

一维不定常流 · III

(受控热核聚变导论 · 第十章)

郑 坚

中国科学技术大学核科学技术学院

2023–2024第二学期

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

1 激波的形成

2 激波与接触间断

3 理想气体激波关系式

4 弱激波

5 任意间断面的演化

对于经典理想气体，前向简单波满足以下方程

$$x = (u + c_s)t + f(u), \text{ and } du = \frac{2}{\gamma - 1} dc_s.$$

由此可以证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{(\gamma + 1)/2}{[(\gamma + 1)t/2 + f'(u)]^2} < 0. \quad (1)$$

因此

$$\frac{\partial u(t + \Delta t)}{\partial x} - \frac{\partial u(t)}{\partial x} \simeq \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Delta t < 0.$$

对于前向压缩型压缩波， $\partial u / \partial x < 0$ ，那么有

$$\left| \frac{\partial u(t + \Delta t)}{\partial x} \right| > \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right|.$$

因此压缩波的波形将越来越陡。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

波形的畸变：绝热稀疏波

对于前向的稀疏波， $\partial u / \partial x > 0$ ，那么有

$$\frac{\partial u(t + \Delta t)}{\partial x} < \frac{\partial u(t)}{\partial x}.$$

因此稀疏波的波形将越来越平缓。

波形的畸变：绝热压缩波

对于前向的压缩波， $\partial u / \partial x < 0$ ，那么有

$$\left| \frac{\partial u(t + \Delta t)}{\partial x} \right| > \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right|.$$

因此压缩波的波形将越来越陡峭。

不断陡化的压缩波将会导致激波的出现。



提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

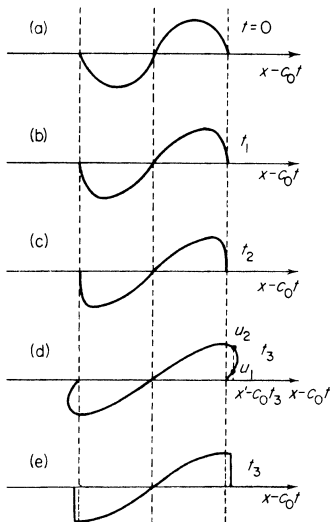
激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结



压缩波的波头最终将发展为间断面。

- (a)-(c)简单波在传播过程中其波前不断陡化；
- (d) 若依然采用特征线理论，将出现非物理的解：流速非单值；
- (e) 实际流体中将会出现间断面—激波，流体发生非等熵流运动。

激波形成的数学判据

在 $x - u$ 平面，激波在拐点处首先形成

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_t = 0, \quad (2a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right)_t = 0. \quad (2b)$$

对于前向的简单波，流体运动的一般形式为

$$x = (c_s + u)t + f(u).$$

上式对流速 u 偏微商一次，有

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_t = \left(\frac{dc_s}{du} + 1\right)t + \frac{df(u)}{du}.$$

对于经典理想气体中的前向简单波有

$$\frac{du}{dc_s} = \frac{\gamma - 1}{2}$$

我们有

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_t = \frac{\gamma + 1}{2}t + \frac{df(u)}{du}.$$

方程两端对 u 再偏微商一次，有

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_t = \frac{d^2 f(u)}{du^2}.$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

由激波出现的条件(2a)，我们得

$$t = -\frac{2df(u)/du}{\gamma + 1}. \quad (3)$$

条件(2b)则变为

$$\frac{d^2f(u)}{du^2} = 0. \quad (4)$$

若激波出现的空间点位于简单波的波头，即 $u = 0$ 处，我们得到前向简单波形成激波的时刻，

$$t = -\frac{f'(0)}{1 + (dc_s/du)}. \quad (5)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

例题

理想气体充满半无限长的圆柱形管道($x \geq 0$)，气体左边侧被一活塞堵住。从时刻 $t = 0$ 开始，活塞从左至右以加速度 a 作匀加速运动，求激波形成的时间。

活塞将在流体中产生一支前向的简单波。利用 $J_- = \text{常数}$ 的性质，再结合理想气体状态方程以及边界条件，有

$$c_s = c_{s0} + \frac{\gamma - 1}{2} u. \quad (6)$$

那么

$$\frac{dc_s}{du} = \frac{\gamma - 1}{2}. \quad (7)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

由简单波的一般方程 $x = [u + c_s(u)]t + f(u)$, 结合(6), 有

$$f(u) = x - \left(c_{s0} + \frac{\gamma + 1}{2} u \right) t. \quad (8)$$

在活塞的面, 有 $w = at$, $X = at^2/2$, 即

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{at^2}{2} - \left(c_{s0} + \frac{\gamma + 1}{2} at \right) t \\ &= -c_{s0}t - \frac{\gamma}{2} at^2. \end{aligned}$$

将 $t = w/a$ 带入上式的右边, 我们就得到函数 $f(u)$ 的具体形式,

$$f(w) = -\frac{c_{s0}}{a} w - \frac{\gamma}{2a} w^2. \quad (9)$$

将(7)和(9)代入方程(5)，我们得到激波产生的时刻

$$t = \frac{2c_{0s}}{a(1+\gamma)}. \quad (10)$$

将函数 $f(u)$ 的具体形式(9)代入方程(8)，我们就得到流速随时间和空间的变化，

$$x - \left(c_{s0} + \frac{\gamma+1}{2}u \right) t = -\frac{c_{s0}}{a}u - \frac{\gamma}{2a}u^2. \quad (11)$$

在激波形成时刻，流速的分布为

$$\frac{u}{c_{s0}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma(1+\gamma)}} \left[1 - \frac{a(1+\gamma)x}{2c_{s0}^2} \right]^{1/2},$$

这里

$$\frac{2c_{s0}^2}{a(1+\gamma)^2} \leq x \leq \frac{2c_{s0}^2}{a(1+\gamma)}.$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

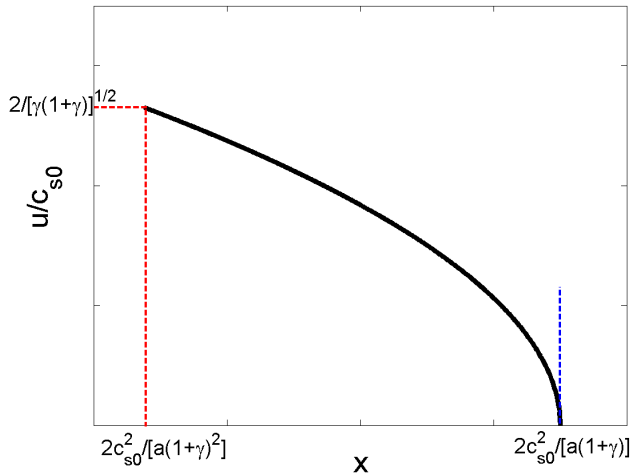
激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结



激波形成时刻的流速分布

激波的形成

- 压缩型简单波最终会形成激波；
- 激波面出现的时空点由以下方程决定

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_t = 0, \quad (12a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right)_t = 0. \quad (12b)$$

- 若激波出现的空间点位于前向简单波的波头，激波出现的时刻为，

$$t = - \frac{f'(0)}{1 + (dc_s/du)}. \quad (13)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

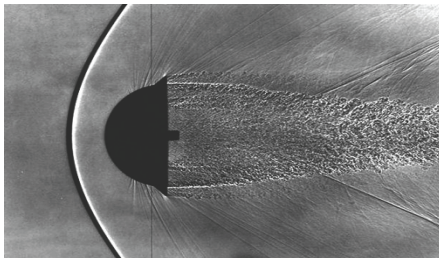
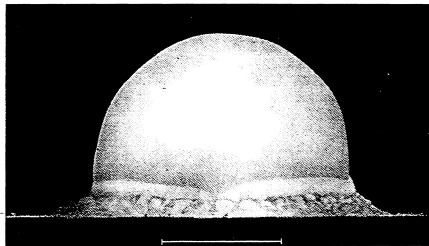
激波的熵增

弱激波关系式

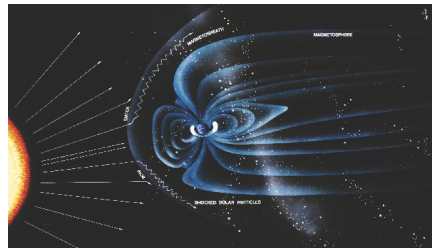
弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结



(NASA)



激波是流体中的间断面，常见于高速流动。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

跃变型物理量

激波的定义就是物理量出现了跃变：

- $\partial \rho / \partial x \Rightarrow \infty$;
- $\partial u / \partial x \Rightarrow \infty$;
- $\partial p / \partial x \Rightarrow \infty$ 。

连续型物理量

流体方程的守恒性质则要求：

- 质量流连续；
- 动量流连续；
- 能量流连续。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

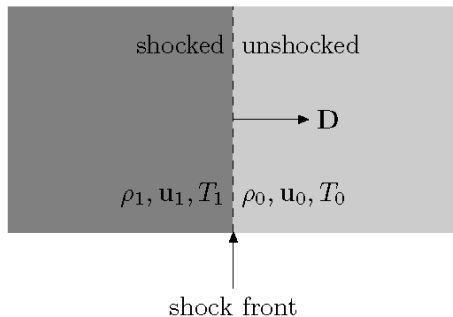
激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结



假定激波以恒定速度 U_s 在流体中从左向右传播，引入新的自变量 $\xi = x - U_s t$ ，那么连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

可以改写为

$$\frac{d}{d\xi} [\rho(u - U_s)] = 0.$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

将变形的连续性方程对激波面两侧积分，有

$$\int_{-0}^{+0} \frac{d}{d\xi} [\rho(u - U_s)] d\xi = 0.$$

因此质量流在激波面两侧是连续的，

$$\rho_1(u_1 - U_s) = \rho_0(u_0 - U_s), \quad (14)$$

这里下标 1 表示冲击后的物理量，0 表示未受冲击的物理量。引入流体相对于激波面的流速

$$v_0 = u_0 - U_s, \quad v_1 = u_1 - U_s, \quad (15)$$

方程(14) 可简写为

$$\rho_1 v_1 = \rho_0 v_0 \equiv j. \quad (16)$$

如果激波传播的速度随时间变化, 即 $U_s = U_s(t)$, 引入新的变量

$$\xi = x - \int^t U_s(t') dt', \quad \tau = t,$$

那么有

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} - U_s(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

连续性方程变为

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} [\rho(u - U_s)] = 0.$$

将方程积分, 由于

$$\int_{-0}^{+0} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} d\xi = \frac{d}{d\tau} \int_{-0}^{+0} \rho d\xi = 0.$$

我们依然能够得到关系式(14)。

激波两侧的关系式与激波是否定态无关。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

由动量守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho uu) = 0,$$

在激波面两侧有关系式

$$p_1 + \rho_1 u_1(u_1 - U_s) = p_0 + \rho_1 u_0(u_0 - U_s).$$

整理一下，

$$p_1 + \rho_1(u_1 - U_s)^2 + \rho_1 U_s(u_1 - U_s) = p_0 + \rho_0(u_0 - U_s)^2 + \rho_0 U_s(u_0 - U_s).$$

再利用关系式(14)，有

$$p_1 + \rho_1(u_1 - U_s)^2 = p_0 + \rho_0(u_0 - U_s)^2. \quad (17)$$

利用相对流速(15)，有

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_0 + \rho_0 v_0^2, \quad (18)$$

由能量守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho \varepsilon \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho \varepsilon + p \right) u \right] = 0,$$

在激波面两侧有关系式

$$\left(\frac{\rho_1 u_1^2}{2} + \rho_1 \varepsilon_1 \right) (u_1 - U_s) + p_1 u_1 = \left(\frac{\rho_0 u_0^2}{2} + \rho_0 \varepsilon_0 \right) (u_0 - U_s) + p_0 u_0. \quad (19)$$

利用关系式(14)和(17), 以及相对流速(15), 有

$$(\rho_1 v_1^2/2 + \rho_1 \varepsilon_1 + p_1) v_1 = (\rho_0 v_0^2/2 + \rho_0 \varepsilon_0 + p_0) v_0. \quad (20)$$

方程(20)还可以利用方程(16)进行简化,

$$v_1^2/2 + h_1 = v_0^2/2 + h_0. \quad (21)$$

这里 $h = \varepsilon + P/\rho = \varepsilon + pV$ 是流体的比焓。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

激波关系式

由连续性方程、动量方程、能量方程得到如下三个激波关系式：

$$\rho_1 v_1 = \rho_0 v_0 = j, \quad (22a)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_0 + \rho_0 v_0^2, \quad (22b)$$

$$v_1^2/2 + h_1 = v_0^2/2 + h_0. \quad (22c)$$

其中

$$v_0 = u_0 - U_s, \quad v_1 = u_1 - U_s.$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

接触间断面

方程(14)、(17) 和(19) 还可以有另一类解,

$$\rho_1 \neq \rho_0, \quad (23a)$$

$$p_1 = p_0, \quad (23b)$$

$$u_1 = u_0 = U_s. \quad (23c)$$

即间断面传播速度与流体速度相等, 间断面两侧压强相等, 但密度不相等。这类间断面称为[接触间断](#)(contact discontinuity)。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

更一般地，沿着间断面的法向，质量流连续，

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_0 v_{0n}.$$

动量流连续

$$p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 = p_0 + \rho_0 v_{0n}^2,$$

$$\rho_1 v_{1n} u_{1t} = \rho_0 v_{0n} u_{0t}$$

能流连续条件

$$(u_{1n}^2/2 + h_1)\rho_1 v_{1n} = (u_{0n}^2/2 + h_0)\rho_0 v_{0n}.$$

若通过间断面的质量流不为零，就是激波面；若通过间断面的质量流等于零，就是接触间断，此时间断面两侧的切向流速之差是任意的。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

引入比容 $V = 1/\rho$ ，由关系式(22a)，流速可以表示为

$$v_0 = jV_0, \quad v_1 = jV_1$$

将之代入到(22b)，有

$$p_1 + j^2 V_1 = p_0 + j^2 V_0.$$

那么质量流 j 为

$$j^2 = -\frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0}. \quad (24)$$

雨贡纽曲线示意图。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

由方程(24)以及(22a)，可以将激波面两侧的流速用压强和比容联系起来，

$$v_0^2 = V_0^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}, \quad (25a)$$

$$v_1^2 = V_1^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}. \quad (25b)$$

利用方程(25)，容易求得激波面两侧流体的流速差，

$$u_1 - u_0 = \sqrt{(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)}. \quad (26)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

将(25) 代入(22c), 可以得到激波面两侧的焓的变化,

$$h_1 - h_0 = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)(V_0 + V_1) \quad (27)$$

内能的变化则为,

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_0 - V_1). \quad (28)$$

方程(28) 和(27) 给出了激波面两侧热力学量的关系式, 该关系式又称为兰金— 雨贡纽关系(Rankine-Hugoniot relation)。

兰金— 雨贡纽关系与高压状态方程

测量经过冲击后物质的压强和比容, 就可以得到物质的内能/焓与压强和比容的关系, 即状态方程。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

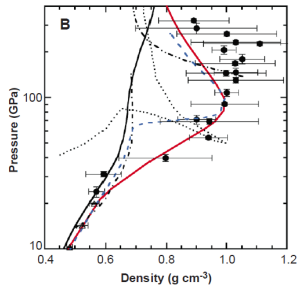
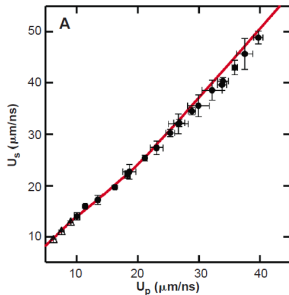
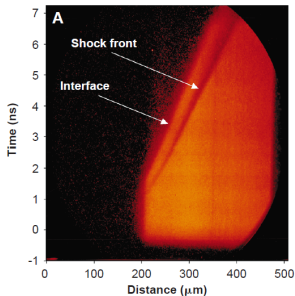
激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结



激光烧蚀可产生高压(百万大气压); 再通过测量激波的行为, 可以测量物质的状态方程。[Collins et al., Science 281, 1178 (1998)].

已知激波的速度 U_s 和流体的速度 U_p , 流体的压强和密度为

$$\rho_1 = \frac{U_s}{U_s - U_p} \rho_0, \quad p_1 = p_0 + \rho_0 U_s U_p.$$

记

$$\Delta h = h_1 - h_0, \Delta p = p_1 - p_0,$$

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_0, \Delta V = V_1 - V_0,$$

兰金— 雨贡纽关系式可写为

$$\frac{\Delta h}{\Delta p} = V_0 + \frac{1}{2} \Delta V, \quad \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta V} = -(p_0 + \Delta p).$$

绝热过程的热力学关系式为

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s = V, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_s = -p.$$

当激波两侧物理量变化很小时，兰金— 雨贡纽关系式退化到绝热关系式。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

激波关系式

已知激波面前后的压强和比容，那么激波面两侧的流速、内能和焓的变化也就完全确定了

$$u_1 - u_0 = \sqrt{(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)}, \quad (29a)$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_0 - V_1), \quad (29b)$$

$$h_1 - h_0 = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)(V_0 + V_1). \quad (29c)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

已知激波两侧的物理量，我们还可以计算激波的传播速度。由关系式(25)，我们有

$$v_0 v_1 = V_0 V_1 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}.$$

再利用关系式(26)，我们有

$$v_0 v_1 = \frac{V_0 V_1}{(V_1 - V_0)^2} (u_1 - u_0)^2.$$

由此得到关于激波速度的方程，

$$U_s^2 - (u_1 + u_0)U_s + u_1 u_0 = \frac{(u_1 - u_0)^2 V_0 V_1}{(V_1 - V_0)^2}.$$

激波传播的速度为

$$U_s = \frac{u_1 + u_0}{2} + \frac{(u_1 - u_0)}{2} \frac{V_0 + V_1}{V_0 - V_1}. \quad (30)$$

对于理想气体，其状态方程为

$$\varepsilon = \frac{pV}{\gamma - 1}. \quad (31)$$

利用状态方程(31)，由方程(29b)，我们得

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma + 1)V_0 - (\gamma - 1)V_1}{(\gamma + 1)V_1 - (\gamma - 1)V_0}, \quad (32a)$$

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_0}{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_0}. \quad (32b)$$

强冲击极限

在强冲击极限下 $p_1/p_0 \rightarrow \infty$ ，由关系式(32b) 有

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{V_0}{V_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (33)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

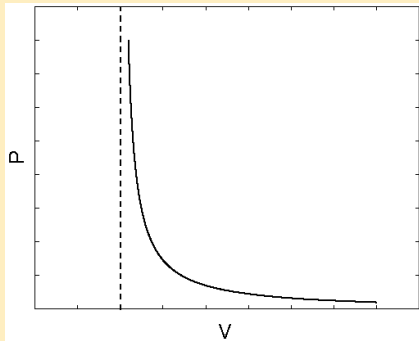
弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

理想气体的雨贡纽曲线



在强冲击极限下，理想气体的密度趋于原来的 $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ 倍。对于单原子分子理想气体， $\gamma = 5/3$ 。在强冲击压缩极限下，气体密度的极限压缩率为 4。

将(32b)代入方程(25)，我们得到如下激波关系式，

$$v_0^2 = \frac{V_0}{2} [(\gamma - 1)p_0 + (\gamma + 1)p_1], \quad (34a)$$

$$v_1^2 = \frac{V_1}{2} [(\gamma + 1)p_0 + (\gamma - 1)p_1]. \quad (34b)$$

理想气体的绝热声速为 $c^2 = \gamma pV$ ，由(34)，流速与当地声速之比为

$$\left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2 = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)p_1/p_0}{2\gamma} > 1, \quad (35a)$$

$$\left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2 = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)p_0/p_1}{2\gamma} < 1. \quad (35b)$$

激波的性质 I

- 激波传播速度大于未受冲击区的绝热声速；
- 激波传播速度小于冲击区的绝热声速。

记 $\Delta p = p_1 - p_0$ ，方程(35)可改写为

$$\left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2 = 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\Delta p}{p_0}, \quad (36a)$$

$$\left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2 = 1 - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\Delta p}{p_1}. \quad (36b)$$

当 $\Delta p/p_0 \ll 1$ ，有

$$\frac{v_0}{c_0} \approx 1 + \frac{\gamma + 1}{4\gamma} \frac{\Delta p}{p_0} > 1, \quad (37a)$$

$$\frac{v_1}{c_1} \approx 1 - \frac{\gamma + 1}{4\gamma} \frac{\Delta p}{p_1} < 1. \quad (37b)$$

弱激波的传播速度接近绝热声速。

利用激波关系式

$$\frac{1}{2}v_0^2 + h_0 = \frac{1}{2}v_1^2 + h_1,$$

以及理想气体状态方程

$$h = \frac{c^2}{\gamma - 1},$$

我们有

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\gamma - 1} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} = c_*^2. \quad (38)$$

于是

$$c_*^2 \rho_0 = \frac{1}{2} \left(\rho_0 v_0^2 + p_0 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} p_0 \right), \quad (39a)$$

$$c_*^2 \rho_1 = \frac{1}{2} \left(\rho_1 v_1^2 + p_1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} p_1 \right), \quad (39b)$$

利用激波关系式

$$\rho_0 v_0^2 + p_0 = \rho_1 v_1^2 + p_1$$

将方程组(39) 中的两式相减, 有

$$c_*^2(\rho_1 - \rho_0) = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (p_1 - p_0)$$

又

$$v_1 v_0 = j^2 V_1 V_0 = -\frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} V_1 V_0 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0},$$

我们得

$$c_*^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} v_0 v_1. \quad (40)$$

将(40)代入(38), 于是我们得到如下方程

$$\frac{1}{2} v_0^2 + \frac{c_0^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} v_0 v_1. \quad (41)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

将 $v_0 = u_0 - U_s$, $v_1 = (u_1 - u_0) + (u_0 - U_s)$ 代入方程(41), 整理后可以得到关于激波速度 U_s 的代数方程

$$(U_s - u_0)^2 - \frac{\gamma + 1}{2}(u_1 - u_0)(U_s - u_0) = c_0^2. \quad (42)$$

我们还可以将方程(42)改写为更为对称的形式,

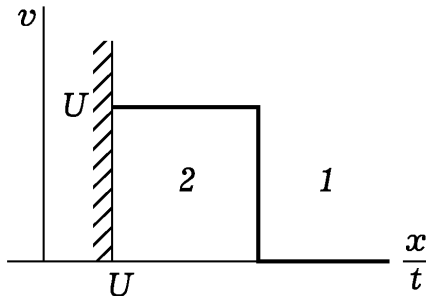
$$\frac{u_1 - u_0}{c_0} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{U_s - u_0}{c_0} - \frac{c_0}{U_s - u_0} \right). \quad (43)$$

由此我们得到激波传播速度与流速差 $u_1 - u_0$ 以及未冲击流体绝热声速之间的关系,

$$U_s = u_0 + \frac{\gamma + 1}{4}(u_1 - u_0) + \sqrt{c_0^2 + \frac{(\gamma + 1)^2}{16}(u_1 - u_0)^2}. \quad (44)$$

例题：活塞驱动激波

半无限长圆柱形管道中充满压强为 p_0 的理想气体，在 $x = 0$ 处有一活塞。从 $t = 0$ 时刻，活塞以速度 U_p 向右匀速运动，压缩气体。求激波面的速度。



在激波面右侧，流体静止， $u_0 = 0$ ；在激波面左侧，流体速度等于活塞的速度， $u_1 = U_p$ 。由方程(29a)，有

$$u_1 - u_0 = U_p = \sqrt{(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)}$$

利用理想气体的激波关系(32b), 有

$$V_0 - V_1 = \frac{2(p_1 - p_0)V_0}{(\gamma - 1)p_0 + (\gamma + 1)p_1}.$$

那么有

$$\begin{aligned} U_p &= (p_1 - p_0) \sqrt{\frac{2V_0}{(\gamma - 1)p_0 + (\gamma + 1)p_1}} \\ &= \frac{\sqrt{2}[(p_1/p_0) - 1]c_{s0}}{\sqrt{\gamma[(\gamma - 1) + (\gamma + 1)(p_1/p_0)]}}. \end{aligned}$$

由此可得压强比与活塞速度 U_p 之间的关系,

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)U_p^2}{4c_0^2} + \frac{\gamma U_p}{c_0} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2 U_p^2}{16c_0^2}}. \quad (45)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

将(45)代入方程(35a)，我们得到激波的传播速度 U_s ，

$$\frac{U_s}{c_0} = \frac{(\gamma + 1)U_p}{4c_0} + \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2 U_p^2}{16c_0^2}}. \quad (46)$$

当 $U_p \ll c_0$ 时，有

$$U_s \simeq c_0 + \frac{\gamma + 1}{4} U_p. \quad (47)$$

当 $U_p \gg c_0$ 时，有

$$U_s \simeq \frac{\gamma + 1}{2} U_p. \quad (48)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

例题：激波从刚性界面的反射

一个激波入射到刚性界面后发生反射。求激波反射后流体的状态。

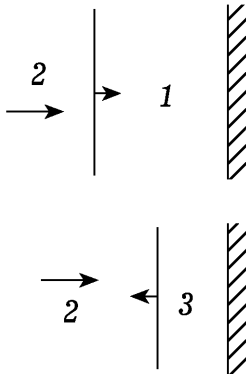
激波入射前后，处于区域 1 和 3 的流体是静止的，因此 $u_2 - u_1 = u_2 - u_3 = u_2$ 。利用方程(26)，在激波反射前后分别有

$$u_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)},$$

$$u_2 = \sqrt{(p_3 - p_2)(V_2 - V_3)},$$

于是我们得到如下关系式

$$(p_2 - p_1)(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3). \quad (49)$$



提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

在激波反射前后分别运用公式(32b)，有

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}, \quad (50a)$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_3}{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_3}. \quad (50b)$$

将(50)代入(49)，消去比容，得

$$(p_3 - p_2)^2 [(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2] = (p_2 - p_1)^2 [(\gamma + 1)p_3 + (\gamma - 1)p_2]$$

由此得

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{(3\gamma - 1)p_2 - (\gamma - 1)p_1}{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_1}.$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

在强激波极限下, $p_2/p_1 \rightarrow \infty$, 有

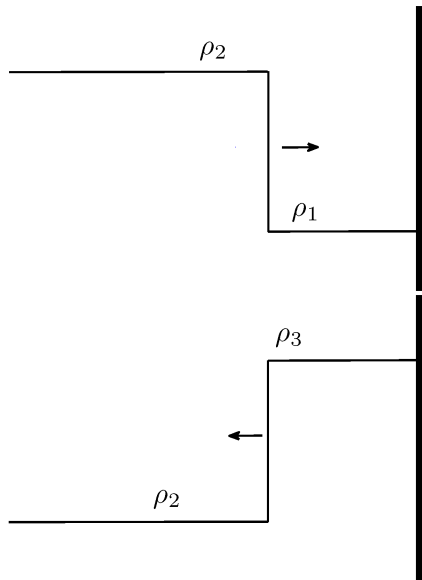
$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1} = 6 \text{ when } \gamma = 5/3,$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{2}{5} \text{ when } \gamma = 5/3,$$

强激波反射后, 流体的密度和压强可进一步提高。特别地,

$$\frac{\rho_3}{\rho_1} = \frac{\gamma(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2} = 10 \text{ when } \gamma = 5/3.$$

若 $p_2/p_1 = 10$, 那么 $p_3/p_1 = 42$ 。



提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

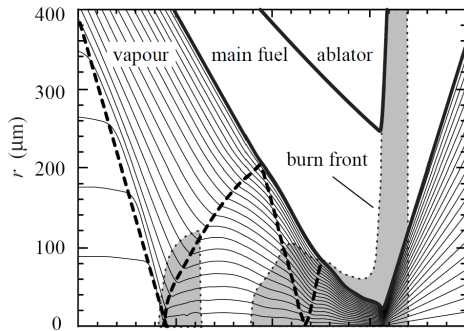
弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

激波在形成热斑中的作用

内爆过程中，激波在球心和高密度的冷燃料之间来回反射，在球心附近形成高温高密度的热斑，引发聚变。



提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

单位质量理想气体的熵为

$$s = \frac{c_V}{m} \ln(p\rho^{-\gamma}) + \frac{1}{m}(c_p + \xi). \quad (51)$$

激波面侧端，流体的熵也发生跃变

$$\Delta s \equiv s_1 - s_0 = \frac{c_V}{m} \ln \left\{ \frac{p_1}{p_0} \left[\frac{(\gamma - 1)(p_1/p_0) + (\gamma + 1)}{(\gamma + 1)(p_1/p_0) + (\gamma - 1)} \right]^\gamma \right\}. \quad (52)$$

激波的性质 II

激波是一种热力学不可逆的运动。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

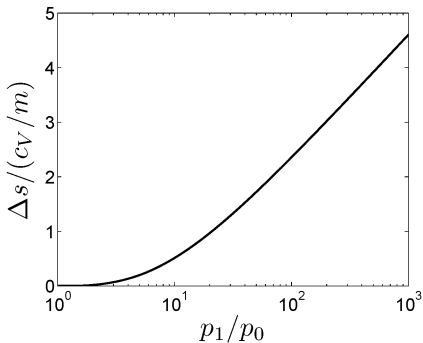
激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结



熵增与压强比的关系。

弱激波的熵增

$$\Delta s \simeq \frac{c_V}{m} \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} \left(\frac{p_1 - p_0}{p_0} \right)^3. \quad (53)$$

强激波的熵增

$$\Delta s \simeq \frac{c_V}{m} \ln \left[\frac{p_1}{p_0} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^\gamma \right]. \quad (54)$$

对于弱激波，精确至 $\Delta p/p_0$ 的二阶项，激波的熵增可以不计。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

对于弱激波，有

$$\frac{\Delta V}{V_0}, \text{ or } \frac{\Delta p}{p_0} \ll 1,$$

那么界面两侧流体的内能差近似为

$$\begin{aligned} \varepsilon(s_1, V_1) - \varepsilon(s_0, V_0) = & \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right)_V \Delta s + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_s \Delta V \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial V^3} \right)_s \Delta V^3. \end{aligned} \quad (55)$$

这里对熵增 $\Delta s = s_1 - s_0$ 的展开只保留到一阶，因为弱激波的熵增是关于 ΔV 的三阶小量。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

利用热力学微分关系式 $d\varepsilon = Tds - pdV$, 有

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s}\right)_V = T, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_s = -p,$$

于是方程(55)可改写为

$$\begin{aligned} \varepsilon(s_1, V_1) - \varepsilon(s_0, V_0) &= T_0 \Delta s - p_0 \Delta V \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s \Delta V^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_s \Delta V^3. \end{aligned} \quad (56)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

另一方面，我们将 p_1 在 p_0 附近作展开，并利用 Δs 是三阶小量的性质，有

$$p_1(V_1, s_1) - p_0(V_0, s_0) = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^2,$$

于是兰京—雨贡纽关系式

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)(V_0 - V_1)$$

在弱激波情况下近似为

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = -p_0 \Delta V - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \Delta V^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^3. \quad (57)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

比较方程(56)和(57)，我们有

$$\Delta s = -\frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^3. \quad (58)$$

这个结果表明，对于弱激波，熵的变化是 ΔV 的三阶小量。若我们考察弱激波两侧焓的变化，则可以得到如下关系式，

$$\Delta s = \frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s \Delta p^3. \quad (59)$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

在弱激波情况下，沿着雨贡纽曲线有

$$p(V_1, s_1) - p(V_0, s_0) = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3} \right)_s \Delta V^3 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_V \Delta s, \quad (60)$$

沿着绝热曲线则有

$$p(V_1, s_0) - p(V_0, s_0) = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_s \Delta V^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3} \right)_s \Delta V^3. \quad (61)$$

由于 $\Delta s \propto \Delta V^3$ ，精确至 ΔV^2 ，雨贡纽曲线与绝热曲线是一致的。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

由方程(60)和(58)，我们给出雨贡纽曲线的前三阶导数，

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\text{H}} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{\text{s}}, \quad (62\text{a})$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{\text{H}} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{\text{s}}, \quad (62\text{b})$$

$$\left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_{\text{H}} = \left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_{\text{s}} - \frac{1}{2T} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{\text{V}} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{\text{s}}. \quad (62\text{c})$$

由此可见，雨贡纽曲线与绝热曲线有相同的一阶导数和二阶导数，但有不同的三阶导数

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

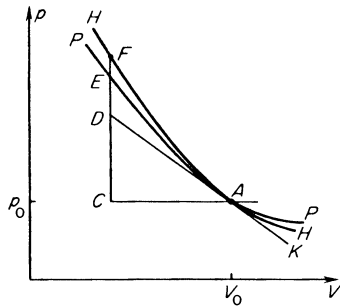
弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

雨贡纽曲线与绝热曲线

通过初始状态点 (V_0, p_0) 的雨贡纽曲线与绝热曲线有相同的一阶导数和二阶导数，但有不同的三阶导数，这表明弱激波与绝热过程非常接近。



提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

在雨贡纽曲线上，初态/末态点切线的斜率为

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial V_1}\right)_H = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{s_1} = -\frac{1}{V_1^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s_1} = -\frac{1}{V_1^2} c_{s1}^2$$

$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial V_2}\right)_H = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{s_2} = -\frac{1}{V_2^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s_2} = -\frac{1}{V_2^2} c_{s2}^2.$$

利用激波关系式，

$$u_1 = -jV_1, \quad u_2 = -jV_2,$$

我们有

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial V_1}\right)_H = -j^2 \frac{c_{s1}^2}{u_1^2}, \quad \left(\frac{\partial p_2}{\partial V_2}\right)_H = -j^2 \frac{c_{s2}^2}{u_2^2}. \quad (63)$$

可见，初态/末态点切线的斜率正比与绝热声速与流速之比的平方。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

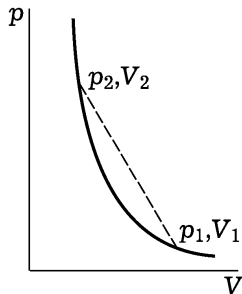
弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

对于常见物质的雨贡纽曲线，初末态之间连线的斜率满足如下关系式，

$$\left| \left(\frac{\partial p_1}{\partial V_1} \right)_H \right| < \left| \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} \right| = j^2 < \left| \left(\frac{\partial p_2}{\partial V_2} \right)_H \right|. \quad (64)$$



利用(63)，我们有

$$\frac{c_{s1}^2}{u_1^2} < 1 < \frac{c_{s2}^2}{u_2^2}, \text{ 或 } \frac{u_1^2}{c_{s1}^2} > 1 > \frac{u_2^2}{c_{s2}^2}. \quad (65)$$

理想气体的激波性质(35)是这个关系式的一个特例。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

对于弱激波，由于熵增是一个三阶小量，因此

$$j^2 = \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1} \approx - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s,$$

于是激波两侧流体的速度为

$$u_0 \approx u_1 \approx jV = \left[-V^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_s \right]^{1/2} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} = c_s.$$

因此，弱激波的速度就是绝热声速。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

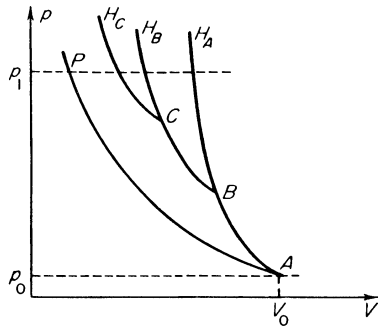
弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

由于弱激波的雨贡纽曲线与绝热曲线差别很小，可以通过多个弱激波来实现低熵增压缩。



提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

给定压强差 Δp ，若通过 N 个弱激波实现该压强差，流体的熵增为

$$\begin{aligned}\Delta s &\approx \frac{1}{12T} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s \left(\frac{\Delta p}{N} \right)^3 \\ &\approx \frac{\Delta p^3}{12N^2 T} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s.\end{aligned}\tag{66}$$

当 $N \rightarrow \infty$ ，有

$$\Delta s \rightarrow 0.$$

因此，可以将绝热过程分解为无限个弱激波实现。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

假定对理想气体施加 10 个激波，其中每个激波的压强比为

$$\Gamma = \frac{p_n}{p_{n-1}} = 2,$$

经过 10 个弱激波之后的气体密度为

$$\frac{\rho_{10}}{\rho_0} = \left[\frac{(\gamma + 1)\Gamma + (\gamma - 1)}{(\gamma - 1)\Gamma + (\gamma + 1)} \right]^{10} = 57.7 \text{ when } \gamma = 5/3.$$

气体的熵增为

$$\begin{aligned} s_{10} - s_0 &= 10 \frac{c_V}{m} \ln \left\{ \Gamma \left[\frac{(\gamma - 1)\Gamma + (\gamma + 1)}{(\gamma + 1)\Gamma + (\gamma - 1)} \right]^\gamma \right\} \\ &= 0.174 \frac{c_V}{m} \text{ when } \gamma = 5/3. \end{aligned}$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

若只采用一个强激波，保持最终的压强比为 $\Gamma = 2^{10}$ ，那么

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma + 1)\Gamma + (\gamma - 1)}{(\gamma - 1)\Gamma + (\gamma + 1)} = 3.99,$$

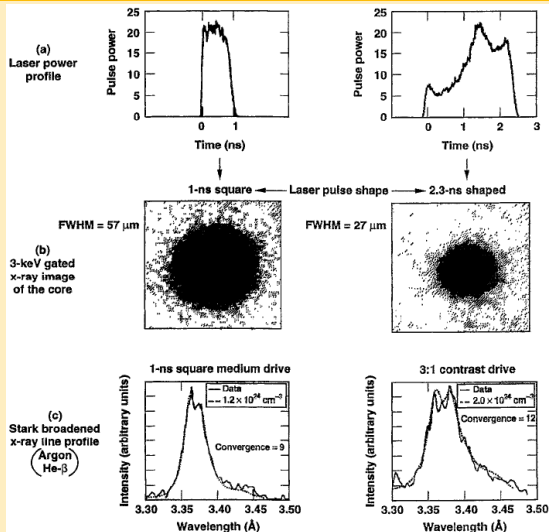
而熵增为

$$s_1 - s_0 = 4.63 \frac{c_V}{m}.$$

而绝热压缩的最终密度为

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{1/\gamma} = 64.$$

激光脉冲波形对燃料压缩的影响



采用逐渐上升的激光脉冲波形，可有效提高燃料的密度压缩率。[Lindl, Phys. Plasmas 2, 3933 (1995)]

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

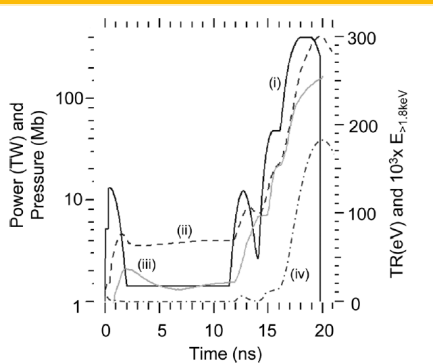
弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

NIF的点火脉冲波形



为了实现燃料的低熵增高密度压缩，NIF 的点火脉冲波形是特殊设计的：

- i 激光功率波形；
- ii 腔靶辐射场波形；
- iii 靶丸烧蚀压波形。

[Haan et al., Phys. Plasmas 18, 051001 (2011)]

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

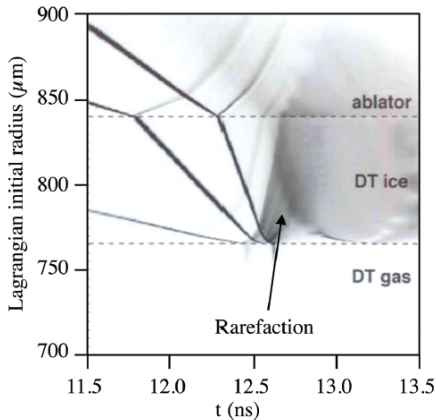
弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

NIF的点火激波轨迹



NIF的激光波形是为了使 4 个激波在 DT 燃料的固/气界面附近融合，从而达到降低固体燃料熵增、提高固体燃料的压缩率、产生点火热斑的目的。[Landen et al., Phys. Plasmas 18, 051002 (2011)]

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

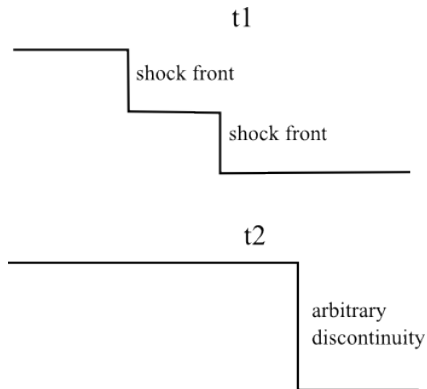
弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

任意间断面的形成和演化

- 发生追赶的若干支激波，若在空间同一地点汇合，间断面两侧的流体力学物理量原则上可以是任意的；
- 任意间断面形成后，必须演化，才能使流体的运动满足三个守恒型方程；
- 任意间断面的演化必将形成激波/稀疏波，以及切向间断面。



提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

激波的压强只依赖于流速差，

$$\frac{p_s}{p_0} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)u^2}{4c_0^2} + \frac{\gamma u}{c_0} \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2 u^2}{16c_0^2}}.$$

稀疏波的压强也只依赖于流速差，

$$\frac{p_r}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{c_{s0}}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}.$$

然而理想流体的一维平板运动由三个物理量完全描述：流速 u 、密度 ρ 、压强 p 。仅形成两支波(激波、稀疏波)不足以使流体的运动满足必须的连续条件。接触间断面两侧的密度可以不相等，为任意间断面的演化提供了必要的连续条件。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

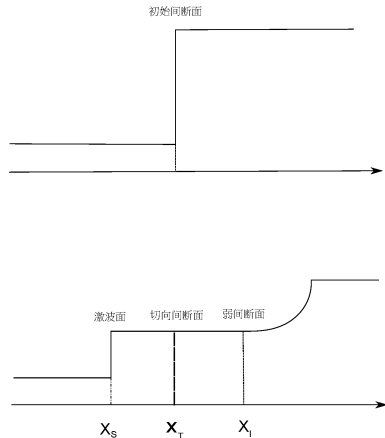
小结

例题

$t < 0$ 时, 无限长管道内, $x > 0$ 的一边充满比容为 V_2 , 压强为 p_2 的静止的理想气体; $x < 0$ 的一边充满比容为 V_1 , 压强为 p_1 的静止的相同气体。且

$$p_1 < p_2,$$

在 $t = 0$ 时刻, 气体开始演化。求流体的运动。



初始时刻间断面两侧的压强差, 将会在低压区产生一支激波, 在高压区形成一支稀疏波, 而在激波与稀疏波之间有一个过渡区, 通过接触间断面连接。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

令激波区的压强为 $p' = \alpha p_1$ ，比容为 V' ，流速为 u' 。利用激波关系式，

$$u' - u_1 = -\sqrt{(p' - p_1)(V_1 - V')},$$

以及

$$\frac{V'}{V_1} = \frac{(\gamma - 1)(p'/p_1) + (\gamma + 1)}{(\gamma + 1)(p'/p_1) + (\gamma - 1)},$$

我们有

$$\frac{V'}{V_1} = \frac{(\gamma - 1)\alpha + (\gamma + 1)}{(\gamma + 1)\alpha + (\gamma - 1)},$$

$$u' = -\frac{\sqrt{6}(\alpha - 1)}{\sqrt{5[(\gamma + 1)\alpha + (\gamma - 1)]}}c_{s1}.$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

令稀疏波的压强为 p'' ，流速为 u'' 。对于右行稀疏波，有

$$u_2 - u'' = \int_{p''}^{p_2} \frac{dp}{c_s \rho} = \frac{2c_{s2}}{\gamma - 1} \left[1 - (p''/p_2)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right].$$

再利用接触间断的性质

$$u' = u'', \quad p' = p''$$

由此我们得到关于 α 的方程，

$$\frac{\sqrt{6}(\alpha - 1)}{\sqrt{5[(\gamma + 1)\alpha + (\gamma - 1)]}} = \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}} \left[1 - \alpha^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} (p_2/p_1)^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right].$$

对于给定的初态 (p_1, V_1, p_2, V_2) 和绝热因子 γ ，可以通过数值计算获得 α 的具体数值。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

求得 α 后，我们就能够得到激波区的比容 V' 和流速 u' 。激波的速度为

$$U_s = -c_1 \sqrt{\frac{(\gamma + 1)\alpha + (\gamma - 1)}{2\gamma}}$$

由绝热关系式

$$p'' V''^\gamma = p_2 V_2^\gamma,$$

稀疏波的比容 V'' 为

$$V'' = (p_2 / \alpha p_1)^{1/\gamma} V_2.$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

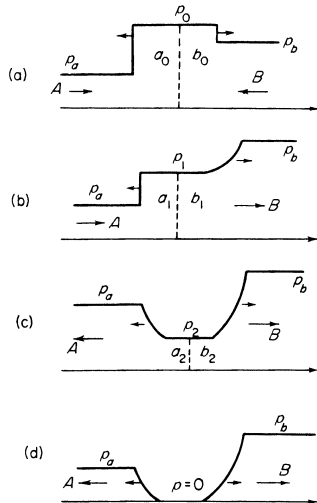
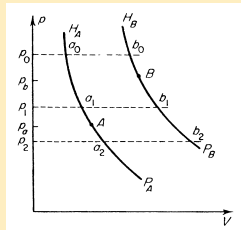
弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

任意间断面的演化 (黎曼问题)

- (a) 形成两支反向传播的激波，中间由接触间断连接；
- (b) 形成传播方向相反的一支激波和一支稀疏波，中间由接触间断连接；
- (c) 形成两支反向传播的稀疏波，中间由接触间断连接；
- (d) 形成两支反向传播的稀疏波，中间是真空；



提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

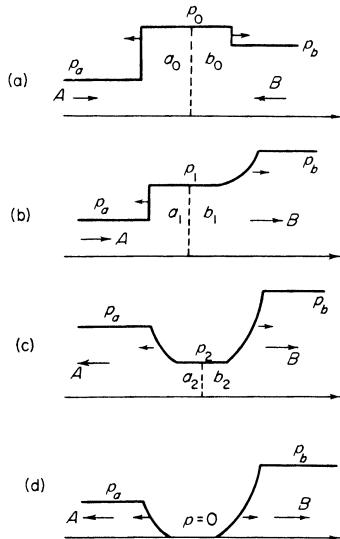
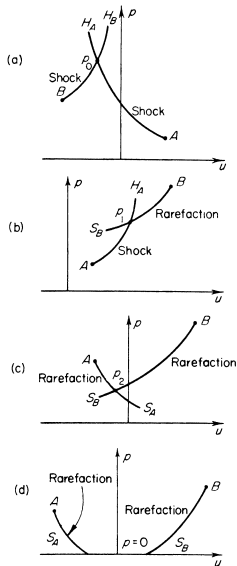
弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

在 $u-p$ 平面上作激波曲线和(或)稀疏波曲线, 两者的交点决定了过渡区的压强。



提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

由于要产生两支反向传播的激波，要求有

$$p_3 = p'_3 > p_2 \geq p_1.$$

在切向间断面两侧，

$$V_3 \neq V'_3.$$

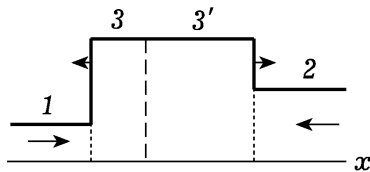
激波面两侧的流速差为，

$$u_1 - u_3 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)},$$

$$u_2 - u'_3 = -\sqrt{(p'_3 - p_2)(V_2 - V'_3)}.$$

由此有

$$u_1 - u_2 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)} + \sqrt{(p'_3 - p_2)(V_2 - V'_3)}$$



提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

由于 $p_3 = p'_3 > p_2$, 因此

$$u_1 - u_2 > \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V^*)}.$$

其中 V^* 是 $p_3 = p_2$ 时, 冲击后流体的密度, 为

$$\frac{V^*}{V_1} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}.$$

最终我们有

$$u_1 - u_2 > (p_2 - p_1) \sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}}. \quad (67)$$

不等式(67) 若取等号, 间断面将演化为一支激波和一个接触间断。

间断面演化为一支激波和一支稀疏波的条件

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

要产生一支激波和一支稀疏波，必然有

$$p_1 < p_3 = p'_3 < p_2.$$

对于激波，有

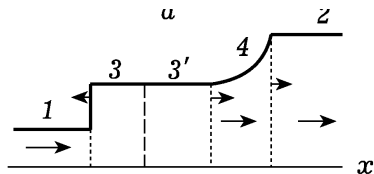
$$u_1 - u_3 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)}.$$

对于稀疏波，有

$$u_2 - u'_3 = \int_{p'_3}^{p_2} \frac{dp}{c_s \rho}.$$

那么有

$$u_1 - u_2 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)} - \int_{p_3}^{p_2} \frac{dp}{c_s \rho}.$$



提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压缩

任意间断面的演化

小结

由于 $p_1 < p_3 < p_2$ ，于是我们有

$$-\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{c_s \rho} < u_1 - u_2 < \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V^*)}.$$

其中 V^* 是 $p_3 = p_2$ 时，冲击后流体的密度，为

$$\frac{V^*}{V_1} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}.$$

对于理想气体， $c_s = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ ， $p = \text{const} \times \rho^\gamma$ ，有

$$\begin{aligned} -\frac{2c_{s2}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \right] &< u_1 - u_2 \\ &< (p_2 - p_1) \sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}}. \end{aligned} \quad (68)$$

不等式(68) 取下限值，间断面演化为一支稀疏波和一个接触间断；取上限值，间断面就演化为一支激波和一个接触间断。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

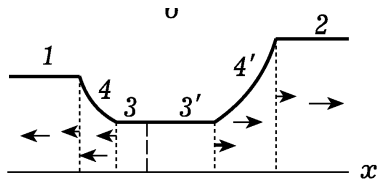
要形成两支反向传播的稀疏波，必然有

$$p_2 > p_1 > p_3 = p'_3 > 0.$$

利用稀疏波解，我们有

$$u_1 - u_3 = - \int_{p_3}^{p_1} \frac{dp}{c_s \rho},$$

$$u_2 - u'_3 = \int_{p'_3}^{p_2} \frac{dp}{c_s \rho}.$$



于是有

$$u_1 - u_2 = - \int_{p_3}^{p_1} \frac{dp}{c_s \rho} - \int_{p_3}^{p_2} \frac{dp}{c_s \rho}$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

由于 $p_2 > p_1 > p_3 = p'_3 > 0$, 我们有

$$-\int_0^{p_1} \frac{dp}{c_s \rho} - \int_0^{p_2} \frac{dp}{c_s \rho} < u_1 - u_2 < -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{c_s \rho}$$

对于理想气体, 有

$$-\frac{2(c_{s1} + c_{s2})}{\gamma - 1} < u_1 - u_2 < -\frac{2c_{s2}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \right]. \quad (69)$$

不等式(69) 取上极限时, 间断面演化为一支稀疏波。当

$$u_1 - u_2 < -\frac{2(c_{s1} + c_{s2})}{\gamma - 1},$$

两支稀疏波之间出现真空。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

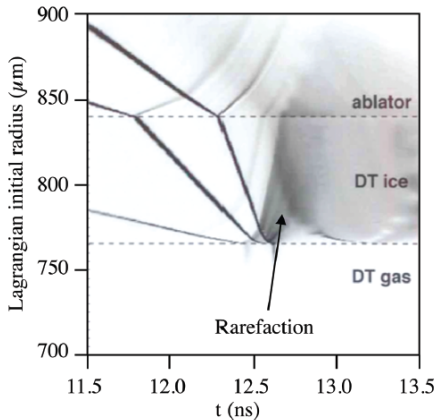
弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

NIC 的点火方案的激波轨迹



聚变靶丸内至少有两个界面：(1) 烧蚀材料与主燃料之间的界面；(2) 主燃料与气体燃料之间的界面。当激波通过烧蚀层物质与主燃料之间的界面时，会产生向内传播的激波和向外传播的稀疏波。当激波在气体燃料侧融合后，向内(气体)传播一支强激波，向外(主燃料)传播一支稀疏波。燃料内部的波系实际上相当复杂。[Landen et al., Phys. Plasmas 18, 051002 (2011)]

特征线与黎曼不变量

对于一维平板等熵流，有

$$dr \equiv \frac{dp}{2\rho c_s} + \frac{du}{2} = 0, \text{ along } C_+ : \frac{dx}{dt} = u + c_s, \quad (70)$$

$$ds \equiv \frac{dp}{2\rho c_s} - \frac{du}{2} = 0, \text{ along } C_- : \frac{dx}{dt} = u - c_s. \quad (71)$$

这里 C_{\pm} 是特征线， (r, s) 是黎曼不变量。

平面等熵流类型

- 当 $\partial r/\partial x \neq 0$ 且 $\partial s/\partial x \neq 0$ ，相应的是任意等熵流；
- 当 $\partial s/\partial x = 0$ 但 $\partial r/\partial x \neq 0$ ，相应的是前向简单波；
- 当 $\partial r/\partial x = 0$ 但 $\partial s/\partial x \neq 0$ ，相应的是后向简单波；
- 当 $\partial r/\partial x = \partial s/\partial x = 0$ ，相应的是定常流。

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

任意等熵流演化方程

当 $\partial r / \partial x \neq 0$ 且 $\partial r / \partial x \neq 0$ ，一维平面等熵流演化方程可写为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - \frac{1}{2c_s} \frac{d \ln(c_s / \rho)}{d \ln \rho} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0.$$

时间 t 和坐标 x 为

$$t = -\frac{1}{2c_s} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right),$$

$$x = ut + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial s} \right).$$

前向简单波

$\partial s / \partial x = 0$ 但是 $\partial r / \partial x \neq 0$ 。流动方程为

$$x = (u + c_s)t + F(u),$$

其中 $F(u)$ 为

$$F(u) = \frac{d}{dr} w(r, s_0) = \frac{d}{du} w(u + s_0, s_0).$$

后向简单波

$\partial r / \partial x = 0$ 但是 $\partial s / \partial x \neq 0$ 。流动方程为

$$x = (u - c_s)t + G(u),$$

其中 $G(u)$ 为

$$G(u) = -\frac{dw}{ds} = \frac{d}{du} w(r_0, r_0 - u).$$

提要

激波的形成

激波与接触间断

激波

接触间断

激波关系式

理想气体激波关系式

弱激波

激波的熵增

弱激波关系式

弱激波与低熵增压

任意间断面的演化

小结

无论是一维平板模型还是球对称模型，理论上都可以实现流体的无限密度压缩。

- 压缩型简单波最终会发展为激波；
- 激波是流体中的一类间断面，经过该间断面的质量流不为零，且激波产生熵增；
- 流体中还有一类间断面——接触间断，经过该间断面的质量流为零；
- 激波面两侧的物理量满足 Hugoniot 关系式；状态方程满足 Rankine-Hugoniot 关系式；
- 实验上常用的 Hugoniot 曲线，是给定流体初态，不同冲击末态构成的曲线；
- 弱激波的熵增很小，可以采用多个弱激波实现近等熵压缩；
- 流体中的任意间断面一般是演化的，演化结果有 4 种类型。