12.2.4 广义 Fourier 级数

内积

定义 1 设 $\mathscr{X}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 从 $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射:

$$(x,y)\in\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}$$

称为 $\mathscr{X}$ 上的一个内积, 若对于任意 $x,y,z\in\mathscr{X}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 有

1° $\langle x,x\rangle\geqslant 0$, 且 $\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$. 正性

2° $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ 对称性

3° $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$ 双线性

一个定义了内积的线性空间称为内积空间.

在内积空间中可以定义范数和距离.

设 $\mathscr{X}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的内积空间. 对于 $x \in \mathscr{X}$, 令

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

则 $\|x\|$ 是 $\mathscr{X}$ 上的一个范数. 对于 $x, y \in \mathscr{X}$, 令

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

则 $d(x, y)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的一个距离. 设 x 和 x_n 是 $\mathscr{X}$ 中的点, 若

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

则称 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 若按照这样的收敛, 空间 $\mathscr{X}$ 是完备的 (即, $\mathscr{X}$ 中的基本列收敛到 $\mathscr{X}$ 中的元素), 则称 $\mathscr{X}$ 是 希尔伯特(Hilbert)空间.

设 $x, y \in \mathscr{X}$. 若

$$\langle x, y \rangle = 0,$$

则称为 x 与 y 正交, 记为

$$x \perp y.$$

引理 1 (Schwarts 不等式) 设 x, y 是内积空间 $\mathscr{X}$ 中的元素. 则有

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

等式成立当且仅当 x, y 线性相关.

证明 不妨设 x, y 都非零. 对任意实数 t 有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|tx - y\|^2 &= \langle tx - y, tx - y\rangle \\ &= t^2\|x\|^2 - 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2, \end{aligned}$$

因此这个关于变量 t 的一元二次式的判别式为非正, 即,

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0,$$

因而

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

等式成立仅当存在实数 t 使得 $tx - y = 0$, 即, x, y 线性相关.

设 M 是 $\mathscr{X}$ 中的子集, 若对任意 $x, y \in M$, 有

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0, & x \neq y \\ 1, & x = y, \end{cases}$$

则称 M 是 $\mathscr{X}$ 的一个规范正交集. $\mathscr{X}$ 中的一列元素 $\{x_n\}$ 是规范正交集时, 就称为规范正交系.

引理 2 规范正交集中任意有限个元素组成的集合是线性无关的.

证明 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是规范正交的, 且

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n = 0.$$

则

$$a_k = \langle a_k e_k, e_k\rangle = \langle a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, e_k\rangle = \langle 0, e_k\rangle = 0.$$

这就说明 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是线性无关的.

引理 3 (勾股定理) 设 x, y 是 $\mathscr{X}$ 中的元素且 $x \perp y$. 则有

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

更一般地, 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $\mathscr{X}$ 中互相正交的元素, 则有

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

证明 事实上, 若 $j \neq k$, 则有 $\langle x_j, x_k\rangle = 0$, 因而

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j=1}^n x_j\Big\|^2 &= \Big\langle \sum_{j=1}^n x_j, \sum_{k=1}^n x_k \Big\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle x_j, x_k\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle x_j, x_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2\end{aligned}$$

Gram-Schmidt **标准正交化** 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中一列线性无关的元素. 可以构造规范正交系 $\{e_n\}$ 使得 e_k 是 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ 的线性组合.

第一步: 取

$$e_1 = x_1/\|x_1\|.$$

第二步: 令

$$v_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1.$$

则 $v_2 \neq 0$, 且 $v_2 \perp e_1$. 令

$$e_2 = v_2/\|v_2\|.$$

第三步: 假设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}\}$ 已构造好的. 令

$$v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k\rangle e_k.$$

则 $v_n \neq 0$, 且 $v_n \perp e_k$ $k = 1, 2, \cdots, n-1$. 令

$$e_n = v_n/\|v_n\|.$$

广义 Fourier 级数

设 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots\}$ 是内积空间 $\mathscr{X}$ 中一组规范正交系, 对于 $f \in \mathscr{X}$ 称

$$a_n = \langle f, \varphi_n \rangle$$

为 f 的广义 Fourier 系数. 称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ 为 f 的广义 Fourier 级数, 记为

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n.$$

称形如

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

(α_n 都是实数) 为 n 次 φ—多项式. 在所有 n 次 φ—多项式中, 广义Fourier 级数的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

到 f 的距离最短. 事实上, 因为

$$
\begin{aligned}
\Delta_n = \|G_n - f\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k - f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k - f \right\rangle \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \\
&= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \\
&\geqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2,
\end{aligned}
$$

等号成立当且仅当 $\alpha_k = a_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ 时成立. 因此, 有

$$
\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{12.1}
$$

这称为广义 Fourier 级数的 Bessel 不等式.

完全规范正交集

定义 2 设 $\mathscr{X}$ 是一个内积空间, M 是 $\mathscr{X}$ 的一个规范正交集, 若 M 张成的线性空间 $\mathrm{span}(M)$ 在 $\mathscr{X}$ 中稠密, 即

$$\overline{\mathrm{span}(M)} = \mathscr{X},$$

则称 M 是完全规范正交集.

定理 1 设 $\mathscr{X}$ 是一个内积空间. 若 M 是 $\mathscr{X}$ 的一个完全规范正交集, 则

$$x \perp M \Longrightarrow x = 0. \tag{12.2}$$

证明 设 $x \in \mathscr{X}$ 且 $x \perp M$. 因而 $x \perp \mathrm{span}(M)$. 因为 M 是完全的, 所以存在 $x_n \in \mathrm{span}(M)$, 使得 $x_n \to x$, 即, $\|x_n - x\| \to 0$.

因为

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle &= \|x_n\|^2 - 2\langle x, x_n\rangle + \|x\|^2 \\ &= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 \\ &\geqslant \|x\|^2,\end{aligned}$$

所以必有 $\|x\| = 0$, 因而 $x = 0$.

定理 2 设 $\mathscr{X}$ 是一个希尔伯特空间. 若 $M = \{\varphi_1, \varphi_2 \cdots\}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个规范正交系, 则 M 是完全规范正交系的充分必要条件是: 对任意 $f \in \mathscr{X}$, 有 Parseval 等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \|f\|^2, \tag{12.3}$$

其中 $a_k = \langle f, \varphi_k\rangle$ 是 f 的广义 Fourier 系数.

证明 (必要性) 设 M 是完全规范正交系, 对于 $f \in \mathscr{X}$, 令

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k.$$

根据 Cauchy 收敛准则, 和 Bessel 不等式知, 上面的级数在 $\mathscr{X}$ 中收敛, 即, $g \in \mathscr{X}$. 由于对于任意 φ_n 有

$$\langle f-g, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle - \langle g, \varphi_n \rangle = a_n - a_n = 0.$$

因此根据 M 的完全性, 可知 $f-g=0$, 即

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k.$$

再由 M 的规范正交性, 即得

$$\|f\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

(充分性) 设对任意 $f \in \mathscr{X}$, (12.3) 成立. 若 $f \perp M$, 则从 Parseval 等式可得 $\|f\|=0$, 因而 $f=0$. 这就说明 M 是完全的.

定义 3 设 $\mathscr{X}$ 是一个内积空间. $M = \{\varphi_1, \varphi_2 \cdots\}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个规范正交系. 若对于任意 $f \in \mathscr{X}$, f 的广义 Fourier 级数都收敛于 f, 即,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k,$$

则称 M 是完备的规范正交系.

在希尔伯特空间中, 规范正交系是完全的, 完备的, 以及 Parseval 等式成立这三件事情是等价的.

现在考虑线性空间 $C[-1,1]$. 对于 $f,g\in C[-1,1]$, 可定义内积

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx.$$

例 1 设

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\ \ (n=0,1,2,\cdots)$$

它是一个首项系数为 $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ 的 n 次多项式. 在区间 $[-1,1]$ 上, $\{P_0,P_1,\cdots\}$ 构成一个正交系.

为了验证它们的正交性, 当 $n\neq m$ 时, 不妨设 $n>m$, 则

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=C_{nm}\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\cdot\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx,$$

其中

$$C_{nm}=\frac{1}{2^{n+m}n!m!}.$$

由于当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时,

$$\left.\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^2-1)^n\right|_{x=\pm 1} = 0,$$

连续 n 次使用分部积分法得到

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \cdot \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx\\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \cdot \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^m dx,\end{aligned}$$

但 $n > m$, 故 $\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^m = 0$, 从而

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0.$$

另一方面当 $n = m$ 时, 对积分

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx,$$

连续 n 次使用分部积分法, 就有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1} t dt \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\ &= \frac{2}{2n+1}.\end{aligned}$$

这就证明了所给函数系为正交系并且 $\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n\}$ 是规范正交系. $P_n(x)$ 称为 n 次勒让德 (Legrendre) 多项式, 它是下面的勒让德微分方程的解

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0.$$

勒让德方程是物理学和其他技术领域常常遇到的一类常微分方程, 当试图在球坐标中求解三维拉普拉斯方程（或相关的其他偏微分方程）时, 问题便会归结为勒让德方程的求解.

由勒让德多项式的定义可知 $P_0 = 1$, $P_1(x) = x$, 一般地, 当 n 是奇数时, $P_n(x)$ 是奇函数; 当 n 是偶数时, $P_n(x)$ 是偶函数.

三个相邻的勒让德多项式满足下面的递推公式:

定理 3 (递推公式) 设 $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是勒让德多项式. 则有

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}.$$

证明 因为 $\{P_0, P_1, \cdots, P_{n+1}\}$ 是 $n+1$ 次多项式空间的一组基, 所以存在常数 $c_0, c_0, \cdots, c_{n+1}$ 使得

$$xP_n = c_0P_0 + c_1P_1 + \cdots + c_{n+1}P_{n+1}.$$

由勒让德多项式的正交性, 得 $c_k = \frac{\langle P_k, xP_n\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle}$. 当 $k < n-1$ 时, P_n 的次数比 xP_k 的次数高, 因而 P_n 与 xP_k 正交. 故,

$$\langle P_k, xP_n\rangle = \langle xP_k, P_n\rangle = 0.$$

即, $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-2} = 0$. 于是

$$xP_n(x) = c_{n-1}P_{n-1}(x) + c_nP_n(x) + c_{n+1}P_{n+1}(x). \tag{12.4}$$

比较首项系数, 得

$$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = c_{n+1}\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}.$$

由此, 得 $c_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}$. 注意到 $P_n^2(x)$ 是偶函数, 有

$$\langle P_n, xP_n\rangle = \int_{-1}^{1} xP_n^2(x)\,dx = 0.$$

这说明 $c_n = 0$. 容易验证, 对任意 k 有 $P_k(1) = 1$. 在 (12.4) 中令 $x = 1$, 得 $c_{n-1} = 1 - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$. 于是

$$xP_n(x) = \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x) + \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x).$$

这等价于递推公式. 证毕

因为 $P_0 = 1$, $P_1(x) = x$, 所以利用上面的递推公式可得

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

另外，考虑微分后还有以下递推关系:

$$\frac{x^2-1}{n}\cdot\frac{dP_n}{dx}=xP_n-P_{n-1}$$

$$(2n+1)P_n=\frac{d}{dx}(P_{n+1}-P_{n-1}).$$

其中最后一个公式在计算勒让德多项式的积分时经常用到.