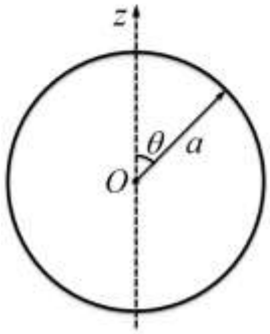
中国科学技术大学 2016—2017 学年第二学期期末考试参考答案

第一题 (20 分) 已知半径为 a 的球壳上的电势分布为

$$\varphi(r,\theta)\big|_{r=a}=V_0\cos 2\theta$$



其中 V_0 为已知常数。球内电势有限，而当 $r\to\infty$ 时，有 $\varphi\to 0$。

(1) 试计算球壳内外的电势；

(2) 试求球壳内、外的电场；

(3) 试确定空间的电荷分布?

解答：(1) 问题具有转动对称性，一般解为 $\varphi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$

由于 $P_0(\cos\theta)=1,\quad P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$，因而

$$\varphi(r,\theta)\big|_{r=a}=V_0\cos 2\theta=V_0\left(2\cos^2\theta-1\right)=\frac{V_0}{3}\left[4P_2(\cos\theta)-P_0(\cos\theta)\right]$$

不妨设球内电势为 $\varphi_1(r,\theta)=A_0P_0(\cos\theta)+A_2r^2P_2(\cos\theta)$

比较 $\varphi_1(a,\theta)=\varphi(r,\theta)\big|_{r=a}$ 得到 $A_0=-\frac{V_0}{3}$ and $A_2=\frac{4V_0}{3a^2}$

因而 $\varphi_1(r,\theta)=-\frac{V_0}{3}\left(1+2\frac{r^2}{a^2}-6\frac{r^2}{a^2}\cos^2\theta\right)$

不妨设球外电势为 $\varphi_2(r,\theta)=\frac{B_0}{r}P_0(\cos\theta)+\frac{B_2}{r^3}P_2(\cos\theta)$

比较 $\varphi_2(a,\theta)=\varphi(r,\theta)\big|_{r=a}$ 得到 $B_0=-\frac{V_0a}{3}$ and $B_2=\frac{4V_0a^3}{3}$

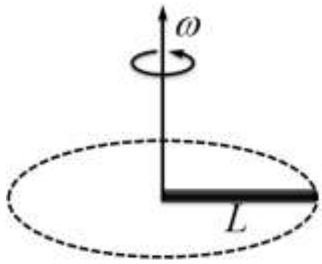
因而 $\varphi_2(r,\theta)=-\frac{V_0}{3}\left(\frac{a}{r}+2\frac{a^3}{r^3}-6\frac{a^3}{r^3}\cos^2\theta\right)$

(2) 电场 $\vec{E}_1=-\nabla\varphi_1=\frac{4V_0r}{3a^2}\left(1-3\cos^2\theta\right)\hat{r}+\left(\frac{4V_0r}{a^2}\cos\theta\sin\theta\right)\hat{\theta}$

$$\vec{E}_2=-\nabla\varphi_2=-\frac{V_0a}{3r^2}\left(1+6\frac{a^2}{r^2}-18\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right)\hat{r}+\left(\frac{4V_0a^3}{r^4}\cos\theta\sin\theta\right)\hat{\theta}$$

(3) 电荷 $\sigma=\varepsilon_0\hat{r}\cdot\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=\frac{\varepsilon_0V_0}{3a}(15\cos 2\theta+4)$

第二题 (20 分) 总电量为 Q、长为 L 的均匀带电细棒绕着与其垂直的轴以角速度 ω 转动，设转轴经过细棒一端，并且 $\omega << c/L$。



(1) 写出转动细棒的电偶极矩；

(2) 写出转动细棒电偶极辐射功率的平均值；

(3) 写出转动细棒的磁偶极矩及磁偶极辐射功率的平均值。

解答：(1) 由于 $p_0 = \int_0^L \frac{Q}{L} r dr = \frac{QL}{2}$，所以 $\vec{p} = \frac{QL}{2}(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)$，

写为复数形式为 $\vec{p} = \frac{QL}{2}(\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\omega t}$

(2) 由于 $\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = \frac{\omega^4 \mu_0}{32\pi^2 c}|\vec{p}\times\hat{r}|^2$，而

$$|\vec{p}\times\hat{r}|^2 = \vec{p}\cdot\vec{p}^* - (\vec{p}\cdot\hat{r})(\vec{p}^*\cdot\hat{r}) = \frac{Q^2L^2}{4}\left[(\hat{x}+i\hat{y})\cdot(\hat{x}-i\hat{y}) - (\hat{x}\cdot\hat{r}+i\hat{y}\cdot\hat{r})(\hat{x}\cdot\hat{r}-i\hat{y}\cdot\hat{r})\right]$$
$$= \frac{Q^2L^2}{4}\left\{2 - \left[(\hat{x}\cdot\hat{r})^2 + (\hat{y}\cdot\hat{r})^2\right]\right\} = \frac{Q^2L^2}{4}\left\{2 - \left[1-(\hat{z}\cdot\hat{r})^2\right]\right\} = \frac{Q^2L^2}{4}(1+\cos^2\theta)$$

因而 $\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = \frac{\omega^4\mu_0 Q^2L^2}{128\pi^2 c}(1+\cos^2\theta)$

又由于 $\int(1+\cos^2\theta)d\Omega = 2\pi\int_0^\pi(1+\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = 2\pi\int_{-1}^{+1}(1+u^2)du = \frac{16\pi}{3}$

所以 $\langle P\rangle = \int\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega}d\Omega = \frac{\omega^4\mu_0 Q^2L^2}{24\pi c}$

(3) 磁偶极矩为 $\vec{m} = \frac{1}{2}\int_0^L \vec{r}\times\frac{Q}{L}\vec{v}dr = \frac{Q}{2L}\int_0^L \vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})dr = \hat{z}\frac{\omega Q}{2L}\int_0^L r^2 dr = \hat{z}\frac{\omega QL^2}{6}$

由于 $\vec{m}$ 不随时间变化，所以没有磁偶极辐射。

第三题(20 分) 一根无限长电中性直导线载有如下描述的随时间变化的电流:

$$I(t)=\begin{cases}0 & \text{for } t\le 0\\ I_0 & \text{for } t>0\end{cases}$$

(1) 试确定到导线的距离为 s 的点处在 t 时刻的电磁场;

(2) 在极限 $ct\to\infty$ 下，电磁场趋于什么？在极限 $s\to 0$ 下， 电磁场又趋于什么？

解答：(1) 由于导线是电中性的，因而标量势为零。

设导线位于 z 轴上，则在 P 点的推迟矢量势为

$$\vec{A}(s,t)=\hat{z}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{I(t_r)}{\mathbb{R}}dz=\hat{z}\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\int_{|z|\le\sqrt{c^2t^2-s^2}}\frac{dx}{\sqrt{s^2+z^2}}$$

当 $t<s/c$ 时，矢量势为零，因而电磁场也为零。而当 $t\ge s/c$ 时，有

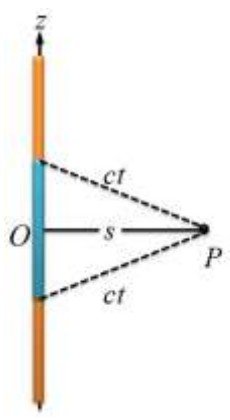
$$\vec{A}(s,t)=\hat{z}\frac{\mu_0 I_0}{5\pi}\times 2\int_0^{c^2t^2-s^2}\frac{dx}{\sqrt{s^2+z^2}}=\hat{z}\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\left[\ln\left(z+\sqrt{s^2+z^2}\right)\right]_0^{\sqrt{c^2t^2-s^2}}=\hat{z}\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\left(\frac{ct+\sqrt{c^2t^2-s^2}}{s}\right)$$

电场: $\vec{E}(s,t)=-\partial_t\vec{A}=-\hat{z}\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi}\dfrac{c}{\sqrt{c^2t^2-s^2}}$

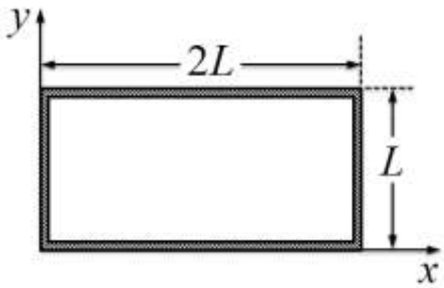
磁场: $\vec{B}(s,t)=\nabla\times\vec{A}=-\hat{\phi}\partial_s A_z=+\hat{\phi}\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi s}\dfrac{ct}{\sqrt{c^2t^2-s^2}}$

(2) 当 $t\to\infty$ 时回到了静态情形: $\vec{E}(s,t\to\infty)=0$ and $\vec{B}(s,t\to\infty)=\hat{\phi}\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi s}$

当 $s\to 0$ 时: $\vec{E}(s\to 0,t)=-\hat{z}\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi t}$ and $\vec{B}(s\to 0,t)=+\hat{\phi}\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi s}$



第四题 (20 分) 考察如图所示的矩形波导管：在 z 方向上无限长，横向尺度为 $L_x=2L$、$L_y=L$。设管壁为理想导体。



(1) 试写出管壁上 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 满足的边界条件；

(2) 试写出最低模式的电磁场 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 的表达式；

(提示：最低模式的电场只有 y 分量)

(3) 对于可以在波导管中传输的最低模式的电磁波，求其相速度以及群速度；

(4) 波导管中容许传播的波模很自然地可以分为两类，这两类分别是什么？物理上它们有什么么不同？

解答：(1) 由于管壁为理想导体，因而有边界条件 $\hat{n}\times\vec{E}\big|_S=0$ and $\hat{n}\cdot\vec{B}\big|_S=0$

其中 $\hat{n}$ 垂直于管壁。或用电磁场在传播方向(z 轴)上的分量表示为 $E_z\big|_S=0$ and $\left.\dfrac{\partial B_z}{\partial z}\right|_S=0$

(2)由于最低模式电场只有 y 分量，故可设 $\vec{E}(\vec{r},t)=\hat{y}E(x,y)e^{i(hz-\omega t)}$ 而 $\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}(x,y)e^{i(hz-\omega t)}$

由 Faraday 定律以及 Ampere-Maxwell 定律可得 $\nabla\times\vec{E}=+i\omega\vec{B}$ and $\nabla\times\vec{B}=-\dfrac{i\omega}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

由其横向的分量方程得到

$$-ihE_y=i\omega B_x \quad (\text{I}a) \qquad \partial_y B_z=0 \quad (\text{I}c)$$

$$B_y=0 \quad (\text{I}b) \qquad ihB_x-\partial_x B_z=-\left(i\omega/c^2\right)E_y \quad (\text{I}d)$$

其中，$(\text{I}c)$意味着 $B_z=B_z(x)$，而由$(\text{I}a)$与$(\text{I}d)$得到

$$B_x=i\frac{h}{\gamma^2}\frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (\text{II}a) \quad \text{and} \quad E_y=-\frac{\omega}{h}B_x=-i\frac{\omega}{\gamma^2}\frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (\text{II}b)$$

其中 $\gamma^2=\dfrac{\omega^2}{c^2}-h^2 \quad (\text{III})$

利用$(\text{II}a)$式以及 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 可以得到 $B_z(x)$ 满足的方程：

$$\frac{ih}{\gamma^2}\frac{\partial^2 B_z(x)}{\partial x^2}+ihB_z(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 B_z(x)}{\partial x^2}+\gamma^2 B_z(x)=0$$

其满足边界条件 $\left.\dfrac{\partial B_z}{\partial n}\right|_S=0$ that is $\left.\dfrac{\partial B_z}{\partial x}\right|_{x=0,2L}=0$

的解为 $B_z=B_0\cos\gamma x$，其中 $\gamma=\pi/(2L)$。因此，在该模式下波导管中的电磁场为

$$B_z=B_0\cos\frac{\pi x}{2L}e^{i(hz-\omega t)},\quad B_x=-i\frac{2hL}{\pi}B_0\sin\frac{\pi x}{2L}e^{i(hz-\omega t)},\quad E_y=i\frac{2\omega L}{\pi}B_0\sin\frac{\pi x}{2L}e^{i(hz-\omega t)}$$

(3) 最低模式的色散关系可由(III)以及 $\gamma=\pi/(2L)$ 得到：$\omega=c\sqrt{h^2+\pi^2/(4L^2)}$

相速度为 $v_p=\dfrac{\omega}{h}=c\sqrt{1+\pi^2/(4h^2L^2)}$；群速度为 $v_g=\dfrac{\partial\omega}{\partial h}=\dfrac{c}{\sqrt{1+\pi^2/(4h^2L^2)}}=\dfrac{c^2}{v_p}$

(4) 波导管中的行波可分为两类：横电(TE：$E_z=0$)与横磁(TM：$B_z=0$)

第五题 (20 分) 两重叠的无限长均匀线电荷分布于 K 系的 x 轴上。相对于 K 系，线 a 静止而线 b 以速度 $(3/5)c$ 沿着 x 轴正方向运动，并且 K 系中测量的线 a 与线 b 的线电荷密度等量异号，即 $\lambda_a=\lambda=-\lambda_b$。

(1) 试写出 K 系中的电场 $\vec{E}$ 与磁场 $\vec{B}$；

(2) 试写出到 x 轴的距离为 s 的静止检验点电荷 $+q$ 受到的合力；

(3) 已知在 K' 系中线 b 静止，试写出 K' 系的电场 E' 与磁场 $\vec{B}'$；

(4) 在 K' 系，(2)问在 K 系中静止的检验电荷 $+q$ 向后运动，试写出在 K' 系中 $+q$ 受到的电力、磁力以及合力。

解答：(1) 在 K 系中，由于导线整体电中性，因此 $\vec{E}=0$。净电流为 $I=-\lambda\dfrac{3}{5}c$，所以磁场

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}=-\frac{3\mu_0 c\lambda}{10\pi s}\hat{\phi}，\text{其中 } s=\sqrt{y^2+z^2}\text{。}$$

(2) 作用于检验电荷上的电力与磁力均为零，合力为零。

(3) 在 K' 系中，两线的电荷密度大小不相等：

$$\lambda_a'=\frac{\lambda}{\sqrt{1-(3/5)^2}}=\frac{5}{4}\lambda \quad \text{and} \quad \lambda_b'=-\lambda\sqrt{1-(3/5)^2}=-\frac{4}{5}\lambda$$

净电荷密度为 $\lambda'=\lambda_a'+\lambda_b'=\dfrac{9}{20}\lambda$，净电流为 $I'=\lambda_a'\left(-\dfrac{3}{5}c\right)=-\dfrac{3}{4}\lambda c$，所以

$$\vec{E}'=\frac{\mu_0 c^2\lambda'}{2\pi s}\hat{s}=\frac{9\mu_0 c^2\lambda}{40\pi s}\hat{s},\quad \vec{B}'=\frac{\mu_0 I'}{2\pi s}\hat{\phi}=-\frac{3\mu_0 c\lambda}{8\pi s}\hat{\phi}$$

也可 $\vec{E}'=\gamma\vec{v}\times\vec{B}$ 以及 $\vec{B}'=\gamma\vec{B}$ 直接求得，其中 $\gamma=1\big/\sqrt{1-(3/5)^2}=5/4$。

(4) 检验电荷 q 以速度 $(3/5)c$ 向后运动，受到的电力为 $q\vec{E}'=\dfrac{9\mu_0 c^2\lambda q}{40\pi s}\hat{s}$

磁力为 $q\left(-\dfrac{3}{5}c\right)\hat{x}\times\vec{B}'=-\dfrac{9\mu_0 c^2\lambda q}{40\pi s}\hat{s}$

合力为零 (正如相对性原理预期：粒子在一个惯性系中匀速直线运动，在另一个惯性中也是如此)。