中国科学技术大学 2018-2019 学年第二学期
数学分析(B2) 期末考试试卷参考解答与分析

考试结束了，一次考试不仅仅为了一个成绩，更重要的是得到一次进步。现将本次考试题做一个解答和分析，希望同学们利用假期时间认真看一看，从中有所收益。难免有错，敬请指正。祝同学们假期快乐，更祝同学们在今后的学习中不断进步。

一、(本题 10 分) 设已知方程 $\phi\left(x+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}\right)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$. 求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 本题主要考察对复合函数求导和隐函数求导，由于题目已经说明方程 $F(x,y,z)=\phi\left(x+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}\right)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$. 因此，

$$F'_z=\phi'\left(x+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\neq 0,$$

所以 $\phi'\neq 0$. 可记 $w=x+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}$. 且 $z=f(x,y)$, 则分别对 x,y 求导, 得

$$\phi'(w)\cdot\left(1+\frac{z'_x}{y}+\frac{z'_x x-z}{x^2}\right)=0,$$
$$\phi'(w)\cdot\left(\frac{z'_y y-z}{y^2}+\frac{z'_y}{x}\right)=0.$$

因此,

$$1+\frac{z'_x}{y}+\frac{z'_x x-z}{x^2}=0,\quad \frac{z'_y y-z}{y^2}+\frac{z'_y}{x}=0.$$

因而

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-\frac{x^2y}{x+y}.$$

二、(本题 10 分) 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内的部分面积。

解 首先弄清楚所求曲面的定义域。记 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2x\}$. 它是一个半径为1 的圆，面积为 $\sigma(D)=\pi$.

对于曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 有 $z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z'_x=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

于是，利用求曲面$z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ 面积的公式

$$\sigma(S)=\iint_D\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy$$

那么所求曲面面积为

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{2}\,dxdy \\
&= \sqrt{2}\cdot\sigma(D) = \sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

三、(本题 10 分) 求积分 $I = \iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dV$**，其中 V 为椭球** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **内部。**

解 首先作变换 $x=au, y=bv, z=cw$ 把问题化简，不要忘了 Jacobi：$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=abc.$

这样积分就简化成

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dV \\
&= \iiint\limits_B \sqrt{1-u^2-v^2-w^2}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}dudvdw \\
&= abc\iiint\limits_B \sqrt{1-u^2-v^2-w^2}dudvdw
\end{aligned}$$

这里 $B=\{(u,v,w)\,|\,u^2+v^2+w^2\leqslant 1\}.$

再作球坐标变换 $u=r\sin\theta\cos\varphi,\ v=r\sin\theta\sin\varphi,\ w=r\cos\theta,\ r\in(0,1),$ $\theta\in(0,\pi),\ \varphi\in(0,2\pi).$ 则有

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B \sqrt{1-u^2-v^2-w^2}dudvdw &= \iiint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\,dr\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\,d\varphi \\
&= 4\pi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\,dr \\
&= 4\pi\cdot\frac{\pi}{16} = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

故 $I=\frac{\pi^2}{4}abc$. 当然，你也可以将上述两个变换合并成一步。这里涉及一个单变量积分 $\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot r^2\,dr$, 可以用换元法，令 $r=\sin t$

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot r^2\,dr&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^2 t\,dt\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 u\,du\\&=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2u}{2}\,du=\frac{1}{16}\pi\end{aligned}$$

四、(本题 10 分) 设 $\vec{v}=\dfrac{y^2+z^2}{r^3}\mathbf{i}-\dfrac{xy}{r^3}\mathbf{j}-\dfrac{xz}{r^3}\mathbf{k}$ 是定义在 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上的向量场，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(1) 证明：$\vec{v}$ 的旋度 $\nabla\times\vec{v}=0$; **(2) 求向量场 $\vec{v}$ 的势函数。**

解

(1) 就是验证，可以一个一个分量算：$\nabla\times\vec{v}$ 的第一个分量等于

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial y}\frac{xz}{r^3}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{xy}{r^3}\\&=\frac{3xz}{r^4}\frac{y}{r}-\frac{3xy}{r^4}\frac{z}{r}=0;\end{aligned}$$

第二个分量等于

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z}\frac{y^2+z^2}{r^3}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{xz}{r^3}\\&=\frac{2z}{r^3}-\frac{3(y^2+z^2)}{r^4}\frac{z}{r}+\frac{z}{r^3}-\frac{3xz}{r^4}\frac{x}{r}\\&=\frac{1}{r^5}(3zr^2-3zr^2)=0;\end{aligned}$$

第三个分量等于

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial x}\frac{xy}{r^3}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{y^2+z^2}{r^3}\\&=-\frac{y}{r^3}+\frac{3xy}{r^4}\frac{x}{r}-\frac{2y}{r^3}+\frac{3(y^2+z^2)}{r^4}\frac{y}{r}\\&=\frac{1}{r^5}(-3yr^2+3yx^2+3y(y^2+z^2))=0.\end{aligned}$$

(2) 就是解方程，也就是要求一个函数 ϕ , 使得 $\nabla\phi=\vec{v}$, 比较第三个分量 $\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=-\dfrac{xz}{r^3}$ 可得

$$\phi(x,y,z)=\frac{x}{r}+f(x,y).$$

这里 $f(x,y)$ 是积分常数。代入到第二个分量 $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=-\dfrac{xy}{r^3}$ 可得 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$. 最后利用

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{r^3}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r}$$

可得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, 所以

$$\phi=\frac{x}{r}+c.$$

当然，如果你猜出来了也可以，但是需要验证!

五、(本题 15 分) 设向量场 $\vec{v}=-x\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-\frac{1}{4}}\mathbf{k}$**，曲面** $S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$**, 它的正向是外法向。求向量场** $\nabla\times\vec{v}$ **在定向曲面** S **上的积分**

$$\iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot d\vec{S}.$$

解　这一题有两种方法。

方法1：直接计算可得

$$\nabla\times\vec{v}=\frac{y}{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}}\mathbf{i}-\frac{x}{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}}}\mathbf{j}+y\mathbf{k}. \qquad (......2分)$$

单位球面的单位外法向场 $\vec{n}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，所以

$$\nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}=yz.$$

将曲面 S 分为两部分：$S^+:\ z=\sqrt{1-x^2-y^2},\quad S^{-1}:\ z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, 他们有相同的面积元 $dS=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$. 所以

$$\begin{aligned}
&\iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot d\vec{S}=\iint_S yzdS\\
&=\iint_{S^+} yzdS+\iint_{S^-} yzdS\\
&=\iint_{x^2+y^2<1} y\sqrt{1-x^2-y^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy-\\
&\quad\ \iint_{x^2+y^2<1} y\sqrt{1-y^2-z^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy\\
&=0
\end{aligned}$$

方法2：记 $\vec{F}=\frac{2}{\sqrt{3}}y\mathbf{i}-\frac{2}{\sqrt{3}}x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$. 则在 S 上 $\nabla\times\vec{v}=\vec{F}$. 因为 $\vec{F}$ 在 $B=\{x^2+y^2+y^2\leqslant 1\}$ 上光滑. 故, 由 Gauss 公式, 有

$$\iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot d\vec{S}=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint_B \mathrm{div}\vec{F}\,d\sigma=0.$$

六、(本题 15 分) 计算无穷积分 $I=\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2e^{t(2-t)}\,dt.$

解　类似这样的题目，就是要设法化成“标准”形式，所谓标准形式就是能够用 Γ 函数表示，并利用 Γ 函数的特殊值得到结果。

$$\begin{aligned}
I&=\int_1^{+\infty} t^2e^{-(t-1)^2+1}\,dt\\
&=\int_0^{+\infty}(u+1)^2e^{-u^2+1}\,du \qquad\qquad (\text{作变换 } t=u+1)\\
&=e\left[\int_0^{+\infty}u^2e^{-u^2}\,du+2\int_0^{+\infty}ue^{-u^2}\,du+\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du\right]\\
&=e\left[\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sqrt{w}e^{-w}\,dw+\int_0^{+\infty}e^{-w}\,dw+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}w^{-\frac{1}{2}}e^{-w}\,dw\right]\\
&=e\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)+\Gamma(1)+\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]\\
&=e\left(\frac{1}{4}\sqrt{\pi}+1+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)\\
&=e\left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi}+1\right)
\end{aligned}$$

七、(本题 15 分) 设 $f(x)=\cosh(x-1),\ 0\leqslant x\leqslant 1.$ **求该函数的余弦级数, 并证明:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2+1}=\frac{1}{e^2-1}.$$

解　将 $f(x)$ 偶延拓到 $[-1,1]$ 使之成为偶函数, 再以 2 为周期延拓到 $(-\infty,\infty)$ 使之成为整个数轴上的偶函数, 此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续. 但是在具体计算 Fourier系数时，并不需要将上述结果的表示写出来，因为计算系数的积分只涉及到 $[0,1]$ 区间。注意本题不再是标准的 $[-\pi,\pi]$, 而是 $[-1,1]$.

由于是偶延拓，所以 $b_n=0$, 在计算 a_n 时,利用两次分部积分即可。

$$a_0=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1\cosh(x-1)dx=2\sinh(x-1)\Big|_0^1=2\sinh 1.$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^1 \cosh(x-1)\cos n\pi x\,dx \\
&= 2\left[\frac{\cosh(x-1)}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sinh(x-1)\sin n\pi x\,dx\right] \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sinh(x-1)\sin n\pi x\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\sinh(x-1)\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cosh(x-1)\cos n\pi x\,dx\right] \\
&= \frac{2\sinh 1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2}a_n.
\end{aligned}
$$

故, $a_n = \frac{2\sinh 1}{n^2\pi^2+1}$.

于是所求 Fourier 级数为

$$\cosh(x-1) = \sinh 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh 1}{n^2\pi^2+1}\cos n\pi x,\ \ x\in[0,1].$$

在上式中取 $x=0$ 可得（注意此点不是间断点）

$$\cosh 1 = \sinh 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sinh 1}{n^2\pi^2+1}.$$

因而,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2+1} = \frac{1}{e^2-1}.$$

这里涉及到关于双曲函数的一些简单性质。所谓双曲函数定义如下（第一册介绍过）

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

它们满足

$$
\begin{aligned}
&(\cosh x)' = \sinh x,\ (\sinh x)' = \cosh x. \\
&\cosh^2 x - \sinh^2 = 1
\end{aligned}
$$

等等类似三角函数的公式。双曲函数并不复杂，但是也是常用的函数，希望大家掌握。

八、(本题 15 分, 每小题 5 分) 设 $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx$. **求证:** 1) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

2) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导.

3) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导且满足方程 $F''(t)-F(t)=-\dfrac{1}{t}$.

证明

1) 解决第一问是比较简单的，只要利用 Weierstrass 判别法就可以。记 $f(x,t)=\frac{\sin tx}{1+x^2}$. 则 $|f(x,t)|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$. 由于 $f(x,t)$ 是二元连续函数, 且 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ 收敛, 根据 Weierestrass 判别法知 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

2) 要证明积分对参变量 t 在 $(0,+\infty)$可导，首先对被积函数求偏导, 然后判断偏导数的积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}\,dx$ 在什么范围内一致收敛。显然 $\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{x\cos tx}{1+x^2}$. 直接判断 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}\,dx$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上一致收敛是有困难的。因此，必须牢记题目要证明的是 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导. 因此，任给一点 $t>0$, 一定存在 $t_0>0$ 使得 $t>t_0>0$, 这样如果能证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}\,dx$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上积分一致收敛, 那么函数 $F(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$上可导，当然在t 可导，根据t 的任意性，就证得 $F(t)$ 在$(0,+\infty)$ 上可导。这也是我在讲课中反复强调的一点，求导是局部问题，一致是整体问题。只要在包含任意一点（局部）的区间内（整体）一致收敛，就可得到求导的结果。（连续性也有类似情形）。

因为 $\frac{x}{1+x^2}$ 在 $x>1$ 递减趋于 0, 且对于任意 $t_0>0$, $\left|\int_{t_0}^{b}\cos tx\,dx\right|\leqslant\frac{2}{t_0}$. 根据 Dirichlet 判别法知, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上一致收敛. 故, $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且

$$F'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{x\cos tx}{1+x^2}\,dx \tag{1}$$

3) 第三个问题涉及到二阶导数，显然不能直接对参变量求导，因此对 (1) 式右端分部积分, 得

$$\begin{aligned}F'(t)&=-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\frac{(1-x^2)\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx\\&=-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx+\frac{2}{t}\int_0^{+\infty}\frac{x^2\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx.\end{aligned}$$

故,

$$tF'(t)+F(t)=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx. \tag{2}$$

上式还可表为

$$tF'(t)-F(t)=-2\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{(1+x^2)^2}\,dx. \tag{3}$$

因为 $\frac{\sin tx}{(1+x^2)^2}$ 关于 t 的导函数为 $\frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}$, 它有控制函数 $\frac{x}{(1+x^2)^2}$. 根据 Weierestrass 判别法知 $tF'(t)-F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 且

$$(tF'(t)-F(t))'=-2\int_0^{+\infty}\frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

这说明 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有二阶导数, 且

$$tF''(t)=-2\int_0^{+\infty}\frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

对上式右端分部积分, 得

$$\begin{aligned}tF''(t)&=\left.\frac{\cos tx}{1+x^2}\right|_{x=0}^{x=+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{-t\sin tx}{1+x^2}\,dx\\&=-1+t\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx\\&=-1+tF(t).\end{aligned}$$

因而 $F''(t)-F(t)=-\frac{1}{t}$.