t\}\end{aligned}$$



$N(t) = k$ 但 $W_k < t$

$W_k < t$ 但 $N(t) = k$

故 $\{N(t) \leqslant k\} \not\Rightarrow \{W_k \leq t\}$

(iii) $\{N(t) > k\} = \{N(t) \geqslant k+1\} = \{W_{k+1} \leqslant t\} \neq \{W_k < t\}$
同样参照上图,$\{W_k < t\} \not\Rightarrow \{N(t) > k\}$

3 第三章 Markov 过程

3.1 对 Markov 链 $X_n, n \geqslant 0$, 试证条件

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=\mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_n=i)$$

等价于对所有时刻 n,m 及所有状态 $i_0,\dots,i_n,j_1,\dots,j_m$ 有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1}=j_1,\dots,X_{n+m}=j_m|X_0=i_0,\dots,X_n=i_n)\\=&\mathbb{P}(X_{n+1}=j_1,\dots,X_{n+m}=j_m|X_n=i_n)\end{aligned}$$

Solution

$\Leftarrow$ 只需令 $m=1$

$\Rightarrow$ 由 $\mathbf{P}_{27}(3.4)$ 可知

$$\begin{aligned}&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}\\=&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m,X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}/P\{X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}\\=&P\{X_0=i_0\}\cdot P_{j_1j_2}\cdots P_{j_{m-1}j_m}P_{i_0i_1}\cdots P_{i_1j_1}/[P\{X_0=i_0\}\cdot P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}\\=&P\{X_n=i\}\cdot P_{j_1j_2}\cdots P_{j_{m-1}j_m}P_{i_nj_1}/P\{X_n=i_n\}\\=&P\{X_{n+1}=j_1,\cdots,X_{n+m}=j_m|X_n=i_n\}\end{aligned}$$

3.2 考虑状态 $0,1,2$ 上的一个 Markov 链 $X_n, n\geqslant 0$, 它有转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.1&0.2&0.7\\0.9&0.1&0\\0.1&0.8&0.1\end{pmatrix}$$

初始分布为 $p_0=0.3,p_1=0.4,p_2=0.3$, 试求概率 $P\{X_0=0,X_1=1,X_2=2\}$.

Solution

$$\mathbb{P}\{X_0=0,X_1=1,X_2=2\}=p_0P_{01}P_{12}=0.3\times 0.1\times 0=0$$

3.3 信号传送问题. 信号只有 $0,1$ 两种, 分为多个阶段传输. 在每一步上出错的概率为 α. $X_0=0$ 是送出的信号, 而 X_n 是在第 n 步接收到的信号. 假定 X_n 为一 Markov 链, 它有转移概率矩阵 $P_{00}=P_{11}=1-\alpha$, $P_{01}=P_{10}=\alpha$, $0<\alpha<1$. 试求

(a) 两步均不出错的概率 $\mathbb{P}\{X_0=0,X_1=0,X_2=0\}$;

(b) 两步传送后收到正确信号的概率;

(c) 五步之后传送无误的概率 $\mathbb{P}\{X_5=0|X_0=0\}$.

Solution

(a) $\mathbb{P}\{X_0=0,X_1=0,X_2=0\}=p_0P_{00}P_{00}=1\cdot(1-\alpha)\cdot(1-\alpha)=(1-\alpha)^2$

(b) $P=p_0P_{00}P_{00}+p_0P_{01}P_{10}=(1-\alpha)^2+\alpha^2=2\alpha^2-2\alpha+1$

(c) 转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore \boldsymbol{P}^{(5)}&=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-2\alpha)^5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{1+(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2}\\ \frac{1-(1-2\alpha)^5}{2} & \frac{1+(1-2\alpha)^5}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\therefore \mathbb{P}\{X_5=0|X_0=0\}=p_0\cdot\frac{1+(1-2\alpha)^5}{2}=\frac{1+(1-2\alpha)^5}{2}$

或者直接

$$\mathbb{P}\{X_5=0|X_0=0\}=(1-\alpha)^5+\binom{5}{2}(1-\alpha)^3\alpha^2+\binom{5}{4}(1-\alpha)\alpha^4$$

3.4 A,B 两罐总共装着 N 个球. 作如下实验：在时刻 n 先 N 个球中等概率地任取一球. 然后从 A,B 两罐中任选一个, 选中 A 的概率为 p, 选中 B 的概率为 q. 之后再将选出的球放入选好的罐中. 设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数. 试求此 Markov 过程的转移概率矩阵.

Solution

$$P_{ij}=\begin{cases}p\cdot\frac{i}{N}+q\cdot\frac{N-i}{N} & ,j=i\\ q\cdot\frac{i}{N} & ,j=i-1(i=1,2,\cdots,N)\\ p\cdot\frac{N-i}{N} & ,j=i+1(i=0,1,\cdots,N-1)\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{N}\begin{pmatrix}qN & pN & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ q & q(N-1)+p & p(N-1) & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2q & q(N-2)+2p & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2q+p(N-2) & 2p & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q(N-1) & q+p(N-1) & p\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & qN & pN\end{pmatrix}$$

3.5 重复掷币一直到连续出现两次正面为止. 假定钱币是均匀的, 试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链, 并求出平均需要掷多少次试验才可以结束.

Solution 1

记 X_n 为第 n 次掷币后连续出现的正面次数, 则 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为一 M.C.

其转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$$
\begin{aligned}
\therefore \mathbb{E}(T|X_0=0) &= \sum_{k=0}^{1} \mathbb{E}(T|X_0=0, X_1=k) \cdot \mathbb{P}(X_1=k|X_0=0) \\
&= \sum_{k=0}^{1} \mathbb{E}(T|X_1=k) \cdot \mathbb{P}(X_1=k|X_0=0) \\
&= (1+v) \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{E}(T|X_1=1) \cdot \frac{1}{2} \\
\mathbb{E}(T|X_1=1) &= \sum_{k=0}^{2} \mathbb{E}(T|X_1=1, X_2=k) \cdot \mathbb{P}(X_2=k|X_1=1) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \mathbb{E}(T|X_2=k) \cdot \mathbb{P}(X_2=k|X_1=1) \\
&= (2+v) \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \times 2
\end{aligned}
$$

解得 $\mathbb{E}(T|X_0=0)=6$, 平均需掷 6 次.

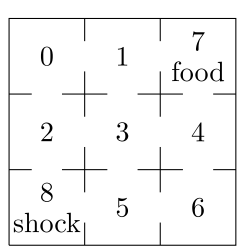
Solution 2

由转移概率矩阵, 有 $P_{00}=\frac{1}{2}, P_{01}=\frac{1}{2}, P_{10}=\frac{1}{2}, P_{12}=\frac{1}{2}$, 则

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{00}^{k} (P_{01}P_{10})^{n-k} [k+2(n-k)+2] \cdot P_{01}P_{12} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} [k+2(n-k)+2] \\
&= \frac{1}{4} \times 24 = 6
\end{aligned}
$$

没想到吧, 这还能暴力解. 不过结果是 Mathematica 算的（doge)

3.6 迷宫问题. 将小家鼠放入迷宫内作动物的学习试验, 如下图所示. 在迷宫的第 7 号小格内放有美味食物而第 8 号小格内则是电击捕鼠装置. 假定当家鼠位于某格时有 k 个出口可以离去, 则它总是随机地选择一个, 概率为 $1/k$. 并假定每一次家鼠只能跑到相邻的小格去. 令过程 X_n 为家鼠在时刻 n 时所在小格的号码, 试写出这一 Markov 过程的转移概率阵, 并求出家鼠在遭到电击前能找到食物的概率.



Solution

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

设 u_k 为家鼠从 k 出发在遭到电击前能找到食物的概率, 显然 $u_7 = 1, u_8 = 0$
设 T 为进入吸收态时刻, 则当 $0 \leqslant k \leqslant 6$ 时,

$$\begin{aligned} u_k &= \mathbb{P}\{X_T = 7 | X_0 = k\} \\ &= \sum_{i=0}^{8} \mathbb{P}\{X_T = 7, X_1 = i | X_0 = k\} \\ &= \sum_{i=0}^{8} \mathbb{P}\{X_T = 7, X_1 = i\} \mathbb{P}\{X_1 = i | X_0 = k\} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ u_1 = \frac{1}{3}(u_0 + u_3 + u_7) \\ u_2 = \frac{1}{3}(u_0 + u_3 + u_8) \\ u_3 = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_4 + u_5) \\ u_4 = \frac{1}{3}(u_3 + u_6 + u_7) \\ u_5 = \frac{1}{3}(u_3 + u_6 + u_8) \\ u_6 = \frac{1}{2}(u_4 + u_5) \\ u_7 = 1 \\ u_8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{2}{3} \\ u_2 = \frac{1}{3} \\ u_3 = \frac{1}{2} \\ u_4 = \frac{2}{3} \\ u_5 = \frac{1}{3} \\ u_6 = \frac{1}{2} \\ u_7 = 1 \\ u_8 = 0 \end{cases}$$

3.7 记 $Z_i, i = 1, 2, \cdots$ 为一串独立同分布的离散随机变量.$\mathbb{P}\{Z_i = k\} = p_k \geqslant 0, k = 0, 1, 2, \cdots$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. 记 $X_n = Z_n, n = 1, 2, \cdots$. 试求过程 X_n 的转移概率矩阵.

Solution

$\because \mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$
$\mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1}\}$
$\therefore \mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\}$

$\therefore \{X_n\}$ 是一 M.C., 其转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.8 对第 7 题中的 Z_i, 令 $X_n=\max\{Z_1,\cdots,Z_n\}, n=1,2,\cdots$, 并约定 $X_0=0$. X_n 是否为 Markov 链? 如果是, 其转移概率阵是什么?

Solution

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \max\{Z_1,\cdots,Z_n,Z_{n+1}\} \\ &= \max\{\max\{Z_1,\cdots,Z_n\},Z_{n+1}\} \\ &= \max\{X_n,Z_{n+1}\} \end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$ 是 M.C.

$$P_{ij}=\begin{cases} 0 & ,j<i \\ p_j & ,j>i \\ \sum\limits_{k=0}^{i} p_k & ,j=i \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

其转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0+p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0+p_1+p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3.9 设 $f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发在 n 步转移时首次到达 j 的概率, 试证明

$$P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}.$$

Solution 1

设 $T_j=\min\{n:n\geqslant 0 \text{ 且 } X_n=j\}$

$$\begin{aligned}
\therefore P_{ij}^{(n)}=\mathbb{P}\{X_n=j|X_0=i\}&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\{X_n=j,T_j=k|X_0=i\}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\{T_j=k|X_0=i\}P_{jj}^{(n-k)}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\{X_k=j,X_s\neq j(s=0,1,\cdots,k-1)|X_0=i\}P_{jj}^{(n-k)}\\
&=\sum_{k=0}^{n}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}
\end{aligned}$$

Solution 2(郑老师解法)

$$\begin{aligned}
&P_{ij}^{(n)}=\mathbb{P}\{X_n=j|X_0=i\}\\
=&\mathbb{P}\{\underbrace{X_n=j}_{C},\underbrace{X_1=j}_{B}|\underbrace{X_0=i}_{A}\}+\mathbb{P}\{X_n=j,X_1\neq j|X_0=i\}\ \underline{\underline{\mathbb{P}(BC|A)=\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|AB)}}\\
=&\mathbb{P}\{X_n=j|X_0=i,X_1=j\}P_{ij}+\mathbb{P}\{X_n=j,X_1\neq j|X_0=i\}\\
=&f_{ij}^{(1)}P_{jj}^{(n-1)}+\mathbb{P}\{X_n=j,X_1\neq j|X_0=i\}\\
=&f_{ij}^{(1)}P_{jj}^{(n-1)}+\mathbb{P}\{\underbrace{X_n=i}_{C},\underbrace{X_2=j,X_1\neq j}_{B}|\underbrace{X_0=i}_{A}\}+\mathbb{P}\{X_n=j,X_2\neq j,X_1\neq j|X_0=i\}\\
=&f_{ij}^{(1)}P_{jj}^{(n-1)}+\mathbb{P}\{X_2=j,X_1\neq j|X_0=i\}\mathbb{P}\{X_n=j|X_0=i,X_1\neq j,X_2=j\}\\
&+\mathbb{P}\{X_n=j,X_2\neq j,X_1\neq j|X_0=i\}\\
=&f_{ij}^{(1)}P_{jj}^{(n-1)}+f_{ij}^{(2)}P_{jj}^{(n-2)}+\mathbb{P}\{X_n=j,X_2\neq j,X_1\neq j|X_0=i\}=\cdots\\
=&\sum_{k=1}^{n-1}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}+\mathbb{P}\{X_n=j,X_k\neq j,k=1,2,\ldots,n-1|X_0=i\}\\
=&\sum_{k=1}^{n-1}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}+f_{ij}^{(n)}P_{jj}^{(0)}\\
=&\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}P_{jj}^{(n-k)}
\end{aligned}$$

3.10 对第 7 题中的 Z_i, 若定义 $X_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i, n=1,2,\cdots,X_0=0$, 试证 X_n 为 Markov 链. 并求其转移概率矩阵.

Solution

对 $n\geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}\qquad(i_0=0)\\
=&\mathbb{P}\{Z_{n+1}=i_{n+1}-i_n|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n\}\\
=&\mathbb{P}\{Z_{n+1}=i_{n+1}-i_n\}\\
=&\begin{cases}P_{i_{n+1}-i_n} & ,i_{n+1}-i_n=0,1,2,\cdots\\ 0 & ,ow\end{cases}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\{X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}\\
=&\mathbb{P}\{X_n+Z_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n\}\\
=&\mathbb{P}\{Z_{n+1}=i_{n+1}-i_n\}
\end{aligned}
$$

$\therefore X_n$ 是 M.C.

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
$$

3.11 一 Markov 链有状态 $0,1,2,3$ 和转移概率矩阵

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

试求 $f_{00}^{(n)}, n=1,2,3,4,5,\cdots$, 其中 $f_{00}^{(n)}$ 由

$$
\mathbb{P}\{X_n=i, X_k\neq i, k=1,\cdots,n-1|X_0=i\}
$$

定义.

Solution

$f_{00}^{(1)}=P_{00}=0,\quad f_{00}^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T=\frac{1}{4}$

对 $n\geqslant 2$ 有

$$
f_{00}^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

当 $n=3$ 时, $f_{00}^{(3)}=\frac{1}{8}$

当 $n\geqslant 4$ 时,

$$
f_{00}^{(n)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+2}}
$$

3.12 在成败型的重复试验中, 每次试验结果为成功 (S) 或失败 (F). 同一结果相继出现称为一个游程 (run), 比如一结果 $FSSFFFSF$ 中共有两个成功游程, 三个失败游程. 设成功概率为 p, 失败概率为 $q=1-p$. 记 X_n 为第 n 次试验后成功游程的长度 (若第 n 次试验, 则 $X_n=0$). 试证 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 为一 Markov 链, 并确定其转移概率阵. 记 T 为返回状态 0 的时间, 试求 T 的分布及均值. 并由此对这一 Markov 链的状态进行分类.

Solution

$X_{n+1} = \begin{cases} X_{n+1} & ,\text{第 } n+1 \text{ 次试验成功} \\ 0 & ,\text{第 } n+1 \text{ 次试验失败} \end{cases} \Rightarrow \{X_n\}$是 M.C.. $\mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_n=i) = \begin{cases} p, j=i+1 \\ q, j=0 \end{cases}$

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

$T = \min\{n : X_n = 0, X_s \neq 0 \quad (s=1,2,\cdots,n-1)\}$

$\mathbb{P}(T=k) = p^{k-1}q \qquad (k=1,2,\cdots)$

$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}qk \quad \therefore p\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} p^k qk$

$\therefore (1-p)\mathbb{E}(T) = q\mathbb{E}(T) = q + pq + p^2q + \cdots = \frac{q}{1-p} = 1$

$\therefore \mathbb{E}(T) = \frac{1}{q} = \frac{1}{1-p} = \mu_0$, 故所有状态互通, 为一类

又 $\sum_{k=1}^{\infty} f_{00}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}q = 1 = f_{00}$, 故 0 为常返，且为正常返 ($\mu_0 = \frac{1}{1-p}$). 故本 M.C. 为不可约遍历的.

(或者由 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}$ 及 $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ 解出其平稳分布为: $\pi = \{\pi_n, n \geqslant 0\} = \{q, pq, pq^2, \cdots, p^n q, \cdots\}$) 由此判断 M.C. 为正常返

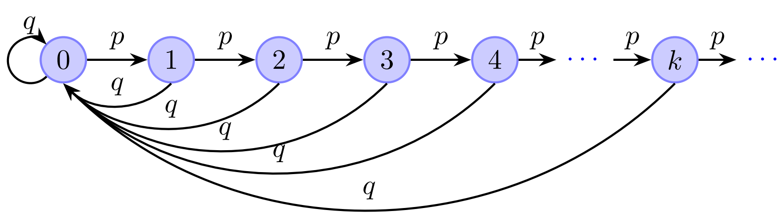


图 1: 3.12 图解

3.13 试证各方向游动的概率相等的对称随机游动在二维时是常返的, 而在三维时却是瞬过的.
(此处答案仅给出二维情况，三维情况不是作业要求 (逃))

Solution 1(jkadbear 及郑老师解法)

设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为二维对称随机游动, 其状态空间为二维实平面上所有的整数点 (格点), 易知该 M.C. 为

不可约的, 故仅需考虑状态 0(原点 $(0,0)$) 的常返性, 且仅需考虑 $P_{00}^{(2n)}$.

$$\begin{aligned}
P_{00}^{(2n)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2 \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}_{=\binom{2n}{n}} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^2 \xrightarrow{\text{Stirling}} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \left[\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2\pi}}{n^{2n+1}\mathrm{e}^{-2n}2\pi}\right]^2 \\
&= \frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(n)}$ 发散, 从而该 M.C. 为常返的. 进一步可以证明 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为零常返的, 且周期为 2

Solution 2

前面大差不差.

$$\begin{aligned}
P_{ii}^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k,k,n-k,n-k}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}\frac{1}{2^{4n}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(n+1)\cdots(2n)}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^{4n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(\frac{n+1}{2})(\frac{n+2}{2})\cdots n}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{2^{3n}} \\
&> \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{2^{3n}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2\cdot\frac{1}{2^{3n}} > \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^{3n}} > \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{2^{n}} = 1
\end{aligned}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} > \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty \Rightarrow i$ 为常返的, 又因为二维随机游动任意状态互达, 故该 Markov 链常返

3.14 某厂对该厂生产的同类产品的三种型号调查顾客的消费习惯. 并把它们归结为 Markov 链模型. 记顾客消费习惯在 A, B, C 三种型号间的转移概率矩阵分别为下列四种. 请依这些转移阵所提供的信息对厂家提出关于 A, B 两种型号的咨询意见.

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad (4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution

(1) (a) 不是概率转移矩阵, 第三行行和不为 1.

(b) 郑老师的作业题将此图改为 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相应的解答为:A,B,C 三个状态均为常返, 且均为吸收态, 但相互之间不可达. 说明三种产品都比较好, 顾客流都很稳定, 但 A 与 B 谁更好一些无法比较;

(2)

$$\boldsymbol{P}^2=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$\therefore A,B,C$ 三状态互通, 所有状态可遍历.

设 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_A,\pi_B,\pi_C)$ 为经过长时间后三个产品的市场占有额, 则

$$\begin{cases}(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\\\pi_A+\pi_B+\pi_C=1\end{cases}\Rightarrow \pi_A=\pi_B=\pi_C=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ 三个品牌竞争力差不多, 可以都生产. 但从转移概率矩阵来看,A,B 都有需要改进之处

(3) 由归纳法可知

$$\boldsymbol{P}^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)&\frac{1}{3^n}&\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

可见

$$\pi_B=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0,$$

$$\begin{cases}(\pi_A,\pi_C)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=(\pi_A,\pi_C)\\\pi_A+\pi_C=1\end{cases}\Rightarrow \pi_A=\pi_C=\frac{1}{2}$$

$\therefore B$ 将逐渐淡出市场, 建议停止生产 B, 扩大对 A 的生产.A,C 常返,B 瞬过.A,B 比较, 顾客更倾向于消费 A, 且从长远观点看, 顾客消费 B 的可能性将趋于零, 市场将由 A,C 二分天下.

(4) $\therefore A,B,C$ 三状态互通, 所有状态可遍历.

$$\begin{cases}(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=(\pi_A,\pi_B,\pi_C)\\\pi_A+\pi_B+\pi_C=1\end{cases}\Rightarrow \pi_A=\pi_B=\pi_C=\frac{1}{3}$$

$\therefore A,B,C$ 市场占有率相同, 可维持现状. 与 (2) 同

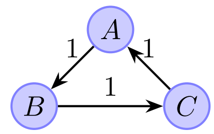


图 2: 3.14(4) 图解

3.15 考虑一有限状态的 Markov 链. 试证明

(a) 至少有一个状态是常返的

(b) 任何常返状态必定是正常返的.

Solution 1

(a) 反设所有状态均为瞬过或零常返 (加强结论), 则对 $\forall i \in S$, 有

$$\lim_{n\to+\infty} P_{ii}^{(n)} = 0 \tag{1}$$

考虑 $P_{ij}^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$, 则有

$$\sum_{k=1}^{\ell} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \leqslant P_{ij}^{(n)} \leqslant \sum_{k=1}^{\ell} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=l}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \tag{2}$$

固定 ℓ, 令 $n \to +\infty$, 则由 (1) 得

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)} \leqslant 0 + \sum_{k=\ell}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} \tag{3}$$

在 (3) 中令 $\ell \to +\infty$, 由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \leqslant 1$ 收敛

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)} = 0 \tag{4}$$

若此有限状态 M.C. 有 N 个状态, 则

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^{(n)} = 1 \tag{5}$$

(5) 中令 $n \to +\infty$, 由 (4) 得 $0 = 1$, 矛盾 $\Rightarrow$ 至少有一个状态是 (正) 常返的

(b) 若存在零常返状态 i, 可构造 $C(i) = \{j | i \leftrightarrow j\}$, 则 $C(i)$ 为原 M.C. 的一不可约子 M.C.(有限状态), 于是 $C(i)$ 中所有状态均为零常返, 与有限状态 M.C. 至少有一个正常返状态矛盾,
$\therefore$ 任何常返状态均为正常返

Solution 2(郑老师解法)

(a) 设 M.C. 的状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots,N\}$.(反证法) 若命题为真, 则 M.C. 的所有状态为瞬过的. 从而对 $\forall i,j\in S$ 有 $\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=0$, 但另一方面又有:

$$\sum_{j=0}^{N}P_{ij}^{(n)}=1 \qquad (\forall i\in S, n\in\mathbb{N})$$

两边取极限得到

$$1=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{N}P_{ij}^{(n)}=\sum_{j=0}^{N}\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=\sum_{j=0}^{N}0=0$$

矛盾. 从而 (a) 得证

(b) (反证法) 若命题不真, 则 M.C. 至少存在一个零常返状态. 设 $S_1\subseteq S$ 为全体零常返状态构成的子集, 易证 S_1 为闭集. 为叙述方便, 无妨设 $S_1=\{0,1,2,\cdots,M\}\quad(M\leqslant N)$. 则原 M.C. 限制在 S_1 上仍为一 M.C., 从而有:

$$\sum_{j\in S_1}P_{ij}[w(n)]=\sum_{j=0}^{M}P_{ij}^{(n)}=1 \qquad (\forall i\in S_1, n\in\mathbb{N}) \tag{6}$$

另一方面, 由类似于 (a) 的理由可知, 对于 $\forall i,j\in S_1$, 有 $\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=0$, 从而对 (6) 式两边取极限得到:

$$0=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

矛盾. 从而该 M.C. 不可能存在零常返状态. 即 (b) 得证.

3.16 考虑一生长与灾害模型. 这类 Markov 链有状态 $0,1,2,\cdots$, 当过程处于状态 i 时它既可能以概率 p_i 转移到 $i+1$(生长) 也能以概率 $q_i=1-p_i$ 落回到状态 0(灾害). 而从状态“0”又必然“无中”生有. 即 $P_{01}\equiv 1$.

(a) 试证所有状态为常返的条件是

$$\lim_{n\to\infty}(p_1p_2p_3\cdots p_n)=0.$$

(b) 若此链为常返, 试求其为零常返的条件.

Solution 1

(a) 其概率转移阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

易知此 M.C. 不可约, $\therefore$ 只需证状态 0 常返 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} p_1p_2\cdots p_n = 0$

显然 $f_{00}^{(0)} = f_{00}^{(1)} = 0, f_{00}^{(2)} = q_1$

$$
\begin{aligned}
f_{00}^{(n)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{n-2}\boldsymbol{C}^T, \quad (n \geqslant 3)
\end{aligned}
$$

易知

$$
\boldsymbol{B}^{n-2} = \begin{pmatrix} \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{n-2\text{个}} & p_1\cdots p_{n-2} & 0 & \cdots \\ \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{n-2\text{个}} & 0 & p_2\cdots p_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore f_{00}^{(n)} &= (\overbrace{0 \cdots 0}^{n-2\text{个}}\, p_1\cdots p_{n-2}\, 0\, 0 \cdots)(q_1\, q_2 \cdots)^T = p_1\cdots p_{n-2}q_{n-1} \\
\therefore f_{00} &= q_1 + \sum_{n=3}^{+\infty} p_1\cdots p_{n-2}q_{n-1} \\
&= 1 - p_1 + \sum_{n=3}^{+\infty}(p_1\cdots p_{n-2} - p_1\cdots p_{n-2}p_{n-1}) \\
&= 1 - \lim_{n\to+\infty} p_1p_2\cdots p_n
\end{aligned}
$$

而状态 0 常返 $\Leftrightarrow f_{00} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} p_1p_2\cdots p_n = 0.$

(b) 只需考虑状态 0,

$$
\begin{aligned}
\mu_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} n f_{00}^{(n)} \\
&= 2(1-p_1) + \sum_{n=3}^{+\infty} n(p_1\cdots p_{n-2} - p_1\cdots p_{n-1}) \\
&= 2 + p_1 + p_1p_2 + p_1p_2p_3 + \cdots
\end{aligned}
$$

若为零常返, 则 $\mu_0 = +\infty \Leftrightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_1\cdots p_n$ 发散 (且通项趋于 0)

Solution 2(郑老师解法)

该 M.C. 的状态转移图可画出:

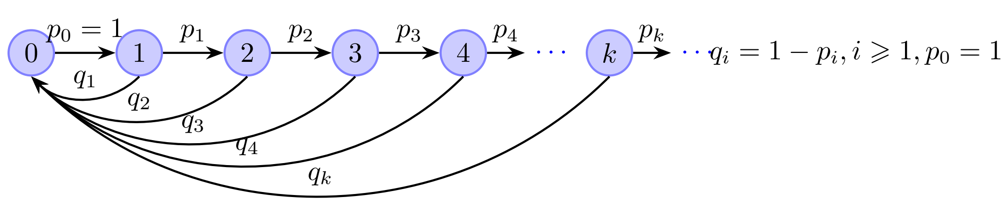


图 3: 3.16 图解

(a) 由上图易知 M.C. 为不可约, 非周期的. 又:

$$f_{00}^{(1)} = 0, f_{00}^{(2)} = q_1 = 1 - p_1, f_{00}^{(3)} = p_1(1-p_2), \cdots, f_{00}^{(n)} = p_1 p_2 \cdots p_{n-2}(1-p_{n-1})$$

从而

$$f_{00}^{(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} p_1 p_2 \cdots p_{n-2}(1-p_{n-1} = \lim_{n\to\infty}(1 - p_1 p_2 \cdots p_n))$$

故 0 及所有状态为常返 $\iff \lim_{n\to\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = 0$

(b) 求解线性方程组 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}$, $\quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ 解得:

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_0 \\ \pi_2 = p_1 \pi_0 \\ \quad \vdots \\ \pi_n = p_1 p_2 \cdots p_{n-1} \pi_0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{2 + \sum_{n=1}^{\infty} p_1 p_2 \cdots p_n} \quad \text{故:}$$

- 当 $\sum_{n=1}^{\infty} p_1 p_2 \cdots p_n < +\infty$ 时, 平稳分布 $\boldsymbol{\pi}$ 存在, 此时 M.C. 为正常返, 亦即为不可约遍历.
- 当 $\sum_{n=1}^{\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = +\infty$ 但 $\lim_{n\to\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = 0$ 时, 正常返
- 当 $\lim_{n\to\infty} p_1 p_2 \cdots p_n = p > 0$ 时,M.C. 为瞬过的.

亦可直接计算 $\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} n p_1 p_2 \cdots p_{n-2}(1-p_{n-1}) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} p_1 p_2 \cdots p_n$, 从而得出同上的结论

3.17 试计算转移概率阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

的极限分布.

Solution

设 $\boldsymbol{\pi}$ 为该 M.C. 的平稳分布, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$

$$\begin{cases} \pi \geqslant 0 \\ \sum_{i=0}^{2} \pi_i = 1 \\ \boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi} \end{cases} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\pi} = \left(\frac{5}{14}, \frac{6}{14}, \frac{3}{14}\right)$$

易知该 M.C. 不可约且遍历 $\quad \therefore$ 极限分布为 $\begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{6}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$

3.18 假定在逐日的天气变化模型中，每天的阴晴与前两天的状况关系很大．于是可考虑 4 状态的 Markov 链：接连两晴天，一晴一阴，一阴一晴，以及接连两阴天，分别记为 $(S,S),(S,C),(C,S),(C,C)$. 该链的转移概率阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ (S,S) \\ (S,C) \\ (C,S) \\ (C,C) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (S,S) & (S,C) & (C,S) & (C,C) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

试求这一 Markov 链的平稳分布．并求出长期平均的晴朗天数.

Solution

设其平稳分布为 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$

$$\begin{cases} \pi \geqslant 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{3} \pi_i = 1 \\ \boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\pi} = \left(\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{6}{11}\right)$$

$\boldsymbol{\pi}$ 反映了 M.C. 中各状态在长期中所占的平均比例

$\therefore$ 一年中晴朗的天数 $= \frac{365}{2} \times \left(\frac{3}{11} \times 2 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11}\right) = 365 \times \frac{4}{11} = 132.7$(天)

3.19 某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返. 如某天他在家时 (办公室时) 下雨了而且家中 (办公室) 有伞他就带一把伞去上班 (回家), 不下雨时他从不带伞. 如果每天与以往独立地早上 (或晚上) 下雨的概率为 p, 试定义一 $M+1$ 状态的 Markov 链以研究他被雨淋湿的机会.

Solution

定义 X_n：第 n 天早晨家中雨伞数, $\therefore \{X_n, n \geqslant 0\}$ 为一 M.C., 令 $q = 1-p$, 可得转移概率矩阵为:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ M-1 \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & M-2 & M-1 & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} q & p & 0 & & & & \\ pq & p^2+q^2 & pq & & & & \\ 0 & pq & p^2+q^2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & pq & p^2+q^2 & pq \\ & & & & 0 & pq & p^2+q \end{pmatrix} \end{array}$$

由状态转移图易知 M.C. 为不可约遍历的, 求其平稳分布 (极限分布) 为: 设 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_M)$ 为其平稳分布

$$\begin{cases} \pi_i \geqslant 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{M} \pi_i = 1 \\ \boldsymbol{\pi P} = \boldsymbol{\pi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \dfrac{1-p}{M+1-p} \\ \pi_i = \dfrac{1}{M+1-p} \quad (i = 1, 2, \cdots, M) \end{cases}$$

易知此 M.C. 遍历,

$\therefore \pi$ 又是其极限分布, 其被雨淋湿的概率为

$$P_{淋} = p\pi_0 + p(1-p)\pi_M = 2p\frac{1-p}{M+1-p}$$

下面几道题涉及分支过程, 这部分没讲, 故都没写. 直接搬运刘杰班助教的习题解答 [3].

3.20 血液培养在时刻 0 从一个红细胞开始, 一分钟之后红细胞死亡可能出现下面几种情况: 以 1/4 再生 2 个红细胞, 以 1/2 的概率再生 1 个红细胞和 1 个白细胞, 也有 1/4 的概率产生 2 个白细胞. 再过一分钟后每个红细胞以同样的规律再生下一代而白细胞则不再生. 并假定每个细胞的行为是独立的.

(a) 从培养开始 $n+1$ 分钟不出现白细胞的概率是多少?

(b) 整个培养过程停止的概率是多少?

Solution

(a) $p = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdots \left(\frac{1}{4}\right)^{2^n} \left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n+1}-1}$

- 时刻 0 1 ... n
- 个数 1 2 ... 2^n

(b) 法一:

$$\Phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \frac{1}{4}s^0 + \frac{1}{2}s^1 + \frac{1}{4}s^2$$

$$\Phi(s) = s \quad \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow s = 1 \Rightarrow P_{消亡} = 1$$

法二:

$$\mathbb{E}(Z_1) = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 = \mu \Rightarrow P_{消亡} = 1$$

3.21 分支过程中一个体产生后代的分布为 $p_0 = q, p_1 = p \quad (p+q=1)$, 试求第 n 代总体的均值和方差及群体消亡的概率. 如产生后代的分布为 $p_0 = 1/8, p_1 = 1/2, p_2 = 1/4, p_3 = 1/8$, 试回答同样的问题.

Solution

(i) $p_0 = q, p_1 = p$

Z_1 为第 1 代第 1 个个体的后代,$\mathbb{P}(Z_1 = k) = p_k, \mathbb{E}(Z_1) = \mu, \mathrm{Var}(Z_1) = \sigma^2$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mu^{n+1}$$

$$\mathrm{Var}(X_{n+1}) = \begin{cases} \sigma^2\mu^n\frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu}, & \mu \neq 1 \\ (n+1)\sigma^2, & \mu = 1 \end{cases}$$

故 $\mu=\mathbb{E}(Z_1)=p\Rightarrow\mathbb{E}(X_n)=p^n$

$\mathrm{Var}(Z_1)=pq=\sigma^2\Rightarrow\mathrm{Var}(X_n)=\begin{cases}pq\cdot p^{n-1}\cdot\frac{1-p^n}{1-p}=p^n(1-p^n), & p\neq 1\\ 0, & p=1\end{cases}$ $\Phi(s)=p_{01}p_1s\Rightarrow$

$\Phi(s)=s\Rightarrow 1-p=(1-p)s$

$p\neq 1\Rightarrow\pi=1\quad p=1,X_n=1,\pi=0$

(ii) $p_0=\frac{1}{8},p_1=\frac{1}{2},p_2=\frac{1}{4},p_3=\frac{1}{8}\Rightarrow\mathbb{E}(Z_1)=\frac{11}{8},\quad\mathrm{Var}(Z_1)=\frac{47}{64}$

$\Rightarrow\mathbb{E}(X_n)=\left(\frac{11}{8}\right)^n,\quad\mathrm{Var}(X_n)=\frac{47}{64}\left(\frac{11}{8}\right)^{n-1}=\frac{47}{24}\left(\frac{11}{8}\right)^{n-1}\left[1-\left(\frac{11}{8}\right)^n\right]$

$\Phi(s)=s\Rightarrow s=1$或$\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\Rightarrow\pi=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

3.22 若单一个体产生后代的分布为 $p_0=q,p_1=p\quad(p+q=1)$, 并假定过程开始时的祖先数为 1, 试求分支过程第 3 代总数的分布.

Solution

由题意得,$\mathbb{P}(X_n=1)=p^n,\mathbb{P}(X_n=0)=1-p^n$

$\therefore\mathbb{P}(X_3=1)=p^3,\mathbb{P}(X_3=0)=1-p^3$

3.23 一连续时间 Markov 链有 0 和 1 两个状态, 在状态 0 和 1 的逗留时间服从参数为 $\lambda>0$ 及 $\mu>0$ 的指数分布. 试求在时刻 0 从状态 0 起始, t 时刻后过程处于状态 0 的概率 $P_{00}(t)$

Solution

$$\begin{aligned}P_{00}(t+h)&=\sum_{k\geqslant 0}P_{0k}(t)P_{k0}(h)\\&=P_{00}(t)P_{00}(h)+P_{01}(t)P_{10}(h)\\&=P_{00}(1-\lambda h+o(h))+(1-P_{00}(t))(\mu h+o(h))\end{aligned}$$

$\therefore\dfrac{P_{00}(t+h)-P_{00}(t)}{h}=-(\lambda+\mu)P_{00}(t)+\mu+\dfrac{o(h)}{h}$

令 $h\to 0$, 则 $P'_{00}(t)=-(\lambda+\mu)P_{00}(t)+\mu$

而 $P_{00}(0)=1$, 解微分方程得

$$P_{00}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

3.24 在第 23 题中如果 $\lambda=\mu$. 定义 $N(t)$ 为过程在 $[0,t]$ 中改变的次数, 试求 $N(t)$ 的概率分布.

Solution

设 $f(t)$ 为状态 0(或 1) 逗留时间的概率密度函数, $f(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$

记 $P_k(t)=\mathbb{P}[N(t)=k|N(0)=0],\quad(k=0,1,2,\cdots)$

$$\begin{aligned}P_0(t)&=\mathbb{P}(\text{在状态 }0(\text{或 }1)\text{ 逗留时间 }t_s>t)\\&=1-\mathbb{P}(t_s\leqslant t)\\&=1-\int_0^t\lambda\mathrm{e}^{\lambda t_s}\,\mathrm{d}t_s\\&=\mathrm{e}^{-\lambda t}\end{aligned}$$

猜想 $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}$
设到 $k-1$ 为止猜想成立, 则

$$\begin{aligned}
P_k(t) &= \int_0^t f(t_s)P_{k-1}(t-t_s)\,\mathrm{d}t_s \\
&= \int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t_s}\frac{[\lambda(t-t_s)]^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_s)}\,\mathrm{d}t_s \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t (t-t_s)^{k-1}\,\mathrm{d}t_s \\
&= \frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

综上, 当 $\lambda = \mu$ 时 $N(t)$ 服从参数为 λt 的 Possion 分布

3.25 记 $X(t)$ 为纯生过程, 且有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X(t+h)-X(t)=1|X(t)\text{为奇数}] &= \alpha h + o(h) \\
\mathbb{P}[X(t+h)-X(t)=1|X(t)\text{为偶数}] &= \beta h + o(h)
\end{aligned}$$

及 $X(0)=0$, 试分别求事件"$X(t)$ 为偶数" 及"$X(t)$ 为奇数" 的概率.

Solution
本题暂缺

3.26 考虑状态 $0, 1, \cdots, N$ 上的纯生过程 $X(t)$, 假定 $X(0)=0$ 以及 $\lambda_k = (N-k)\lambda, k = 0, 1, \cdots, N$. 其中 λ_k 满足

$$P\{X(t+h)-X(t)=1|X(t)=k\} = \lambda_k h + o(h),$$

试求 $P_n(t) = P(X(t)=n)$, 这是新生率受群体总数反馈作用的例子.

Solution
本题暂缺

3.27 在某化学反应中, 由分子 A 与 B 发生反应而产生分子 C. 假定在很小时间 h 之内一个分子 A 与 B 接近能发生化学反应的概率与 h 及 A, B 当前的分子数成正比. 假定在反应开始时 A, B 分子数相同, 并记过程 $X(t)$ 为 A 分子在时刻 t 的数目. 试建立其随机过程模型.

Solution
本题暂缺

3.28 有无穷多个服务员的排队系统. 假定顾客以参数为 λ 的 Possion 过程到达, 而服务员的数量巨大, 可理想化为无穷多个. 顾客一到就与别的顾客相独立地接受服务, 并在时间 h 内完成服务的概率近似为 αh. 记 $X(t)$ 为在时刻 t 正接受服务的顾客总数, 试建立此过程的转移机制的模型.

Solution

本题暂缺

3.29 一个由 N 个部件组成的循环装置. 从 $C_1, C_2, \cdots$ 到 C_N 顺时针排列. 第 k 个部件会持续工作一段时间, 其分布是以 λ_k 为参数的指数分布. 一旦它停止工作, 顺时针方向的下一个元件就立即接替它开始运行. 假定各部件及同一部件的不同次运行都是相互独立的. 记 $X(t)$ 为时刻 t 正在运行的部件的序号. 试写出模型及转移概率所满足的微分方程. 当 $N = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 初始状态为 1 时试求解 $P_{11}(t)$ 及 $P_{12}(t)$.

Solution

本题暂缺

3.30 试写出纯生过程的 Kolmogorov 向前微分方程. 在初始条件 $P_{ii}(0) = 1$ 下试写出 $P_{ii}(t)$ 及 $P_{ij}(t)$ 应满足的方程. 特别对 $\lambda_j = j\lambda$ 的 Yule 过程求出 $P_{ij}(t)$ 的明显表达式.

Solution

本题暂缺

3.31 两个通讯卫星放入轨道. 每一个卫星的工作寿命都是以 μ 为参数的指数分布. 一旦失效就再放射一颗新卫星替换它. 所需的准备及发射时间服从以 λ 为参数的指数分布. 记 $X(t)$ 为时刻 t 时在轨道中工作的卫星数. 假定这是一个状态空间为 $\{0, 1, 2\}$ 的连续时间 Markov 链模型. 试建立 Kolmogorov 向前及向后微分方程.

Solution

本题暂缺

4 第四章 平稳过程

以下如果没有指明变量 t 的取值范围, 一般视为 $t \in \mathbb{R}$, 平稳过程是指宽平稳过程.

4.1 设 $X(t) = \sin Ut$, 这里 U 为 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布.

(a) 若 $t = 1, 2, \cdots$, 证明 $\{X(t), t = 1, 2, \cdots\}$ 是宽平稳但不是严平稳过程,

(b) 设 $t \in [0, +\infty)$, 证明 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 既不是严平稳也不是宽平稳过程.

Solution

(a)

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}(\sin Ut) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin Ut \, \mathrm{d}U = 0 \qquad (t = 1, 2, \cdots)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X(t), X(s)) &= \mathbb{E}(\sin Ut \cdot \sin Us) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\cos(t-s)U - \cos(t+s)U\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{ \frac{1}{t-s}\sin(t-s)U\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{t+s}\sin(t+s)U\Big|_0^{2\pi} \right\} \\
&= 0 \qquad (t \neq s)
\end{aligned}$$

当 $t = s$ 时 $\operatorname{Cov}(X(t), X(s)) = \mathbb{E}(\sin^2 Ut) = \frac{1}{2}$ $\quad\therefore$ 是宽平稳

考虑 $F_t(x) = \mathbb{P}(\sin Ut \leqslant x)$, 显然 $F_{t+h} = \mathbb{P}[\sin U(t+h) \leqslant x]$ 与其不一定相同 $\quad\therefore$ 不是严平稳

(b)

$$\mathbb{E}[X(t)] = \frac{1}{2\pi t}(1 - \cos 2\pi t)$$

$$\operatorname{Var}[X(t)] = \mathbb{E}\left(\sin Ut - \frac{1}{2\pi t}(1 - \cos 2\pi t)\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sin 4\pi t}{8\pi t} - \left(\frac{1 - \cos 2\pi t}{2\pi t}\right)^2$$

都与 t 相关 $\quad\therefore$ 不是宽平稳

若其严平稳, 则因二阶矩存在, 应为宽平稳, 矛盾. $\quad\therefore$ 不是严平稳.

4.2 设 $\{X_n, n = 0, 1, 2 \cdots\}$ 是平稳序列, 定义 $\{X_n^{(i)}, n = 1, 2, \cdots\}, i = 1, 2, \cdots$, 为

$$\begin{aligned}
X_n^{(1)} &= X_n - X_{n-1}, \\
X_n^{(2)} &= X_n^{(1)} - X_{n-1}^{(1)}, \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

证明这些序列仍是平稳序列.

Solution

1° $\ell=0$ 时,$\mathbb{E}(X_n)$ 依定义为常数 C_0

$\mathrm{Cov}(X_n,X_m)$ 依定义为 $n-m$ 的函数 $f_0(n-m)\Rightarrow$ 成立

2° 设当 $\ell\leqslant k$ 时成立, 则当 $\ell=k+1$ 时

$$\mathbb{E}X_n^{(\ell)}=\mathbb{E}(X_n^{(k)}-X_{n-1}^{(k)})=C_k-C_k=0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X^{(k+1)},X_m^{(k+1)})&=\mathbb{E}(X_n^{(k+1)}X_m^{(k+1)})\\
&=\mathbb{E}\left[(X_n^{(k)}-X_{n-1}^{(k)})(X_m^{(k)}-X_{m-1}^{(k)})\right]\\
&=\mathbb{E}(X_n^{(k)}X_m^{(k)})-\mathbb{E}(X_{n-1}^{(k)}X_m^{(k)})-\mathbb{E}(X_n^{(k)}X_{m-1}^{(k)})+\mathbb{E}(X_{n-1}^{(k)}X_{m-1}^{(k)})\\
&=f_k(n-m)-f_k(n-1-m)-f_k(n-m+1)+f_k(n-m)\\
&=f_\ell(n-m)
\end{aligned}$$

只与 $n-m$ 有关 $\therefore$ 是平稳的

4.3 设 $X_n=\sum\limits_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_kn-U_k)$, 这里 σ_k 和 a_k 为正常数, $k=1,\cdots,N;U_1,\cdots,U_n$ 是 $(0,2\pi)$ 上独立均匀分布随机变量, 证明 $\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 是平稳过程.

Solution

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n)&=\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}(\cos(a_kn)\cos U_k+\sin(a_kn)\sin U_k)\right]\\
&=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\left[\mathbb{E}(\cos U_k)\cos a_kn+\mathbb{E}(\sin U_k)\sin a_kn\right]\\
&=0\\
\mathrm{Cov}(X_n,X_m)&=\mathbb{E}(X_nX_m)-\mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_m)=\mathbb{E}(X_nX_m)\\
&=\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_kn-U_k)\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\sqrt{2}\cos(a_jm-U_j)\right]\\
&=\sum_{k=1}^{N}2\sigma_k^2\mathbb{E}\left[\cos(a_kn-U_k)\cos(a_km-U_k)\right]+\sum_{k\neq j}2\sigma_k\sigma_j\mathbb{E}[\cos(a_kn-U_k)]\mathbb{E}[\cos(a_jm-U_j)]\\
&=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\mathbb{E}\left[\cos(a_k(n-m))+\cos(a_kn+a_km-2U_k)\right]+0\\
&=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cos[a_k(n-m)]
\end{aligned}$$

只与 $n-m$ 有关 $\therefore$ 宽平稳.

4.4 设 $A_k,k=1,2,\cdots,n$ 是 n 个实随机变量; $\omega_k,k=1,2,\cdots,n$, 是 n 个实数. 试问 A_k 以及 A_k 之间应满足怎样的条件才能使

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k\mathrm{e}^{j\omega_kt}$$

是一个复的平稳过程.

Solution

要求

$$\mathbb{E}[Z(t)] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(A_k \mathrm{e}^{j\omega_k t}) = const$$

$\therefore \mathbb{E}(A_k) = 0$, 要求

$$\mathrm{Cov}(Z(t), Z(s)) = \mathbb{E}[Z(t)\overline{Z(s)}] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{E}(A_k A_\ell) \cdot \mathrm{e}^{j\omega_k t - j\omega_\ell s}$$

只与 $t-s$ 有关

$\therefore \mathbb{E}(A_k A_l) = 0 \quad (k \neq \ell \text{ 且 } \omega_k \neq \omega_\ell)$

> **4.5** 设 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是一列独立同分布的随机变量序列,$\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \mathbb{P}(X_n = -1) = 1-p, \quad n = 1, 2, \cdots$, 令 $S_0 = 0, S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/\sqrt{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$, 求随机序列 $\{S_n = 1, 2, \cdots\}$ 的协方差函数和自相关函数.p 取何值时此序列为平稳序列?

Solution

由题意 $\mathbb{E}(X_n) = 2p-1, \mathbb{E}(X_n^2) = 1, \mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_1) = \sqrt{n}(2p-1)$

(i)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(S_n, S_m) &= \mathbb{E}(S_n S_m) = \mathbb{E}(S_n)\mathbb{E}(S_m) \\
&= \frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}(X_i X_j) - \sqrt{mn}(2p-1)^2 \xlongequal{\text{不妨设}m<n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{mn}}\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{(i,j)=(1,1), i\neq j}^{(i,j)=(m,n)}\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\right) - \sqrt{mn}(2p-1)^2 \\
&= \frac{4m}{\sqrt{mn}}p(1-p)
\end{aligned}$$

(ii)

$$r_X(n,m) = \mathbb{E}(S_n S_m) = \frac{4\min m, n}{\sqrt{mn}}p(1-p) + \sqrt{mn}(2p-1)^2$$

(iii) 若 $\{S_n\}$ 平稳, 则 $\mathbb{E}(S_n) \equiv const$, 由 $\sqrt{2}S_n = \sqrt{n}(2p-1) \Rightarrow p = \frac{1}{2}$ 但此时 $\mathrm{Cov}(S_n, S_m) = \frac{\min\{m,n\}}{\sqrt{mn}}$ 与 m, n 有关, 故不存在 p 使得序列平稳

> **4.6** 设 $\{X(t)\}$ 是一个平稳过程, 对每个 $t \in \mathbb{R}$, $X'(t)$ 存在. 证明对每个给定的 t, $X(t)$ 与 $X'(t)$ 不相关, 其中 $X'(t) = \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}$.

Solution

以下假定求导数和求期望可交换

设 $\mathbb{E}[X(t)] = m, \mathrm{Var}[X(t)] = \sigma^2$

$\therefore \mathbb{E}[X(t+\Delta t)] = m$

$\because X'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$
$\therefore \mathbb{E}[X'(t)] = 0$

$$\therefore \operatorname{Cov}(X(t), X'(t)) = \mathbb{E}[X(t)X'(t)] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\big(X^2(t)\big)'\Big] = \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}[X^2(t)]\big)' = \frac{1}{2}(\sigma^2 + m^2)' = 0$$

$\therefore$ 不相关

4.7 设 $\{X(t)\}$ 是高斯过程, 均值为 0, 协方差函数 $R(\tau) = 4\mathrm{e}^{-2|\tau|}$. 令

$$Z(t) = X(t+1), \quad W(t) = X(t-1),$$

(i) 求 $\mathbb{E}(Z(t)W(t))$ 和 $\mathbb{E}(Z(t)+W(t))^2$;

(ii) 求 $Z(t)$ 的密度函数 $f_Z(z)$ 及 $\mathbb{P}(Z(t)<1)$;

(iii) 求 $Z(t), W(t)$ 的联合密度 $f_{Z,W}(z,w)$.

Solution

(i)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z(t)W(t)] &= \mathbb{E}[X(t+1)X(t-1)] = R(2) = 4\mathrm{e}^{-4} \\
\mathbb{E}[Z(t)W(t)]^2 &= \mathbb{E}\big[X^2(t+1) + 2X(t+1)X(t-1) + X^2(t-1)\big] \\
&= 2\mathbb{E}[X^2(t)] + 2R(2) \\
&= 2\big\{\operatorname{Var}[X(t)] - \mathbb{E}^2[X(t)]\big\} + 4\mathrm{e}^{-4} \\
&= 2R(0) + 4\mathrm{e}^{-4} \\
&= 4(1+\mathrm{e}^{-4})
\end{aligned}$$

(ii) $Z(t) = X(t+1) \sim N(0, 2^2)$

$$\begin{aligned}
\therefore f_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2^2}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\cdot 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{8}} \\
\therefore \mathbb{P}[Z(t)<1] &= \int_{-\infty}^{1} f_Z(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{1}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{8}}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

(iii) 显然 $f_{Z,W}(z,w)$ 为二维正态分布概率密度函数, 协方差矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 4\mathrm{e}^{-4} \\ 4\mathrm{e}^{-4} & 4 \end{pmatrix}$$

其逆矩阵

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4(1-\mathrm{e}^{-8})} & -\frac{\mathrm{e}^{-4}}{4(1-\mathrm{e}^{-8})} \\ -\frac{\mathrm{e}^{-4}}{4(1-\mathrm{e}^{-8})} & \frac{1}{4(1-\mathrm{e}^{-8})} \end{pmatrix}$$

其行列式 $|\boldsymbol{C}| = 16(1-\mathrm{e}^{-8})$, 期望向量 $\bar{\boldsymbol{\mu}} = (0,0)$

$$\begin{aligned}
\therefore f_{Z,W}(z,w) &= \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{C}|}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Big((z,w)-\bar{\boldsymbol{\mu}}\Big)\boldsymbol{C}^{-1}\Big((z,w)-\bar{\boldsymbol{\mu}}\Big)^T\right\} \\
&= \frac{1}{8\pi\sqrt{1-\mathrm{e}^{-8}}}\exp\left\{-\frac{z^2+w^2-2\mathrm{e}^{-4}wz}{8(1-\mathrm{e}^{-8})}\right\}
\end{aligned}$$

4.8 设 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是一个严平稳过程, ε 为只取有限个值的随机变量. 证明 $\{Y(t) = X(t-\varepsilon), t \in \mathbf{R}\}$ 仍是一个严平稳过程.
提示：对 ε 用全概率公式.

Solution
设 ε 可取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big\{Y(t_1+h) \leqslant y_1, \cdots, Y(t_k+h) \leqslant y_k\big\} \\
=&\mathbb{P}\big\{X(t_1-\varepsilon+h) \leqslant y_1, \cdots, X(t_k-\varepsilon+h) \leqslant y_k\big\} \\
=&\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\varepsilon=\varepsilon_i)\mathbb{P}\big\{X(t_1-\varepsilon_i+h) \leqslant y_1, \cdots, X(t_k-\varepsilon_i+h) \leqslant y_k | \varepsilon=\varepsilon_i\big\}
\end{aligned}$$

$\because X(t)$ 严平稳

$$\begin{aligned}
\therefore \text{上式} &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\varepsilon=\varepsilon_i) P\big\{X(t_1-\varepsilon_i) \leqslant y_1, \cdots, X(t_k-\varepsilon) \leqslant y_k | \varepsilon=\varepsilon_i\big\} \\
&= \mathbb{P}\big\{X(t_1-\varepsilon) \leqslant y_1, \cdots, X(t_k-\varepsilon) \leqslant y_k\big\} \\
&= \mathbb{P}\big\{Y(t_1) \leqslant y_1, \cdots, Y(t_k) \leqslant y_k\big\}
\end{aligned}$$

$\therefore Y(t)$ 为严平稳.

4.9 设 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是一个严平稳过程, 构造随机过程 Y 如下:$Y(t) = 1$, 若 $X(t) > 0; -1$, 若 $X(t) \leq 0$. 证明 $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是一个平稳过程. 如果进一步假定 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是均值为零的 Gauss 平稳过程, 证明 $R_Y(\tau)$ 为 $\frac{2}{\pi}\arcsin(R_X(\tau)/R_X(0))$.

Solution
本题暂缺.

4.10 设 $\{X(t)\}$ 是一个复值平稳过程, 证明

$$E|X(t+\tau) - X(t)|^2 = 2\Re e(R(0) - R(\tau)).$$

Solution
记 $m = \mathbb{E}[X(t)]$, 则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big|X(t+\tau) - X(t)\big|^2 &= \mathbb{E}\big|(X(t+\tau)-m) - (X(t)-m)\big|^2 \\
&= \mathbb{E}\big|X(t+\tau)-m\big|^2 + \mathbb{E}\big|X(t)-m\big|^2 - \mathbb{E}\Big[(X(t+\tau)-m)\overline{(X(t)-m)}\Big] \\
&\quad - \mathbb{E}\Big[(X(t)-m)\overline{(X(t+\tau)-m)}\Big] \\
&= 2R(0) - R(-\tau) - R(\tau)
\end{aligned}$$

又 $\because R(-\tau) = \overline{R(\tau)} \quad \therefore \text{上式} = 2\Re e(R(0) - R(\tau))$

4.11 设 $\{X(t)\}$ 是零均值的平稳高斯过程, 协方差函数为 $R(\tau)$, 证明

$$\mathbb{P}(X'(t) \leqslant a) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right),$$

其中 $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数.

Solution

注意到 $X'(t)$ 服从正态分布

而 $\mathbb{E}[X'(t)] = \{\mathbb{E}[X(t)]\}' = 0$

$\mathrm{Var}(X'(t)) = \mathrm{Cov}(X'(t), X'(t+0)) = -R''(0)$

$\therefore X'(t) \sim N(0, -R''(0))$

$$\therefore \mathbb{P}\big(X'(t) \leqslant a\big) = \mathbb{P}\left(\frac{X'(t)}{\sqrt{-R''(0)}} \leqslant \frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right) = \phi\left(\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right)$$

4.12 设 $\{X(t)\}$ 为连续宽平稳过程, 均值 m 未知, 协方差函数为 $R(\tau) = a\mathrm{e}^{-b|\tau|}, \tau \in R, a > 0, b > 0$. 对固定的 $T > 0$, 令 $\overline{X} = T^{-1}\int_0^T X(s)\,\mathrm{d}s$. 证明 $\mathbb{E}(\overline{X}) = m$(即 $\overline{X}$ 是 m 的无偏估计) 以及

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1 - \mathrm{e}^{-bT})].$$

提示：在上述条件下, 期望号与积分号可以交换.

Solution

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\int_0^T X(s)\,\mathrm{d}s\right] = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}[X(s)]\,\mathrm{d}s = \frac{mT}{T} = m$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\overline{X}) &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{T^2}\left(\int_0^T X(t)\,\mathrm{d}t - m\right)\left(\int_0^T X(s)\,\mathrm{d}s - m\right)\right] \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \mathbb{E}\big[(X(t)-m)(X(s)-m)\big]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(t-s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T a\mathrm{e}^{-b|t-s|}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2a}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}t\int_0^T \mathrm{e}^{-b|t-s|}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{2a}{T^2}\int_0^T \frac{1}{b}\big(1-\mathrm{e}^{-bt}\big)\,\mathrm{d}t \\
&= 2a\big[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1-\mathrm{e}^{-bT})\big].
\end{aligned}$$

4.13 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 设 $\{X(t)\}$ 的 n 阶导数 $X^{(n)}(t)$ 存在, 证明 $\{X^{(n)}(t)\}$ 是平稳过程.
提示：利用协方差函数性质 4.

Solution

$\mathbb{E}[X^{(n)}(t)] = \{\mathbb{E}[X(t)]\}^{(n)} = 0, \mathrm{Cov}\big(X^{(n)}(t), X^{(n)}(t+\tau)\big) = (-1)^n R^{(2n)}(\tau)$

$\therefore \{X^{(n)}(t)\}$ 是平稳过程.

> **4.14** 证明定理 4.1 中关于平稳序列均值的遍历性定理.
> 提示：用 Schwarz 不等式

Solution

充分性：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} X(k) - m\right|^2 \qquad (m = \mathbb{E}(X_n)) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}\mathbb{E}\left(\sum_{k=-N}^{N} X(k) - m\right)^2 \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}\mathbb{E}\left(\sum_{k=-N}^{N} X(k) - m\right)\left(\sum_{\ell=-N}^{N} X(\ell) - m\right) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}\sum_{k=-N}^{N}\sum_{\ell=-N}^{N} R(k-\ell) \\
&= \frac{1}{(2N+1)^2}\left[\sum_{\tau=0}^{N} R(\tau)\cdot 2(2N+1-\tau) - (2N+1)R(0)\right] \\
&\leqslant \left|\frac{2}{2N+1}\sum_{\tau=0}^{N} R(\tau)\right| + \left|\frac{1}{2N+1}R(0)\right|
\end{aligned}
$$

$$
\because \lim_{N\to+\infty}\frac{2}{2N+1}\sum_{\tau=0}^{N} R(\tau) = \lim_{\to+\infty}\frac{2}{2N-1}\sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = \lim_{N\to+\infty}\frac{2N}{2N-1}\cdot\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0,
$$

$$
\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}R(0) = 0,
$$

$$
\therefore \lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}\left|\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} X(k) - m\right|^2 = 0.
$$

必要性：

记 $\overline{X}_N = \frac{1}{2N+1}\sum\limits_{-N}^{N} X_k$, 则有

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{\tau=0}^{2N} R(\tau)\right]^2 = \left[\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\mathrm{Cov}(X_{-N}, X_k)\right]^2 = \left[\mathrm{Cov}(X_{-N}, \overline{X}_N)\right]^2 \\
&\leqslant \mathrm{Var}(X_{-N})\mathrm{Var}(\overline{X}_N) \qquad (\text{Schwarz 不等式}) \\
&= R(0)\mathbb{E}[(\overline{X}_N - m)^2] \to 0 \quad (N \to +\infty)
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{\tau=0}^{2N} R(\tau) = 0,
$$

由上易得

$$
\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0.
$$

4.15 如果 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是均值为 0 的联合正态随机向量, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1X_2X_3X_4)=&\mathrm{Cov}(X_1,X_2)\mathrm{Cov}(X_3,X_4)+\mathrm{Cov}(X_1,X_3)\mathrm{Cov}(X_2,X_4)\\&+\mathrm{Cov}(X_1,X_4)\mathrm{Cov}(X_2,X_3).\end{aligned}$$

利用这个事实证明定理 4.3

Solution

取固定的 $\tau\in\mathbb{Z}$, 记 $X_{n+\tau}X_n\triangleq Y_n$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n)&=R_X(\tau)(const)\\ \mathrm{Cov}(Y_{n+\tau_1},Y_n)&=\mathbb{E}(Y_{n+\tau_1}Y_n)-R_X^2(\tau)\\&=\mathbb{E}(X_{n+\tau_1+\tau}X_{n+\tau_1}X_{n+\tau}X_n)-R_X^2(\tau)\\&=R_X^2(\tau)+R_X^2(\tau_1)+R_X(\tau_1+\tau)R_X(\tau_1-\tau)-R_X^2(\tau)\\&=R_X^2(\tau_1)+R_X(\tau_1+\tau)R_X(\tau_1-\tau)\\&=R_Y(\tau_1)\end{aligned}$$

$\therefore\{Y_n\}$ 是平稳过程. 又易见 $X=\{X_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的协方差函数遍历性成立的充要条件是 $Y=\{Y_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的均值遍历性成立. 而我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{\tau_1=0}^{N-1}R_Y(\tau_1)\right|\leqslant&\frac{1}{N}\sum_{\tau_1=0}^{N-1}\Big|R_Y(\tau_1)\Big|\\ \leqslant&\frac{1}{N}\sum_{\tau_1=0}^{N-1}\left[R_X^2(\tau_1)+\Big(R_X^2(\tau_1+\tau)+R_X^2(\tau_1-\tau)\Big)/2\right]\to0,(N\to+\infty)\end{aligned}$$

由均值遍历性定理 (i) 可知, $Y=\{Y_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的均值遍历性成立, 即 $X=\{X_n,n\in\mathbb{Z}\}$ 的协方差函数遍历性成立.

4.16 设 X_0 为随机变量, 其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant1,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

设 X_{n+1} 在给定 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ 下是 $(1-X_n,1]$ 上的均匀分布, $n=0,1,2,\cdots$, 证明 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 的均值有遍历性.

Solution

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_0)&=\int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\\ \mathbb{E}(X_0^2)&=\int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\\ \mathbb{E}(X_{n+1})&=\mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{n+1}|X_N)]=\mathbb{E}\Big[\int_{1-x_n}^1\frac{x_{n+1}}{x_n}\,\mathrm{d}x_{n+1}\Big]=\mathbb{E}(1-\frac{1}{2}X_n)\\&=1-\frac{1}{2}\mathbb{E}(X_n)\end{aligned}$$

$\because \mathbb{E}(X_0)=\frac{2}{3} \quad \therefore \mathbb{E}(X_n)\equiv\frac{1}{2}$ 又有

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^2)=\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X_{n+1}^2|X_n)\Big]=\mathbb{E}\Big[\int_{1-x_n}^{1}\frac{x_{n+1}^2}{x_n}\,\mathrm{d}x_{n+1}\Big]=1-\mathbb{E}(X_n)+\frac{1}{3}\mathbb{E}(X_n^2)$$

$\because \mathbb{E}(X_0^2)=\frac{1}{2} \quad \therefore \mathbb{E}(X_n^2)\equiv\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_nX_{n+m})&=\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X_nX_{n+m}|X_n)\Big]=\mathbb{E}\Big[X_n\mathbb{E}(X_{n+m}|X_n)\Big]\\&=\mathbb{E}\Big[X_n\big(1-\frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{n+m-1}|X_n)\big)\Big]\\&=\mathbb{E}(X_n)-\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X_nX_{n+m-1}|X_n)\Big]\\&=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\mathbb{E}(X_nX_{n+m-1})\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{E}(X_nX_{n+m})-\frac{4}{9}=-\frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}(X_nX_{n+m})-\frac{4}{9}\Big)=\cdots=\Big(-\frac{1}{2}\Big)^m\Big(\mathbb{E}(X_n^2)-\frac{4}{9}\Big)=\frac{1}{18}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^m$$

$$\therefore R_X(n,n+m)=\mathbb{E}\left(X_n-\frac{2}{3}\right)\left(X_{n+m}-\frac{2}{3}\right)=\mathbb{E}(X_nX_{n+m})-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^m=R(m)$$

$\therefore \{X_n\}$ 是平稳序列, 又 $\because \lim\limits_{m\to+\infty}R(m)=0 \therefore$ 是均值遍历的

> **4.17** 设 $\{\varepsilon_n, n=0,\pm1,\cdots\}$ 为白噪声序列, 令
>
> $$X_n=\alpha X_{n-1}+\varepsilon, |\alpha|<1, n=\cdots,-1,0,1,\cdots,$$
>
> 则 $X_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}$, 从而证明 $\{X_n, n=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 为平稳序列. 求出该序列的协方差函数. 此序列是否具有遍历性?

Solution

$$\mathbb{E}(X_n)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\mathbb{E}(\varepsilon_{n-k})=0$$

$$\begin{aligned}R_X(n,n+m)&=\mathrm{Cov}(X_n,X_{n+m})=\mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}\Big)\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha^\ell\varepsilon_{m+n-\ell}\Big)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha^{k+\ell}\mathbb{E}(\varepsilon_{n-k}\varepsilon_{m+n-\ell})=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k+m}\mathbb{E}(\varepsilon_{n-k}^2)\\&=\alpha^m\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\\&=R(m)\end{aligned}$$

$\therefore \{X_n\}$ 为平稳序列, 又 $\lim\limits_{m\to+\infty}R(m)=0$, $\therefore$ 是均值遍历的

以下没有特殊声明, 所涉及的过程均假定均值函数为 0

4.18 我们称一个随机过程 X 为平稳 Gauss-Markov 过程, 如果 X 是平稳 Gauss 过程, 并且具有 Markov 性, 即对任意的 $s<t$, 任意实数 x_t,x_s,x_u, 有

$$\mathbb{P}(X_t\leqslant x_t|X_s=x_s,X_u=x_u,u<s)=\mathbb{P}(X_t\leqslant x_t|X_s=x_s)$$

试证明零均值的平稳 Gauss-Markov 过程的协方差函数 $R(\tau)$ 具有 $C\mathrm{e}^{-a|\tau|}$ 这种形式. 这里 C 为常数

Solution
本题暂缺

4.19 设 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 是平稳 Gauss-Markov 序列 (即第 18 题中的 t 取非负整数), 均值为 0. 证明其协方差函数 $R(h)$ 具有 $\sigma^2a^{|h|}$ 这种形式, 其中 $|a|\leqslant 1$.

Solution
本题暂缺

4.20 设 $\{X(t)\}$ 为平稳过程, 令 $Y(t)=X(t+a)-X(t-a)$. 分别以 R_X,S_X 和 R_Y,S_Y 记随机过程 X 和 Y 的协方差函数和功率谱密度, 证明

$$\begin{aligned}&R_Y(\tau)=2R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a),\\&S_Y(\omega)=4S_X(\omega)\sin^2 a\omega.\end{aligned}$$

Solution

$$\begin{aligned}R(\tau)&=\mathbb{E}\Big[X(t+a)-X(t-a)\Big]\Big[X(t-\tau+a)-X(t-\tau-a)\Big]\\&=\mathbb{E}\Big[X(t+a)X(t-\tau-a)\Big]-\mathbb{E}\Big[X(t+a)-X(t-\tau-a)\Big]\\&\quad-\mathbb{E}\Big[X(t-a)X(t-\tau-a)\Big]+\mathbb{E}\Big[X(t-a)-X(t-\tau-a)\Big]\\&=R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)+R_X(\tau)\\&=2R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)\\S_Y(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_Y(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=2\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+2a)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&\quad-\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau-2a)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=S_X(\omega)\big(2-\mathrm{e}^{2a\omega i}-\mathrm{e}^{-2a\omega i}\big)\\&=S_X(\omega)\big(2-2\cos 2a\omega\big)\\&=4S_X(\omega)\sin^2 a\omega\end{aligned}$$

4.21 设平稳过程 X 的协方差函数 $R(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-\tau^2}$, 试研究其功率谱密度函数的性质.

Solution

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sigma^2\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\tau^2+i\omega\tau-\frac{\omega^2}{4})}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sigma^2\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(\tau+\frac{i\omega}{2})^2}{2\times\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sigma^2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}.
\end{aligned}
$$

$S(\omega)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的实的、偶的、非负且可积的函数.

4.22 设平稳过程 $\{X(t)\}$ 的协方差函数 $R(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau+b^2\mathrm{e}^{-a|\tau|}$, 求功率谱密度函数 $S(\omega)$

Solution

因为 $\cos\omega_0\tau \longleftrightarrow \pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))$, $\quad \mathrm{e}^{-a|\tau|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

故所求谱密度函数为

$$
S(\omega)=\frac{a^2\pi}{2}\big(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\big)+\frac{2ab^2}{a^2+\omega^2}
$$

4.23 设 $\{X(t)\}$ 为 Gauss 平稳过程, 均值为零,$R_X(\tau)=A\mathrm{e}^{-a|\tau|}\cos\beta\tau$. 令 $Y(t)=X^2(t)$, 验证 $R_Y(\tau)=A^2\mathrm{e}^{-2a|\tau|}(1+\cos 2\beta\tau)$

Solution

由课本 4.3.2 节中平方检波的结果可知:

$$
\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= 2R_X^2(\tau)=2A^2\mathrm{e}^{-2a|\tau|}\cos^2\beta\tau=A^2\mathrm{e}^{-2a|\tau|}(1+\cos 2\beta\tau) \\
&= A^2(\mathrm{e}^{-2a|\tau|}+\mathrm{e}^{-2a|\tau|}\cos 2\beta\tau)
\end{aligned}
$$

由 Fourier 变换关系:

$$
\mathrm{e}^{-a|\tau|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2},\quad \mathrm{e}^{-a|\tau|}\cos\omega_0\tau \longleftrightarrow \frac{a}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}+\frac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}
$$

故可得到 $R_Y(\tau)$ 所对应的谱密度为:

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= A^2\left(\frac{4a}{4a^2+\omega^2}+\frac{2a}{4a^2+(\omega+2\beta)^2}+\frac{2a}{4a^2+(\omega-2\beta)^2}\right) \\
&= 2aA^2\left(\frac{2}{4a^2+\omega^2}+\frac{1}{4a^2+(\omega+2\beta)^2}+\frac{1}{4a^2+(\omega-2\beta)^2}\right)
\end{aligned}
$$

4.24 设 $\{X(t)\}$ 为 Gauss 平稳过程, 均值为零, 功率谱密度 $S(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$. 求 $X(t)$ 落在区间 $[0.5,1]$ 中的概率.

Solution

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\mathrm{e}^{j\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{j\omega\tau}}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi j\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{jz|\tau|}}{1+z^2},j\right]=\frac{\mathrm{e}^{-|\tau|}}{2}$$
$$R(0)=\mathrm{Var}(X(t))=\mathbb{E}[X^2(t)]=\frac{1}{2}=\sigma^2$$

$\therefore X(t)\sim N(0,\frac{1}{2})\quad \frac{X(t)}{\sigma}=\sqrt{2}X(t)\sim N(0,1)$

$\therefore \mathbb{P}[0.5\leqslant X(t)\leqslant 1]=\mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sqrt{2}X(t)\leqslant\sqrt{2}\right]=\Phi(\sqrt{2})-\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4.25 已知平稳过程 $\{X(t)\}$ 的功率谱密度为 $S(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+4\omega^2+3}$, 求 $X(t)$ 的均方值.

Solution

$$S(\omega)=\frac{\omega^2}{(\omega^2+1)(\omega^2+3)}=-\frac{1}{2(\omega^2+1)}+\frac{3}{2(\omega^2+3)}$$

故由上题类似的方法可知 $S(\omega)$ 所对应的 $R(\tau)=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-|\tau|}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}|\tau|}$, 从而求得 $X(t)$ 的均方值:

$$\mathbb{E}[X^2(t)]=\mathrm{Var}(X(t))=R(0)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\qquad(假定\mathbb{E}[X(t)]=0)$$

4.26 设 $S(\omega)$ 是功率谱密度函数, 证明 $\frac{\mathrm{d}^2S(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}$ 不可能是功率谱密度函数.

Solution 1(郑老师解法)

反证法: 若 $\dfrac{\mathrm{d}^2S(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}\triangleq S''(\omega)$ 为谱密度函数, 则 $S''(\omega)\geqslant 0$, 从而 $S'(\omega)$ 为单调增.
又 $S'(\omega)\leqslant 0$ 不可能对任何 $\omega\in\mathbb{R}$ 成立 (否则 $S(\omega)$ 为单调减), 故必存在 $\omega_0\in\mathbb{R}$, 使得 $S'(\omega_0)=a>0$, 从而当 $\omega\geqslant\omega_0$ 时,$S'(\omega)\geqslant a$, 故而有

$$\int_{\omega_0}^{\omega}S'(t)\,\mathrm{d}t\geqslant a(\omega-\omega_0),\quad 亦即S(\omega)\geqslant S(\omega_0)+a(\omega-\omega_0)$$

这样的 $S(\omega)$ 在 $\mathbb{R}$ 上式不可积的, 矛盾

Solution 2

$$\frac{\mathrm{d}^2S(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}-\tau^2R(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$$
$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^2R(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

令 $g(\tau)=R(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}$, 则存在 $\xi\in\mathbb{R},s.t$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^2g(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\lim_{\tau\to+\infty}\tau^2\cdot\int_{-\infty}^{\xi}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\lim_{\tau\to+\infty}\tau^2\cdot\int_{\xi}^{+\infty}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$>0\cdot\int_{-\infty}^{\xi}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau+0\cdot\int_{\xi}^{+\infty}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau=0$$

$\therefore \frac{\mathrm{d}^2S(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}<0\Rightarrow$ 不可能是功率谱密度函数

4.27 求下列协方差函数对应的功率谱密度函数:

(1) $R(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-a|\tau|}\cos b\tau$

(2) $R(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-a|\tau|}(\cos b\tau-ab^{-1}\sin b|\tau|)$

(3) $R(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-a|\tau|}(\cos b\tau+ab^{-1}\sin b|\tau|)$

(4) $R(\tau)=\sigma^2\mathrm{e}^{-a|\tau}(1+a|\tau|-2a^2\tau^2+a^3|\tau|^3/\varepsilon)$

Solution

(1) $a\sigma^2\left[\frac{1}{a^2+(\omega+b)^2}+\frac{1}{a^2+(\omega-b)^2}\right]$

(2) $\frac{a\sigma^2\omega}{b}\left[\frac{1}{a^2+(\omega-b)^2}-\frac{1}{a^2+(\omega+b)^2}\right]$

(3) $a\sigma^2\left[\frac{2+\frac{\omega}{b}}{a^2+(\omega+b)^2}+\frac{2-\frac{\omega}{b}}{a^2+(\omega-b)^2}\right]$

(4) $\frac{2a\sigma^2}{a^2+\omega^2}+\frac{2a\sigma^2(a^2-\omega^2)(1-4a^2)}{(a^2+\omega^2)^2}+\frac{4a^3\sigma^2(a^4-4a^2\omega^2+\omega^4)}{(a^2+\omega^2)^4}$

4.28 求下列功率谱密度函数对应的协方差函数:

(1) $S(\omega)=\dfrac{\omega^2+64}{\omega^4+29\omega^2+100}$

(2) $S(\omega)=\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$

(3) $S(\omega)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{\omega^2+b_k^2}$, N为固定的正整数

(4) $S(\omega)=\begin{cases}a, & |\omega|\leqslant b,\\ 0, & |\omega|>b\end{cases}$

(5) $S(\omega)=\begin{cases}0, & |\omega|<a\text{或}|\omega|\leqslant 2a,\\ b^2, & a\leqslant|\omega|\leqslant 2a.\end{cases}$

Solution

(1) $\frac{5}{7}\mathrm{e}^{-2|\tau|}-\frac{13}{70}\mathrm{e}^{-5|\tau|}$

(2) $\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-|\tau|}(1+|\tau|)$

(3) $\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{2b_k}\mathrm{e}^{-b_k|\tau|}$

(4) $\frac{a\sin b\tau}{\pi\tau}$

(5) $\frac{b^2}{\pi\tau}(\sin 2a\tau - \sin a\tau)$

4.29 设 $\{\varepsilon_n, n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ 为白噪声序列, 均值为 0, 方差为 σ^2. 求下列序列的谱密度函数:

(1) $X_n = \varepsilon_n + \alpha_1 \varepsilon_{n-1}, n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$

(2) $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k \varepsilon_{n-k}$, 其中 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$

Solution

本题暂缺

4.30 由书中例 4.15 确定的平稳序列的功率谱密度是周期函数, 试作出 $(\pi, \pi]$ 中谱密度函数的图形, 并讨论当 $|\rho| \to 1$ 时图形如何变化.
提示: 分 $\rho > 0$ 和 $\rho < 0$ 讨论.

Solution

本题暂缺

4.31 设 $\{X_n, n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ 为平稳序列, 协方差函数为 $R(\tau)$,

(1) 求 X_{n+1} 的形如 $\hat{X}_{n+1}^{(1)} = aX_n$ 的最小误差方差预报, 这里 a 是待定常数,

(2) 求 X_{n+1} 的形如 $\hat{X}_{n+1}^{(2)} = aX_n + bX_{n-1}$ 的最小均方误差预报, 这里 a 和 b 是待定常数.

(3) 上述两个预报 $\hat{X}_{n+1}^{(1)}$ 和 $\hat{X}_{n+1}^{(2)}$ 中，哪个预报的均方误差要小些? 试用 $R(\tau)$ 表示它们的差.

(4) 求 X_{n+k} 的形如 $\hat{X}_{n+k} aX_n + bX_{n+N} \quad (1 \leqslant k \leqslant N)$, 的最小均方误差内插, 这里 a, b 为待定常数.

(5) 设 $Z_n = \sum\limits_{k=0}^{N} X_{n+k}$, 其中 N 为固定的正整数. 求 Z_n 的形如 $\hat{Z}_n = aX_n + bX_{n+N}$ 的最小均方误差预报, 其中 a, b 为待定常数

Solution

(1) 设 $\hat{X}^* = aX_n$ 为 X_{n+1} 的最佳预报, 则根据投影定理有:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - \hat{X}^*)bX_n = b\mathbb{E}(X_{n+1}X_n - aX_n^2) = 0 \quad (\forall b \in \mathbb{R})$$

无妨设 $b \neq 0$, 则有 $R(1) - aR(0) = 0 \Rightarrow a = \frac{R(1)}{R(0)}$

(2) 类似可求出:

$$a = \frac{[R(0) - R(2)]R(1)}{R^2(0) - R(2}(1), \quad b = \frac{[R(0) - R(1)]R(2)}{R^2(0) - R^2(1)}$$

(3) $\hat{X}_{n+1}^{(2)}$ 的均方误差较小, 且有:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}-\hat{X}_{n+1}^{(2)}]^2-\mathbb{E}[X_{n+1}-\hat{X}_{n+1}^{(1)}]^2]\frac{-[R^2(1)-R(0)R(2)]^2}{R^2(0)-R^2(1)}$$

(4)

$$a=\frac{R(0)R(k)-R(N-k)R(N)}{R^2(0)-R^2(N)},\quad b=\frac{R(0)R(N-k)-R(k)R(N)}{R^2(0)-R^2(N)}$$

(5)

$$a=b=\frac{\sum_{k=0}^{N}R(k)}{R(0)+R(N)}$$

4.32 设平稳序列 $\{X_n,n=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 的均值为零, 协方差函数为 $R(h)=\rho^{|h|},|\rho|<1,h=0,1,\cdots$. 求 X_{n+1} 根据 $\{X_k,k\leqslant n\}$ 的线性最佳预报 $\hat{X}_{n+1}$.

Solution

本题暂缺

以下设 $\{\varepsilon_n,n=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 是均值为 0,, 方差为 1 的白噪声序列

4.33 证明没有一个平稳序列 $\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 能满足 $X_n=X_{n-1}+\varepsilon_n,n=0,\pm1,\cdots$.

Solution

本题暂缺

4.34 证明如下两个滑动平均序列

$$X_n=\varepsilon_n+\alpha\varepsilon_{n-1}$$
$$Y_n=\varepsilon_n+\frac{1}{\alpha}\varepsilon_{n-1}$$

有相同的自相关函数.

Solution

(i)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_nX_{n+\tau})&=\mathbb{E}[(\varepsilon_n+\alpha\varepsilon_{n-1})(\varepsilon_{n+\tau}+\alpha\varepsilon_{n+\tau-1})]\\&=\mathbb{E}(\varepsilon_n\varepsilon_{n+\tau})+\alpha\mathbb{E}(\varepsilon_n\varepsilon_{n+\tau-1})+\alpha^2\mathbb{E}(\varepsilon_{n-1}^2)\end{aligned}$$

$\tau=0$ 时, 上式 $=\mathbb{E}(\varepsilon_n^2)+2\alpha\mathbb{E}(\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}+\alpha^2\mathbb{E}(\varepsilon_{n-1}^2))=(1+\alpha^2)\sigma^2$

$\tau=1$ 时, 上式 $=0+\alpha\mathbb{E}(\varepsilon_n^2)=\alpha\sigma^2$

$\tau>1$ 时, 上式 $=0$

$$r_X(\tau)=\begin{cases}(1+\alpha^2)\sigma^2 & \tau=0\\ \alpha\sigma^2 & \tau=1\\ 0 & \tau>1\end{cases}$$

(ii)

$$\mathbb{E}(T_nT_{n+\tau})=\mathbb{E}(\varepsilon_n\varepsilon_{n+\tau})+\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(\varepsilon_n\varepsilon_{n+\tau-1})+\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n+\tau})+\frac{1}{\alpha^2}\mathbb{E}(\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n+\tau-1})$$

$\tau=0$ 时, 上式 $=(1+\frac{1}{\alpha^2})\sigma^2$

$\tau=1$ 时, 上式 $=\frac{1}{\alpha}\sigma^2$

$\tau>1$ 时, 上式 $=0$

$$r_Y(\tau)=\begin{cases}(1+\frac{1}{\alpha^2})\sigma^2 & \tau=0\\ \frac{1}{\alpha}\sigma^2 & \tau=1\\ 0 & \tau>1\end{cases}$$

标准化:

$$r_X(\tau)=\begin{cases}1 & \tau=0\\ \frac{\alpha}{1+\alpha^2} & \tau=1\\ 0 & \tau>1\end{cases}\quad r_Y(\tau)=\begin{cases}1 & \tau=0\\ \frac{\alpha}{1+\alpha^2} & \tau=1\\ 0 & \tau>1\end{cases}$$

4.35 设 $\{X_n, n=0,\pm1,\cdots\}$ 为 AR(p) 模型:

$$X_n=\alpha_1X_{n-1}+\cdots+\alpha_pX_{n-p}+\varepsilon_n,\qquad (n=\cdots,-1,0,1,\cdots)$$

试导出 Yule-Walker 方程:

$$R(h)=\alpha_1R(h-1)+\cdots+\alpha_pR(h-p),\qquad h>0$$

提示:AR(p) 模型两边同乘以 X_{n-k}, 然后取期望.

Solution

本题暂缺

4.36 考虑 AR(p) 模型:

$$X_n=\alpha_1X_{n-1}+\cdots+\alpha_pX_{n-p}+\varepsilon_n,\qquad n=\cdots,-1,0,1,\cdots$$

假定 $1-\alpha Z-\cdots-\alpha_pZ^p$ 的根都在单位圆外, 求功率谱密度函数.

Solution

本题暂缺

4.37 考虑如下 AR(2) 模型:

(1) $X_n=0.5X_{n-1}+0.3X_{n-2}+\varepsilon_n$

(2) $X_n=0.5X_{n-1}-0.3X_{n-2}+\varepsilon_n$

试用 Yule-Walker 方程导出协方差函数, 证明它们的谱密度函数 $S(\omega)$ 是周期函数, 并作出 $S(\omega)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的图形.

Solution

本题暂缺

4.38 求下列自回归模型的协方差函数和相关函数:

(1) $X_n = 0.8X_{n-1} + \varepsilon_n$

(2) $X_n = 0.4X_{n-1} + \varepsilon_n$

(3) $X_n = -0.5X_{n-1} + \varepsilon_n$

Solution

本题暂缺

4.39 求下列滑动平均模型的协方差函数和相关函数:

(1) $X_n = \varepsilon_n - 0.5\varepsilon_{n-1} - 0.5\varepsilon_{n-2}$

(2) $X_n = \varepsilon_n + 0.6\varepsilon_{n-1} - 0.2\varepsilon_{n-2} - 0.1\varepsilon_{n-3}$

Solution

本题暂缺

4.40 设 $X_n = \varepsilon_n + \beta[\varepsilon_{n-1} + \gamma\varepsilon_{n-2} + \gamma^2\varepsilon_{n-3} + \cdots]$, 这里 β 和 γ 为常数,$|\gamma| < 1$, 记 $\alpha = \gamma - \beta$, $|\alpha| < 1$. 求 X_{n+1} 根据 $\{X_k, k \leqslant n\}$ 的线性最佳预报.

Solution

本题暂缺

4.41 考虑 AR(2) 模型:$X_n = 1.8X_{n-1} + 0.8X_{n-2} + \varepsilon_n$, 求一步预报及 $\ell > 1$ 步预报 $\hat{X}_{n+1|n}, \hat{X}_{n+\ell|n}$.

Solution

本题暂缺

4.42 考虑 AR(2) 模型:$X_n = X_{n-1} - 0.25X_{n-2} + \varepsilon_n$, 求 $\hat{X}_{n+\ell|n}$ 及 $\mathbb{E}[(X_{n+\ell} - \hat{X}_{n+\ell|n})^2]$.

Solution

本题暂缺

参考文献

[1] jkadbear 方兆本著随机过程第三版习题答案
Available at https://github.com/jkadbear/Stochastic_Process

[2] 白鹏. 方兆本等著《随机过程》习题解答 [M].

[3] 刘杰班助教 随机过程习题课

[4] 郑班助教 随机过程作业习题解答

[5] 郑老师 习题课讲义

A 符号说明

符号	中文	英文
$\mathbb{E}$ E	期望	Expectation
$\mathbb{P}$ P	概率	Probability
$\boldsymbol{P}$	状态转移矩阵	State Transition Matrix
$P_{ij}^{(n)}$	i 到 j 的 n 步转移概率	n-step transition probability from i to j
$X \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda)$	指数分布	Exponential Distribution
$X \sim \mathrm{Poi}\,(\lambda)$	泊松分布	Poisson Distribution