

# 一维不定常流 · II

(受控热核聚变导论 · 第十章)

郑 坚

中国科学技术大学核科学技术学院

2023–2024第二学期

## 提要

等离子体的  
流体描述

准热平衡的等  
离子体

简单等离子体  
的双流体方程  
多离子组份等  
离子体

高温等离子体  
中的辐射及其  
输运方程

平面等熵流  
的黎曼理论

可约方程与  
hodograph 变  
换

特征线与黎曼  
不变量

流动类型与黎  
曼方法

简单波

稀疏与压缩

稀疏波

压缩型简单波

球对称流体  
的等熵压缩

小结

- 1 等离子体的流体描述
- 2 平面等熵流的黎曼理论
- 3 简单波
- 4 球对称流体的等熵压缩

惯性约束聚变中，物质在相当大的时空范围内处于等离子体状态，此时流体物质由质量差异巨大的电子和离子构成。对于简单等离子体(只含一种离子的等离子体)，电子和离子之间的温度达到平衡的特征时间为

$$\tau_e^\varepsilon = \frac{m_i}{3m_e} \tau_e. \quad (1)$$

而电子、离子通过无规碰撞分别达到局部麦克斯韦分布的特征时间尺度分别为

$$\tau_e = \frac{3m_e^{1/2} T_e^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda} = 3.44 \times 10^5 \frac{[T_e(\text{eV})]^{3/2}}{Z[n_e(\text{cm}^{-3})] \ln \Lambda}, \quad (2a)$$

$$\tau_i = \frac{3m_i^{1/2} T_i^{3/2}}{4\sqrt{\pi} Z^4 e^4 n_i \ln \Lambda} = 2.08 \times 10^7 \frac{A^{1/2} [T_i(\text{eV})]^{3/2}}{Z^3 [n_e(\text{cm}^{-3})] \ln \Lambda}, \quad (2b)$$

其中  $\ln \Lambda$  是库仑对数(Coulomb logarithm),

$$\ln \Lambda = \ln \frac{T_e^{3/2}}{\sqrt{4\pi n_e e^3}} = 22.36 + \frac{3}{2} \ln [T_e(\text{eV})] - \frac{1}{2} \ln [n_e(\text{cm}^{-3})]. \quad (3)$$

这里采用了高斯单位制。

由于

$$\tau_e^E \gg \tau_e, \tau_i \quad (4)$$

当电子和离子分别近似达到麦克斯韦分布时，电子和离子可以具有不同的温度，此时等离子体可以采用所谓的双流体描述。

## 等离子体双流体描述的前提条件

等离子体的双流体描述成立的前提条件就是流体演化的时空尺度满足下面的条件，

$$L_H \gg \max(\lambda_e, \lambda_i), \tau_e^E \gtrsim \tau_H \gg \max(\tau_e, \tau_i). \quad (5)$$

其中， $\lambda_{e,i}$  是电子和离子的平均自由程，

$$\lambda_e = v_e \tau_e = \frac{3T_e^2}{4\sqrt{2\pi}Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda},$$

$$\lambda_i = v_i \tau_i = \frac{3T_i^2}{4\sqrt{\pi}Z^4 e^4 n_i \ln \Lambda}.$$

忽略掉电离、复合等原子过程，那么等离子体中的电子数和离子数分别守恒。于是连续性方程，

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \mathbf{u}_a) = 0, \quad (a = e, i). \quad (6)$$

这里  $n_\alpha$  是电子或离子的数密度， $\mathbf{u}_\alpha$  是电子或离子的流速。若等离子体中电离和复合过程不能忽略，那么连续性方程必须改写为

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot (n_a \mathbf{u}_a) = S_a,$$

这里  $S_\alpha$  是电子或离子的产生源项，它描述了电子/离子的产生或湮灭过程对电子/离子密度的影响。

电子和离子的动量方程可以写为

$$m_a n_a \left( \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t} + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \mathbf{u}_a \right) = Z_a e n_a \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_a \times \mathbf{B} \right) - \nabla p_a - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_a + \sum_b \mathbf{R}_{ab}, \quad (7)$$

这里  $\pi_\alpha$  是同类带电粒子(电子—电子、离子—离子)之间的碰撞所导致的粘滞应力张量,  $\mathbf{R}_{ab}$  是异类粒子之间的摩擦导致的动量变化。

对于非磁化等离子体( $\mathbf{B} = 0$ ), 电子和离子的粘滞应力张量为

$$\pi_{ik}^a = -\eta_\alpha W_{ik}^a$$

其中  $W_{ik}^a$  的定义为

$$W_{ik}^a = \frac{\partial u_i^a}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^a}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{u}^a.$$

离子的粘滞系数为

$$\eta_i = 0.96 n_i T_i \tau_i, \quad (8)$$

电子的粘滞系数( $Z = 1$ )为

$$\eta_e = 0.73 n_e T_e \tau_e \quad (9)$$

由于总动量守恒，显然有

$$\mathbf{R}_{ei} + \mathbf{R}_{ie} = 0.$$

电子与离子之间的摩擦力  $\mathbf{R}_{ei}$  不仅与电子和离子的流速差  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$  有关，而且与电子的温度梯度有关，

$$\mathbf{R}_{ei} = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_T,$$

当离子电荷数  $Z = 1$  时，有

$$\mathbf{R}_u = -0.51 \frac{m_e n_e \mathbf{u}}{\tau_e} = en_e \frac{\mathbf{j}}{\sigma},$$

$$\mathbf{R}_T = -0.71 n_e \nabla T_e.$$

这里  $\sigma$  是等离子体的电导率， $\mathbf{j}$  是等离子体电流。

## 热力(thermal force)

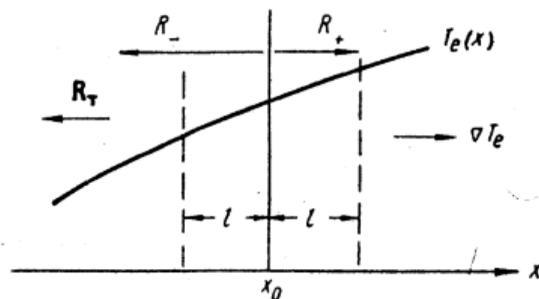
单位时间由左向右和由右向左运动的电子在  $x_0$  处沉积的动量为

$$R_+ \sim \left. \frac{m_e n_e v_e}{\tau_e} \right|_{x_0 - \lambda_e}$$

$$R_- \sim \left. \frac{m_e n_e v_e}{\tau_e} \right|_{x_0 + \lambda_e}$$

等离子体在  $x_0$  感受到的力为

$$\begin{aligned} R_T = R_+ - R_- &\sim -\lambda_e \frac{\partial}{\partial x} \frac{m_e n_e v_e}{\tau_e} \\ &\propto n_e \frac{\partial T_e}{\partial x}. \end{aligned}$$



当电子和离子可视为经典理想气体，其能量方程为

$$\frac{3}{2}n_a \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \right) T_a = -p_a \nabla \cdot \mathbf{u}_a - \nabla \cdot \mathbf{q}_a - \pi_{ik}^a \frac{\partial u_i^a}{\partial x_k} + Q_a. \quad (10)$$

电子热流由两项构成，

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_u^e + \mathbf{q}_T^e,$$

其中

$$\mathbf{q}_u^e = 0.71 n_e T_e \mathbf{u},$$

$$\mathbf{q}_T^e = -3.16 \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} \nabla T_e.$$

离子热流为

$$\mathbf{q}_i = -3.9 \frac{n T_i \tau_i}{m_i} \nabla T_i.$$

离子通过与电子的碰撞获得能量,

$$Q_i = \frac{3m_e n_e}{m_i \tau_e} (T_e - T_i),$$

电子则通过欧姆加热获得能量, 通过与离子的碰撞失去能量,

$$Q_e = -\mathbf{R}_e \cdot \mathbf{u} - Q_i = \frac{j^2}{\sigma} + \frac{1}{en_e} \mathbf{j} \cdot \mathbf{R}_T - \frac{3m_e n_e}{m_i \tau_e} (T_e - T_i).$$

## 电子热传导的估计

来自  $x_0$  两侧的热流密度分别为

$$q_+ = \frac{n_e}{2\tau_e} \int_{x_0-\lambda_e}^{x_0} T(x) dx, \quad q_- = \frac{n_e}{2\tau_e} \int_{x_0}^{x_0+\lambda_e} T(x) dx$$

于是通过  $x_0$  的净热能密度为

$$q = q_+ - q_- \sim -\frac{n_e \lambda_e^2}{2\tau_e} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

由此可得电子热传导系数,

$$\kappa_e = \frac{n_e \lambda_e^2}{2\tau_e} = \frac{n_e v_e^2 \tau_e}{2}.$$

由于

$$\tau_e = \frac{\lambda_e}{v_e} = \frac{\sqrt{m_e} T_e^{3/2}}{8\pi n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}.$$

因此电子的热导敏感依赖于温度,

$$\kappa_e = \frac{T_e^{5/2}}{8\pi Z m_e^{1/2} e^4 \ln \Lambda} \propto T_e^{5/2}. \quad (11)$$

电子热导几乎不依赖于等离子体密度。

由于  $m_e \ll m_i$ ，等离子体的质量密度实际上就是离子的质量密度，

$$\rho = m_e n_e + m_i n_i \approx m_i n_i.$$

当电子和离子的流速差别不大时，又有

$$m_e n_e \mathbf{u}_e + m_i n_i \mathbf{u}_i \approx m_i n_i \mathbf{u}_i.$$

此时等离子体的质量和动量实际上由离子携带，那么等离子体的连续性方程和动量方程为，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (12a)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla (p_e + p_i). \quad (12b)$$

其中  $\mathbf{j}$  是等离子体中的电流。这我们忽略了同类粒子之间的粘滞

双流体方程只描述时空缓变的等离子体运动，等离子体在演化过程中始终处于准中性状态，即

$$Zn_i \approx n_e.$$

由于电子质量很小，在电子动量方程中令  $m_e \rightarrow 0$ ，我们得到关于电场的方程，

$$\mathbf{E} = -\frac{\nabla p_e}{en_e} - \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e}{en_e} + \frac{\mathbf{R}_{ei}}{en_e}. \quad (13)$$

这个方程也称为广义欧姆定律(generalized Ohm's law)。

## Biermann 电池效应

等离子体中的磁场往往是运动的等离子体自己产生的。在方程(13)中,忽略掉电子粘滞以及电子—离子碰撞的贡献,再利用状态方程  $p_e = n_e T_e$ , 我们得到等离子体中的位移电流,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{c}{en_e} \nabla n_e \times \nabla T_e. \quad (14)$$

这个位移电流能够产生大尺度的磁场,被认为是宇宙磁场形成的重要机制,也称 Biermann 电池效应(Biermann battery effect)。

可以采用如下公式估计 Biermann 电池效应产生的自生磁场,

$$B[\text{MG}] \sim \frac{t_L}{100 \text{ ps}} \frac{T_e}{1 \text{ keV}} \frac{L_T}{30 \mu\text{m}} \frac{L_n}{30 \mu\text{m}}.$$

## 多离子组份等离子体

等离子体常常是含有多类离子，如聚变燃料的成分是氘气，聚变靶丸的烧蚀层常常是  $C_8H_8$ ，常温充气腔靶的气体是  $C_5H_{12}$ ，等等。多离子组份等离子体的流体描述将更为复杂。

以双离子组分等离子体为例，有丰度演化方程

$$\rho \frac{\partial c}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla c + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0.$$

当等离子体的非均匀性很小，扩散流  $\mathbf{i}$  是等离子体中各种梯度量的线性叠加，

$$\mathbf{i} = -\rho D \left( \nabla c + \kappa_p^i \nabla \ln p_i + \frac{e\kappa_E}{T_i} \nabla \Phi + \kappa_T^i \nabla \ln T_i + \kappa_T^e \nabla \ln T_e \right). \quad (15)$$

其中  $p_i$  是离子总热压强， $\Phi$  是等离子体中的静电势。

惯性约束聚变中，处于高温高密度状态的物质是强烈的辐射源  $\Rightarrow$  光子在物质的流动过程中扮演极为重要的角色，辐射的作用必须加以考虑。但光子有如下特点：

- 光子没有质量：辐射不影响连续性方程；
- 光子的动量很小：辐射对动量方程的影响很小；
- 光子的速度很高：辐射对能流的影响很大，直接影响流体的能量演化，进而影响流体的演化。

对于温度为  $T$  的黑体辐射，辐射能量密度、辐射压强以及单向辐射能流分别为

$$\epsilon_{Planck} = \frac{4\sigma T^4}{c} = 1.38 \times 10^{-5} T_{\text{eV}}^4 [\text{J/cm}^3], \quad (16a)$$

$$p_{Planck} = \frac{1}{3} \epsilon_{Planck} = 4.59 \times 10^{-5} T_{\text{eV}}^4 [\text{bar}], \quad (16b)$$

$$S_{Planck} = \sigma T^4 = 1.03 \times 10^5 T_{\text{eV}}^4 [\text{W/cm}^2]. \quad (16c)$$

其中  $\sigma = 2\pi^5/15h^3c^2$  是 Stefan-Boltzmann 常数。当  $T = 300 \text{ eV}$ ，有

$$\epsilon_{Planck} = 1.12 \times 10^5 \text{ J/cm}^3, \quad p_{Planck} = 0.372 \text{ Mbar}, \quad S_{Planck} = 8.35 \times 10^{14} \text{ W/cm}^2.$$

温度为  $1 \text{ keV}$ ，电子密度为  $10^{22} / \text{cc}$  的等离子体，热能密度、热压强以及电子的自由热流为

$$\epsilon = 3n_e T = 4.81 \times 10^6 \text{ J/cm}^3, \quad p_e = 2\epsilon/3 = 32.1 \text{ Mbar}, \quad q_e^f = n_e T v_e = 2.13 \times 10^{15} \text{ W/cm}^2.$$

光子难以与粒子达到热平衡，为了准确地描述光子的演化，一般需要单独建立光子的演化方程。引入辐射谱密度函数  $I_\nu(\mathbf{n}, t)$ ， $I_\nu d\nu d^2\Omega/c$  表示在时刻  $t$ ，沿方向  $\mathbf{n}$ 、立体角为  $d^2\Omega$ ，频率介于  $\nu \rightarrow \nu + d\nu$  之间的光子数。由于物质的发生与吸收，满足输运方程，

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = j_\nu \left( 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) - \kappa_\nu I_\nu. \quad (17)$$

其中  $j_\nu$  是物质的发射系数， $\kappa_\nu$  是物质的吸收系数，它们都依赖于物质的状态，如温度、密度、成分，等。方程右侧小括号的第二项是自发辐射的贡献。

光子的能量密度、能流密度以及压强张量为

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} I_\nu d^2\Omega, \\ \mathbf{q}_r &= \int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} \mathbf{n} I_\nu d^2\Omega, \\ \mathcal{P}_r &= \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} \mathbf{n} \mathbf{n} I_\nu d^2\Omega. \end{aligned}$$

一般来说，光子只与电子发生相互作用，辐射场的存在导致电子的动量方程和能量方程需要作相应的修正。

## FLUID MECHANICS

Second Edition

by

L. D. LANDAU and E. M. LIFSHITZ

*Institute of Physical Problems, U.S.S.R. Academy of Sciences*

Volume 6 of Course of Theoretical Physics

Second English Edition, Revised

Translated from the Russian by

J. B. SYKES and W. H. REID



PERGAMON PRESS

OXFORD · NEW YORK · BEIJING · FRANKFURT  
SÃO PAULO · SYDNEY · TOKYO · TORONTOSUPERSONIC FLOW  
AND SHOCK WAVESR. COURANT and K. O. FRIEDRICHS  
INSTITUTE FOR MATHEMATICS AND MECHANICS  
NEW YORK UNIVERSITY, NEW YORKINTERSCIENCE PUBLISHERS, INC., NEW YORK  
INTERSCIENCE PUBLISHERS LTD., LONDONPhysics of Shock Waves  
and High-Temperature  
Hydrodynamic Phenomena

By

Ya. B. Zel'dovich

*Astronomical Society*

Yu. P. Raizer

*Institute of Mechanical Problems**Academy of Sciences, U.S.S.R.*

Moscow

EDITED BY

Wallace D. Hayes

*Department of Aerospace**and Mechanical Sciences**Princeton University**Princeton, New Jersey*

Ronald F. Probst

*Department of Mechanical**Engineering**Massachusetts Institute of**Technology**Cambridge, Massachusetts*

Volume I

Translated by Scripta Technica, Inc.

ACADEMIC PRESS  
New York and London  
1966

## 参考书

- L. D. Landau & E. M. Lifshitz, 理论物理学家从物理角度撰写的优秀流体力学教程；
- R. Courant & K. O. Friedrichs, 应用数学家系统讨论一维不定常流的名著；
- Ya. B. Zel'dovich & Yu. P. Raizer, 理论物理学家撰写的高温辐射流体力学的名著；

## 等熵流

初始时刻, 理想流体的熵不依赖于空间变量, 这种理想流体的运动叫等熵流(isentropic flow)。

在等熵流情况下, 流体的熵是定值, 流体密度仅依赖于压强,

$$\rho = \rho(p, s = \text{const}) = \rho(p). \quad (18)$$

此时只需要求解流体的连续性方程和动量方程,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (20)$$

利用绝热方程(18)，我们将密度的演化转化为压强的演化，有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial x}$$

于是连续性方程(19)可以改写为

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) p + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (21)$$

利用绝热声速  $c_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ ，方程(21)可写为如下形式

$$\frac{1}{c_s^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) p + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (22)$$

方程(20)和(22)是如下形式的**准线性**偏微分方程组的特殊形式

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} + C_1 \frac{\partial v}{\partial x} + D_1 \frac{\partial v}{\partial y} + E_1 = 0, \quad (23a)$$

$$A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} + C_2 \frac{\partial v}{\partial x} + D_2 \frac{\partial v}{\partial y} + E_2 = 0. \quad (23b)$$

其中  $A_1, A_2, \dots$  是关于  $(x, y, u, v)$  的已知函数。当  $E_{1,2} = 0$ ，方程是齐次的；当  $A_1, A_2, \dots$  仅依赖于  $(x, y)$ ，方程是线性的；若齐次方程的系数  $A_1, A_2, \dots$  仅依赖于  $(u, v)$ ，方程是可约的。可约方程是**非线性的**，但可以**变换**为线性方程。

设可约方程组的解为  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$ 。我们可以把  $(x, y)$  视为  $(u, v)$  的函数，即

$$u = u(x(u, v), y(u, v)),$$

$$v = v(x(u, v), y(u, v)).$$

把方程组对  $u$  偏微商，有

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$$

由此可得  $\partial x / \partial u$  和  $\partial y / \partial u$ ,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial x},$$

其中  $J$  是变换的雅克比行列式

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} (\partial u / \partial x) & (\partial u / \partial y) \\ (\partial v / \partial x) & (\partial v / \partial y) \end{vmatrix}$$

把方程组对  $v$  偏微商, 有

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v},$$

$$1 = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v},$$

由此可得  $\partial x/\partial v$  和  $\partial y/\partial v$ ,

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial x},$$

当  $J \neq 0$ , 我们得到与原方程等价的线性方程组

$$A_1 \frac{\partial y}{\partial v} - B_1 \frac{\partial x}{\partial v} - C_1 \frac{\partial y}{\partial u} + D_1 \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad (24a)$$

$$A_2 \frac{\partial y}{\partial v} - B_2 \frac{\partial x}{\partial v} - C_2 \frac{\partial y}{\partial u} + D_2 \frac{\partial x}{\partial u} = 0. \quad (24b)$$

上述将自变量由  $(x, y)$  变换到  $(u, v)$  的变换, 称为 **hodograph** 变换

将方程(22)改写一下,

$$c_s \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho c_s} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) p = 0. \quad (25)$$

将方程(20)与方程(25)分别相加和相减, 有

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u + c_s) \frac{\partial}{\partial x} \right] u + \frac{1}{\rho c_s} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u + c_s) \frac{\partial}{\partial x} \right] p = 0, \quad (26a)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u - c_s) \frac{\partial}{\partial x} \right] u - \frac{1}{\rho c_s} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u - c_s) \frac{\partial}{\partial x} \right] p = 0. \quad (26b)$$

对于等熵流, 热力学量  $c_s$ ,  $p$ ,  $\rho$  三者之间可以相互表示。因此微分  $dp/\rho c_s$  可以表示为某个量  $l$  的全微分,

$$l = \int \frac{dp}{\rho(p)c_s(p)} = \int \frac{c_s(\rho)}{\rho} d\rho. \quad (27)$$

显然  $l$  是热力学量  $p$ 、 $\rho$  或者  $c_s$  的函数。

记

$$2r = l + u, \quad 2s = l - u. \quad (28)$$

方程(26)可以改写为

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -(u + c_s) \frac{\partial r}{\partial x}, \quad (29a)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -(u - c_s) \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (29b)$$

于是我们得到微分  $ds$ 、 $dr$  与  $dx$  和  $dt$  的关系,

$$dr = \frac{\partial r}{\partial t} dt + \frac{\partial r}{\partial x} dx = \frac{\partial r}{\partial x} [dx - (u + c_s) dt], \quad (30a)$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial t} dt + \frac{\partial s}{\partial x} dx = \frac{\partial s}{\partial x} [dx - (u - c_s) dt]. \quad (30b)$$

由方程(30)，我们有

$$dr = 0 \text{ 沿着曲线 } C_+ : dx = (u + c_s)dt, \quad (31a)$$

$$ds = 0 \text{ 沿着曲线 } C_- : dx = (u - c_s)dt. \quad (31b)$$

曲线  $C_{\pm}$  称为方程(29)的**特征线**(characteristics): 沿着  $C_+$ ,  $r$  是个常数; 沿着  $C_-$ ,  $s$  是个常数。  $r$  和  $s$  称为**黎曼不变量**(Riemann's invariant)。

## 黎曼不变量

$$r = \frac{l + u}{2}, \quad s = \frac{l - u}{2}. \quad (32)$$

其中

$$l = \int \frac{dp}{\rho c_s}.$$

对于理想气体，在绝热情况下，压强、绝热声速以及密度之间的关系为

$$p = \text{const} \times \rho^{\gamma}, \quad c_s^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \frac{p}{\rho} = \text{const} \times \rho^{\gamma-1}.$$

我们有理想气体的黎曼不变量，

$$r = \frac{c_s}{\gamma - 1} + \frac{u}{2}, \quad s = \frac{c_s}{\gamma - 1} - \frac{u}{2}. \quad (33)$$

将方程组(30)的右边改写一下,

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} \{d[x - (u + c_s)t] + td(u + c_s)\}, \quad (34a)$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} \{d[x - (u - c_s)t] + td(u - c_s)\} \quad (34b)$$

由  $r$  和  $s$  的定义式(28), 有

$$2dr = \frac{d \ln \rho}{d \ln c_s} dc_s + du,$$

$$2ds = \frac{d \ln \rho}{d \ln c_s} dc_s - du$$

由此我们把微分  $du$  和  $dc_s$  表示为  $dr$  和  $ds$  的函数,

$$du = dr - ds,$$

$$dc_s = \frac{d \ln c_s}{d \ln \rho} dr + \frac{d \ln c_s}{d \ln \rho} ds.$$

方程(34)可写为

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} \left\{ d[x - (u + c_s)t] + t \left[ \frac{d \ln(c_s \rho)}{d \ln \rho} dr + \frac{d \ln(c_s / \rho)}{d \ln \rho} ds \right] \right\}, \quad (35a)$$

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} \left\{ d[x - (u - c_s)t] - t \left[ \frac{d \ln(c_s / \rho)}{d \ln \rho} dr + \frac{d \ln(c_s \rho)}{d \ln \rho} ds \right] \right\}. \quad (35b)$$

方程 (35) 右边的系数  $\partial r / \partial x$  以及  $\partial s / \partial x$  是否为零决定了变换是否奇异, 存在四种情况, 对应四种不同性质的流动,

## 平面等熵流类型

- 当  $\partial r / \partial x \neq 0$  且  $\partial s / \partial x \neq 0$ , 相应的是任意等熵流;
- 当  $\partial s / \partial x = 0$  但  $\partial r / \partial x \neq 0$ , 相应的是前向简单波;
- 当  $\partial r / \partial x = 0$  但  $\partial s / \partial x \neq 0$ , 相应的是后向简单波;
- 当  $\partial r / \partial x = \partial s / \partial x = 0$ , 相应的是定常流。

以  $r$  和  $s$  为独立变量, 当  $\partial r/\partial x \neq 0$  且  $\partial s/\partial x \neq 0$ , 我们就得到如下方程

$$\frac{\partial}{\partial s} [x - (u + c_s)t] + t \frac{d \ln(c_s/\rho)}{d \ln \rho} = 0, \quad (36a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} [x - (u - c_s)t] - t \frac{d \ln(c_s/\rho)}{d \ln \rho} = 0. \quad (36b)$$

由此有

$$\frac{\partial}{\partial s} [x - (u + c_s)t] = -\frac{\partial}{\partial r} [x - (u - c_s)t]. \quad (37)$$

等式(37)意味着

$$[x - (u + c_s)t] dr - [x - (u - c_s)t] ds$$

是某个函数  $w(r, s)$  的全微分,

$$dw = [x - (u + c_s)t] dr - [x - (u - c_s)t] ds, \quad (38)$$

其中

$$\frac{\partial w}{\partial r} = x - (u + c_s)t, \quad (39a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -x + (u - c_s)t. \quad (39b)$$

将(39a)代入方程(36a), 有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} = -t \frac{d \ln(c_s / \rho)}{d \ln \rho}. \quad (40)$$

将(39a)与方程(39b)相加, 有

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} = -2c_s t, \quad (41)$$

将(81)代入(79), 消去  $t$ , 我们就得到关于函数  $w(r, s)$  的二阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - \frac{1}{2c_s} \frac{d \ln(c_s / \rho)}{d \ln \rho} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0. \quad (42)$$



B. Riemann (1826.9.17-1866.7.20)

黎曼于 1860 年给出一维平面等熵流的一般求解方法, 并指出了激波解的存在。

对于理想气体，不难证明

$$2c_s = (\gamma - 1)(r + s), \quad \frac{d \ln(c_s/\rho)}{d \ln \rho} = \frac{\gamma - 3}{2},$$

方程(42)简化为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - \frac{\gamma - 3}{2(\gamma - 1)(r + s)} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0. \quad (43)$$

特别地，当比热比  $\gamma$  是如下形式的有理数时，

$$\gamma = \frac{2n + 1}{2n - 1}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

方程(43)简化为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} + \frac{n - 1}{r + s} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0. \quad (44)$$

当  $n = 1$  时, 方程(44)退化为

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial r \partial s} = 0. \quad (45)$$

方程的一般解为

$$w_1(r, s) = f(r) + g(s) + k, \quad (46)$$

其中  $k$  是任意常数,  $f(r)$  和  $g(s)$  是任意连续函数, 由方程的初值/边界条件决定。当  $n = 2$  时, 方程(44)可写为

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial s} [(r + s)w_2] = 0. \quad (47)$$

方程的一般解为

$$w_2(r, s) = \frac{f(r) + g(s)}{r + s} + k. \quad (48)$$

其中  $k$  是任意常数,  $f(r)$  和  $g(s)$  是任意连续函数, 由方程的初值/边界条件决定。

设  $w_n$  是方程(44)的解, 方程(44)两端同时乘以  $(r+s)$  再对  $r$  和  $s$  分别再偏微商一次, 有

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial s} \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial r \partial s} \right) + \frac{n}{r+s} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial r \partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial r \partial s} \right) \right] = 0. \quad (49)$$

因此  $n+1$  时方程的解为,

$$w_{n+1} = \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial r \partial s} \right) + k. \quad (50)$$

利用方程(48), 我们得到  $w_{n+1}(r, s)$  的一般形式

$$w_{n+1} = \frac{\partial^{(n-2)}}{\partial r^{(n-2)}} \frac{f(r)}{(r+s)^{n-1}} + \frac{\partial^{(n-2)}}{\partial s^{(n-2)}} \frac{g(s)}{(r+s)^{n-1}} + k, \text{ when } n \geq 2. \quad (51)$$

利用方程(81)、(42)以及(51)，我们得到时间  $t$ ，

$$t_1 = -\frac{1}{2(r+s)} \left( \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial w_1}{\partial s} \right) \quad (52a)$$

$$t_n = \frac{2n-1}{2(n-1)} w_{n+1} \text{ when } n \geq 2. \quad (52b)$$

我们还可以得到坐标  $x$ ，

$$x_n = \frac{(r-s)}{2} t_n + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_n}{\partial r} - \frac{\partial w_n}{\partial s} \right). \quad (53)$$

## 前向简单波

$$\partial s / \partial x = 0 \text{ 但是 } \partial r / \partial x \neq 0;$$

由方程(30b), 此时有  $ds = 0$ , 因此  $s = s_0 = \text{常数}$ , 此时所有的量仅依赖于  $r$

$$w = w(r, s_0), \quad x = x(r, s_0), \quad t = t(r, s_0),$$

由黎曼不变量的定义, 有

$$u = r - s_0, \quad c_s = c_s(r + s_0),$$

方程(38)可写为,

$$x = (u - c_s)t + F(u). \quad (54)$$

其中

$$F(u) = \frac{dw}{dr} = \frac{d}{du} w(u + s_0, s_0). \quad (55)$$

## 后向简单波

$$\partial r / \partial x = 0 \text{ 但是 } \partial s / \partial x \neq 0;$$

由方程(30a), 此时有  $dr = 0$ , 因此  $r = r_0 = \text{常数}$ , 此时所有的量仅依赖于  $s$

$$w = w(r_0, s), \quad x = x(r_0, s), \quad t = t(r_0, s),$$

由黎曼不变量的定义, 有

$$u = r_0 - s, \quad c_s = c_s(r_0 + s),$$

方程(38)可写为

$$x = (u - c_s)t - \frac{dw}{ds} = (u - c_s)t + G(u). \quad (56)$$

其中

$$G(u) = -\frac{dw}{ds} = \frac{d}{du} w(r_0, r_0 - u). \quad (57)$$

已知黎曼不变量  $(r, s)$ , 理想气体的流速和声速为

$$u = r - s, \quad c_s = c_s(r + s). \quad (58)$$

于是特征线满足的方程可以写为

$$C_+ : \frac{dx}{dt} = (r - s) + c(r + s), \quad (59a)$$

$$C_- : \frac{dx}{dt} = (r - s) - c(r + s). \quad (59b)$$

其中  $c(r + s)$  表示声速是  $(r + s)$  的函数。

## 简单波的特征线

- 前向简单波的  $C_+$  特征线是一簇直线:  $s = s_0$  是常数, 沿着每一根特征线  $C_+$ ,  $dr = 0$ ;
- 后向简单波的  $C_-$  特征线是一簇直线:  $r = r_0$  是常数, 沿着每一根特征线  $C_-$ ,  $ds = 0$ 。

## 定常流

$$\partial r / \partial x = \partial s / \partial x = 0$$

由方程(30), 此时有

$$dr = ds = 0.$$

因此  $r = \text{常数}$ ,  $s = \text{常数}$ 。再利用关系式(28), 我们有

$$u = \text{常数}, \rho = \text{常数}, c_s = \text{常数}.$$

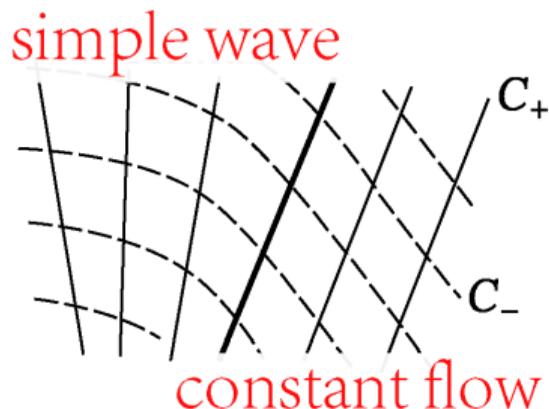
流体处于定常状态。

## 定常流的特征线

定常流的特征线是两簇平行的直线, 其斜率为  $u \pm c_s$ 。

## 简单波的存在性

与定常流( $r = \text{常数}$ ,  $s = \text{常数}$ )毗连的等熵流一定是简单波。



## 证明

如左图所示。在定常流区域，黎曼不变量  $(r, s) = (r_0, s_0)$  都是常数。两个区域之间的边界是一条  $C_+$  特征线，一个区域的  $C_+$  不会进入另一个区域；但特征线  $C_-$  则会由一个区域进入另一个区域。在定常流区域， $s = s_0$  是个常数，因此在其毗连的区域也是一个常数。因此，与定常流毗连的等熵流一定是简单波。

按照黎曼不变量  $(r, s)$  的性质，平面等熵流动可分为四类

## 平面等熵流类型

- 当  $r$  和  $s$  均非常数，流动是任意等熵流，其演化方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - \frac{1}{2c_s} \frac{d \ln(c_s/\rho)}{d \ln \rho} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0;$$

- 当  $s$  是常数， $r$  不是常数，流动是前向简单波，演化方程为

$$x = (u + c_s)t + F(u);$$

- 当  $r$  是常数， $s$  不是常数，流动是后向简单波，演化方程为

$$x = (u - c_s)t + G(u);$$

- 当  $r$  和  $s$  均为常数，流动是定常的，物理量均为常数。

如果任意等熵流动与简单波毗连，由方程(55)和(57)，在简单波与任意等熵流动的边界上有

$$w(r, s_0) - w(r_0, s_0) = \int_{r_0}^r F(r - s_0) dr, \quad (60a)$$

$$w(r_0, s) - w(r_0, s_0) = - \int_{s_0}^s G(r_0 - s) ds. \quad (60b)$$

方程(60)给出了两种流动之间的边界条件。

## $x-t$ 平面与 $r-s$ 平面的映射关系与等熵流动

- $x-t$  平面内的定常流动区域  $D_{sf}$  映射为  $r-s$  平面上的一个点  $(r_0, s_0)$ ;
- $x-t$  平面内的前向简单波区域  $D_{fs}$  映射为  $r-s$  平面上的射线  $(r_0, s_0) - (r, s_0)$ ;
- $x-t$  平面内的后向简单波区域  $D_{bs}$  映射为  $r-s$  平面上的射线  $(r_0, s_0) - (r_0, s)$ ;
- $x-t$  平面内的任意等熵流动区域  $D_{af}$  映射为  $r-s$  平面上的的一块区域。

简单波具有如下形式,

$$f(u) = x - (u \pm c_s)t, \quad (61)$$

由此可以得到如下形式的流速

$$u = F[x - (u \pm c_s)t]. \quad (62)$$

该方程的具有行波(travelling wave)解的形式, 波的相速度为  $u \pm c_s$ 。

简单波的相速度  $u \pm c_s$  不是常数, 而通过流速  $u$  和绝热声速  $c_s$  依赖于时间和空间, 这导致波在传播时, 波形不断发生变化。

前向简单波的相速度为  $u + c_s$ ，其与密度的微商为

$$\frac{d(u + c_s)}{d\rho} = \frac{c_s}{\rho} + \frac{dc_s}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho c_s)}{d\rho}.$$

其中  $\rho c_s$  可以写为  $\rho c_s = \rho \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s} = 1 / \sqrt{-(\partial V / \partial p)_s}$ ，那么

$$\frac{d(\rho c_s)}{d\rho} = c_s^2 \frac{d(\rho c_s)}{dp} = \frac{1}{2} \rho^3 c_s^5 (\partial^2 V / \partial p^2)_s.$$

我们就得到如下关系式

$$\frac{d(u + c_s)}{d\rho} = \frac{1}{2} \rho^2 c_s^5 (\partial^2 V / \partial p^2)_s > 0. \quad (63)$$

这里我们利用了一般情况下物质的性质： $(\partial^2 V / \partial p^2)_s > 0$ 。由此看到，密度越大，简单波的相速度就越大。

提要

等离子体的  
流体描述准热平衡的等  
离子体简单等离子体  
的双流体方程多离子组份等  
离子体高温等离子体  
中的辐射及其  
输运方程平面等熵流  
的黎曼理论可约方程与  
hodograph 变  
换特征线与黎曼  
不变量流动类型与黎  
曼方法

简单波

稀疏与压缩

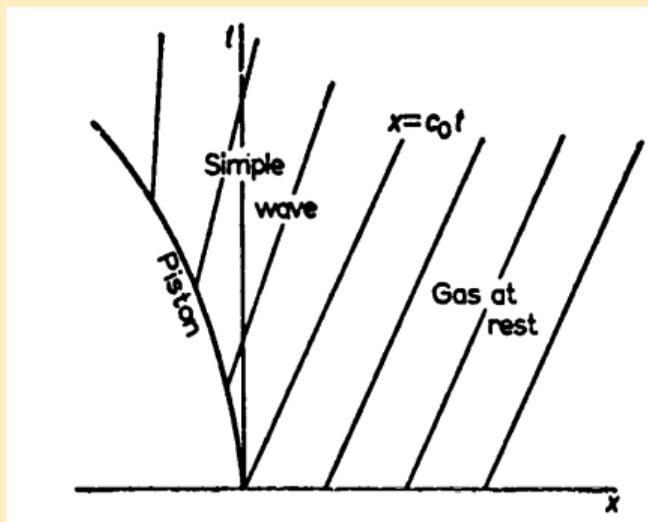
稀疏波

压缩型简单波

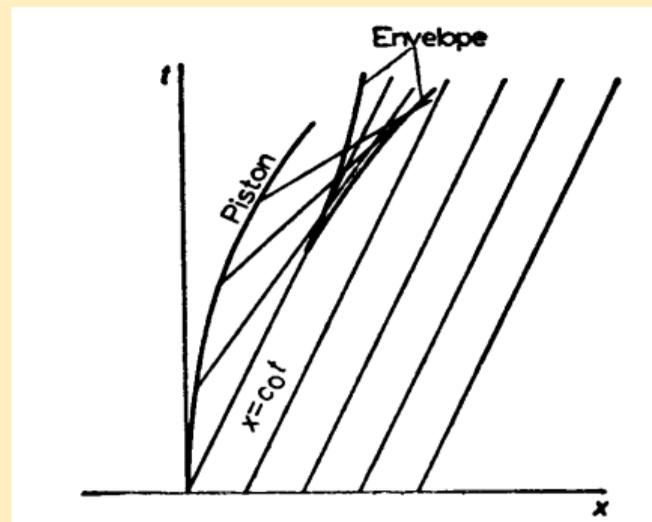
球对称流体的  
等熵压缩

小结

## 稀疏与压缩



稀疏波的特征线：特征线永不相交



压缩波的特征线：特征线将相交

## 中心简单波(centered simple wave)

方程(61)中的  $f(u) = 0$ ，这种简单波称为中心简单波。

- 前向中心简单波的  $C_+$  特征线是一簇发端于  $(0, 0)$  点的射线；
- 后向中心简单波的  $C_-$  特征线是一簇发端于  $(0, 0)$  点的射线；

中心简单波的流速  $u$  和密度  $\rho$  将通过  $x/t$  依赖于时间和空间，即

$$u = u(x/t), \quad \rho = \rho(x/t).$$

此时流体力学量的演化仅依赖于比值  $x/t$ ，这种流体运动也称自相似流(self-similarity flow)。

## 中心绝热稀疏波

沿  $x$  方向的无限长圆柱形管道中, 初始时刻,  $x \geq 0$  是密度为  $\rho_0$  且静止的均匀理想气体, 而  $x < 0$  是真空。此后流体的运动称为中心绝热稀疏波(centered adiabatic rarefaction wave)。

此时黎曼不变量  $s = c_s/(\gamma - 1) - u/2$  保持常数。在定常流区域, 有

$$u = 0, \quad c_s = c_{s0}.$$

那么有

$$u - \frac{2c_s}{\gamma - 1} = -\frac{2c_{s0}}{\gamma - 1}.$$

由此我们得到流速与声速之间的函数关系,

$$c_s = \frac{\gamma - 1}{2}u + c_{s0}. \quad (64)$$

利用绝热声速与密度和压强之间的关系,

$$c_s = \text{const.} \times \rho^{(\gamma-1)/2}, \quad c_s = \text{const.} \times p^{(\gamma-1)/2\gamma},$$

绝热稀疏波的密度和压强分布完全取决于流速  $u$ ,

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{c_{s0}} \right)^{2/(\gamma-1)}, \quad (65a)$$

$$p = p_0 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{c_{s0}} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}. \quad (65b)$$

在绝热稀疏过程中, 描述流体运动的三个物理量  $(p, \rho, u)$  只有一个是独立的。

利用中心简单波的性质，在方程(61)中令  $f(u) = 0$ ，我们又有

$$x = (u + c_s)t,$$

即

$$c_s = x/t - u.$$

将此结果代入方程(84)，就得到流速的演化，

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{x}{t} - c_{s0} \right). \quad (66)$$

在  $x = c_{s0}t$  处, 有

$$u(x = c_{s0}t) = 0.$$

$x = c_{s0}t$  就是稀疏波与未扰动气体之间的分界点; 稀疏波的传播速度为  $c_{s0}$ 。

由于声速总是大于零的,  $c_s > 0$ , 由方程(64)有

$$u > -\frac{2c_{s0}}{\gamma - 1}. \quad (67)$$

气体发生绝热稀疏时, 流体的最大流速为  $2c_{s0}/(\gamma - 1)$ 。

- 对于单原子分子理想气体,  $\gamma = 5/3$ , 最大速度为  $3c_{s0}$ ;
- 对于双原子分子理想气体,  $\gamma = 7/5$ , 最大速度为  $5c_{s0}$ 。

声速  $c_s$  随时空的演化为

$$c_s = c_{s0} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u}{c_{s0}} \right) = c_{s0} \left( \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{c_{s0} t} \right).$$

利用绝热声速与密度和压强之间的关系,

$$c_s = \text{const.} \times \rho^{(\gamma-1)/2}, \quad c_s = \text{const.} \times p^{(\gamma-1)/2\gamma},$$

我们就得到中心绝热稀疏波的密度和压强分布,

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{c_{s0} t} \right)^{2/(\gamma-1)},$$

$$p = p_0 \left( \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{c_{s0} t} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}.$$

提要

等离子体的  
流体描述准热平衡的等  
离子体简单等离子体  
的双流体方程多离子组份等  
离子体高温等离子体  
中的辐射及其  
输运方程平面等熵流  
的黎曼理论可约方程与  
hodograph 变  
换特征线与黎曼  
不变量流动类型与黎  
曼方法

简单波

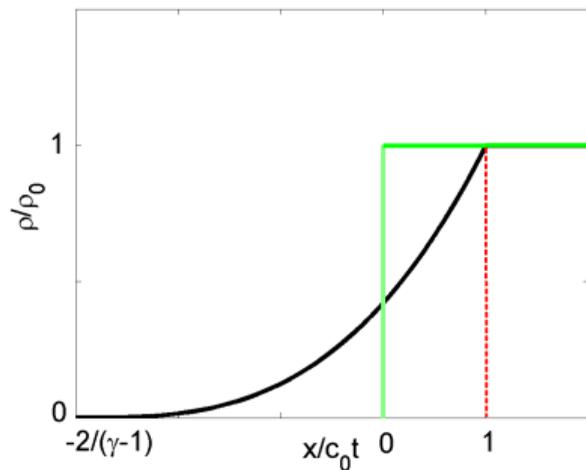
稀疏与压缩

稀疏波

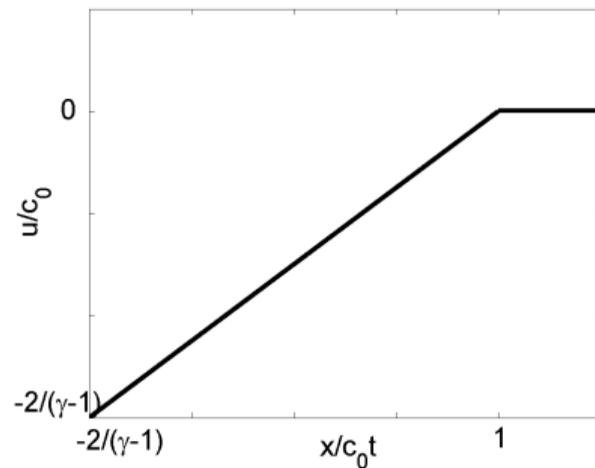
压缩型简单波

球对称流体  
的等熵压缩

小结



中心稀疏波的密度分布



中心稀疏波的流速分布

特征线  $C_+$  的定义为

$$\frac{dx}{dt} = u + c_s.$$

对于中心绝热稀疏波, 有

$$u + c_s = \frac{x}{t}.$$

因此, 特征线  $C_+$  的方程为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}. \quad (68)$$

积分, 得

$$x = \text{constant} \times t. \quad (69)$$

中心绝热稀疏波的  $C_+$  特征线是通过  $x-t$  平面原点的直线。

特征线  $C_-$  的定义为

$$\frac{dx}{dt} = u - c_s.$$

利用中心绝热稀疏波的解

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{x}{t} - c_{s0} \right),$$

$$c_s = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma + 1} c_{s0},$$

我们得到  $C_-$  满足的微分方程,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3 - \gamma}{\gamma + 1} \frac{x}{t} - \frac{4}{\gamma + 1} c_{s0}. \quad (70)$$

注意到稀疏波与未扰动流体之间的分界线为  $x = c_{s0}t$ ，取如下积分初值条件，

$$x(t_0) = c_{s0}t_0,$$

对方程(70)积分，有

$$x = -\frac{2}{\gamma-1}c_{s0}t + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_{s0}t_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{(3-\gamma)/(\gamma+1)}. \quad (71)$$

对于单原子分子理想气体， $\gamma = 5/3$ ，那么有

$$x = -3c_{s0}t + 4c_{s0}t_0\sqrt{t/t_0}.$$

当  $t \gg t_0$  时，特征线  $C_-$  趋于直线  $x = -3c_{s0}t$ 。

特征线  $C_0$  由下面的方程决定,

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{x}{t} - c_{s0} \right). \quad (72)$$

积分初值条件依然取为,

$$x(t_0) = c_{s0}t_0,$$

对方程(72)积分后, 有

$$x = -\frac{2}{\gamma - 1} c_{s0}t + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_{s0}t_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/(\gamma+1)}. \quad (73)$$

提要

等离子体的  
流体描述准热平衡的等  
离子体简单等离子体  
的双流体方程多离子组份等  
离子体高温等离子体  
中的辐射及其  
输运方程平面等熵流  
的黎曼理论可约方程与  
hodograph 变  
换特征线与黎曼  
不变量流动类型与黎  
曼方法

简单波

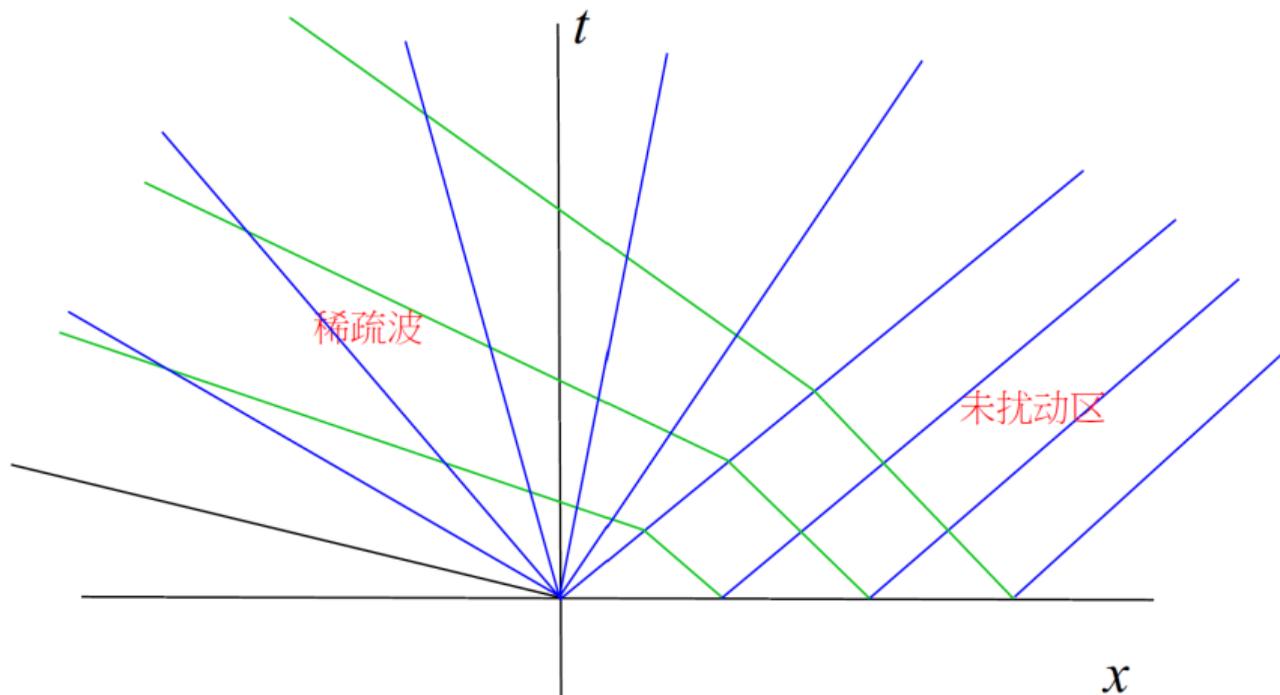
稀疏与压缩

**稀疏波**

压缩型简单波

球对称流体  
的等熵压缩

小结



中心绝热稀疏波的特征线

## 前向绝热稀疏波I

假定一维无限长圆柱形管道的一端由活塞塞住， $t < 0$ 时，活塞静止，且  $x > 0$  的管道内充满密度为  $\rho_0$  的理想气体； $t > 0$ ，活塞开始向  $x < 0$  的方向运动，其运动速度为

$$w(t) = -U(1 - e^{-t/\tau}).$$

此时，管道内流体的运动是前向绝热稀疏波。

利用简单波的方程

$$x = (u + c_s)t + f(u),$$

而活塞的坐标为

$$X(t) = \int_0^t w dt = -U\tau \left[ \frac{t}{\tau} - (1 - e^{-t/\tau}) \right].$$

在活塞表面，流体的流速与活塞速度相等，因此有

$$f(w) = X(t) - [w + c_s(w)]t. \quad (74)$$

另一方面，由于  $s = c_s/(\gamma - 1) - u/2$  保持为常数，我们又可以得到活塞表面流体的绝热声速与活塞速度之间的关系，

$$c_s(w) = c_{s0} + \frac{\gamma - 1}{2} w$$

将之代入方程(74)，有

$$f(w) = X(t) - \left( \frac{\gamma + 1}{2} w + c_{s0} \right) t. \quad (75)$$

为了由方程 (75) 求得函数  $f$  的具体形式, 我们需要将时间  $t$  表示为活塞速度  $w$  的函数。由活塞的速度公式, 我们有

$$t = -\tau \ln \left( 1 + \frac{w}{U} \right),$$

活塞的轨迹  $X(t)$  也可以写为活塞速度  $w$  的函数,

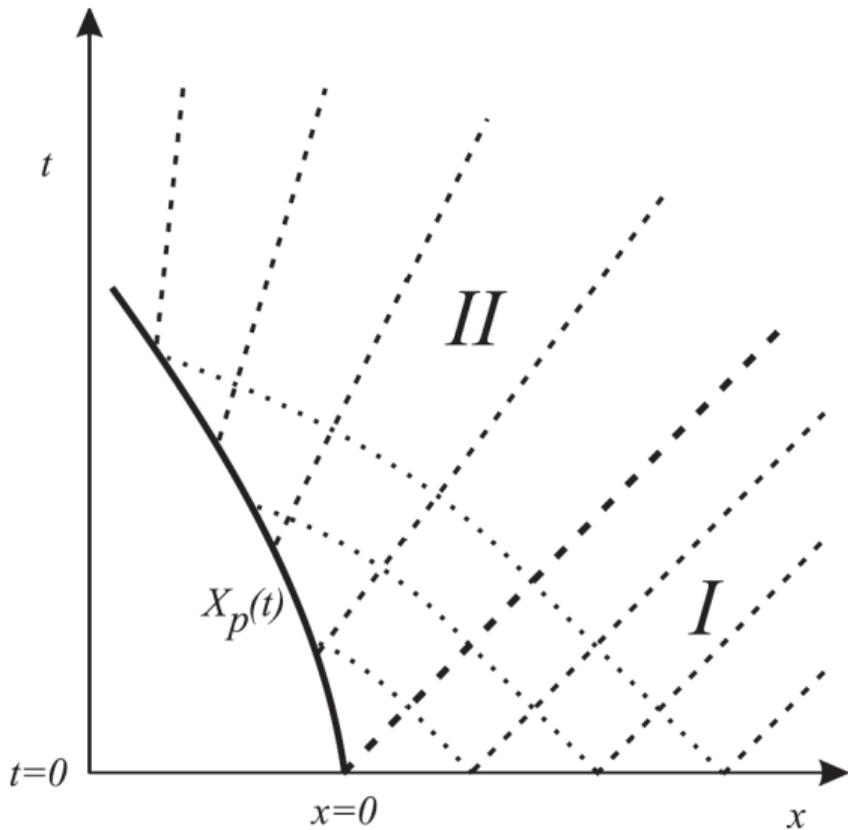
$$X(w) = -U\tau \left[ \frac{w}{U} - \ln \left( 1 + \frac{w}{U} \right) \right].$$

代入方程 (75), 就得到函数  $f(w)$ ,

$$f(w) = -w\tau + \tau \left( c_{s0} + \frac{\gamma+1}{2}w + U \right) \ln \left( 1 + \frac{w}{U} \right). \quad (76)$$

将(76)代入公式  $x = (u + c_s)t + f(u)$ , 最终有

$$x = \left( c_{s0} + \frac{\gamma+1}{2}u \right) t - u\tau + \tau \left( c_{s0} + \frac{\gamma+1}{2}u + U \right) \ln \left( 1 + \frac{u}{U} \right). \quad (77)$$



前向绝热稀疏波的特征线

## 前向绝热稀疏波 II

一无限长光滑管道被活塞隔离为两个部分。当  $t = 0$  时,  $x < 0$  的部分充满压强为  $p_0$  的理想气体,  $x > 0$  的部分是真空。在压强差的作用下, 活塞的运动方程为

$$m \frac{dU}{dt} = p.$$

其中  $p$  是活塞左侧的压强。利用黎曼不变量  $s$  保持为常数的性质, 有

$$\frac{2}{\gamma - 1} c_{s0} = U + \frac{2}{\gamma - 1} c_s.$$

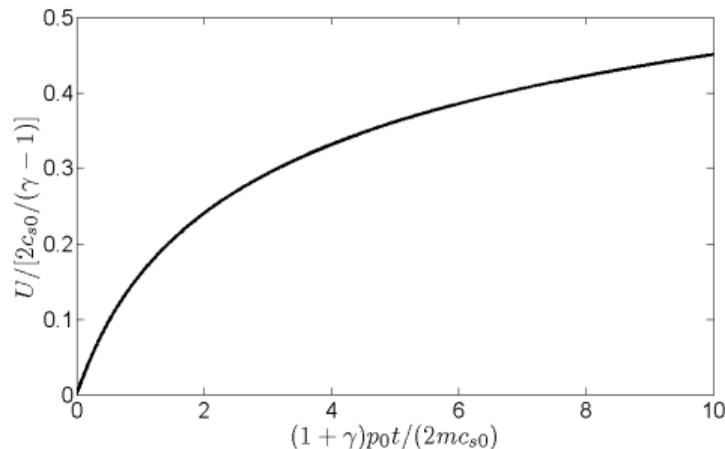
由此得到活塞左侧的压强,

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{U}{c_{s0}} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}.$$

对运动方程积分一次，利用初值条件  $U(t=0) = 0$ ，我们得

$$U(t) = \frac{2c_{s0}}{\gamma - 1} \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{(\gamma + 1)p_0 t}{2mc_{s0}} \right]^{-(\gamma - 1)/(\gamma + 1)} \right\}.$$

当  $t \rightarrow \infty$  时，有  $U \rightarrow (2c_{s0})/(\gamma - 1)$ 。



## 流体密度的无限压缩

简单波的波头传播速度为  $c_{s0}$ 。在时间  $t$  内走过的距离为  $c_{s0}t$ 。若压缩流体运动的活塞的速度恰当，其在时间  $t$  内走过的距离也为  $c_{s0}t$ ，就可以实现无限大的流体密度。

假定从时刻  $t_0 < 0$  开始，活塞从  $x_0 = c_{s0}t_0 < 0$  处从左向右运动，在  $t = 0$  的时刻达到  $x = 0$ ，并保持压缩过程是等熵的。那么压缩波必然是简单波。对于前向简单波，有

$$\frac{c_s}{\gamma - 1} - \frac{u}{2} = \frac{c_{s0}}{\gamma - 1}.$$

那么有

$$c_s = c_{s0} + \frac{\gamma - 1}{2}u. \quad (78)$$

在活塞表面，有

$$c_{sp} = c_{s0} + \frac{\gamma - 1}{2} u_p.$$

对时间微商一次

$$\frac{dc_{sp}}{dt} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{du_p}{dt}. \quad (79)$$

简单波满足如下方程

$$x = (u + c_s)t + f(u). \quad (80)$$

因为  $t = 0$  时， $x = 0$  处的流体依然是静止的，于是有  $f(u) = 0$ ，因此压缩波是中心的。

## 将活塞表面的中心简单波方程

$$x_p = (u_p + c_{sp})t$$

对时间微商一次, 有

$$u_p = (u_p + c_{sp}) + \frac{d}{dt}(u_p + c_{sp}).$$

将(79)代入上式, 有

$$\frac{dc_{sp}}{dt} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{c_{sp}}{t}. \quad (81)$$

积分, 利用初值条件, 有

$$\frac{c_{sp}}{c_{s0}} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}. \quad (82)$$

利用绝热声速  $c_s^2 = \gamma p / \rho$ ，以及绝热状态方程  $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$ ，活塞表面的流体密度为，

$$\frac{\rho_p(t)}{\rho_0} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/(1+\gamma)}. \quad (83)$$

将(82)代入方程(79)，有

$$\frac{du_p}{dt} = -\frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{(\gamma-1)/(\gamma+1)} \frac{c_{s0}}{t}. \quad (84)$$

积分，并利用初值条件，就得到活塞的速度，

$$u_p(t) = \frac{2c_{s0}}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{t_0}{t}\right)^{(\gamma-1)/(\gamma+1)} - 1 \right\}. \quad (85)$$

活塞的运动轨迹则为

$$\frac{x_p(t)}{x_0} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(1+\gamma)} - \frac{2}{\gamma-1} \frac{t}{t_0}. \quad (86)$$

提要

等离子体的  
流体描述准热平衡的等  
离子体简单等离子体  
的双流体方程多离子组份等  
离子体高温等离子体  
中的辐射及其  
输运方程平面等熵流  
的黎曼理论可约方程与  
hodograph 变  
换特征线与黎曼  
不变量流动类型与黎  
曼方法

简单波

稀疏与压缩

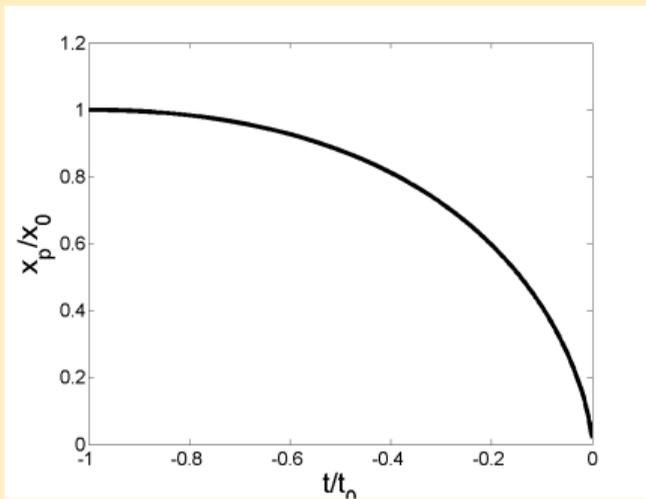
稀疏波

压缩型简单波

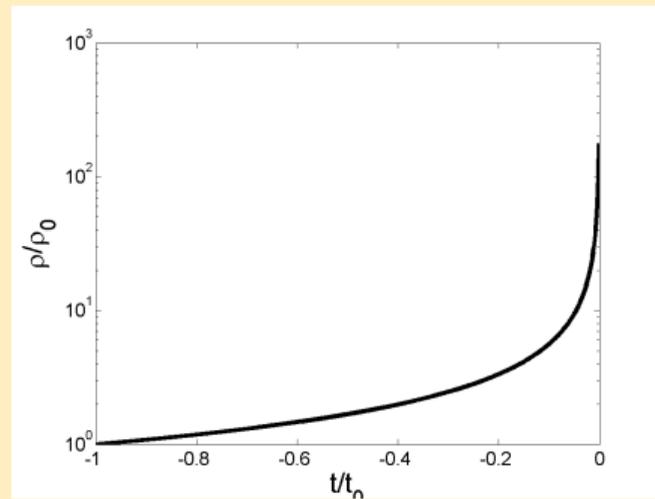
球对称流体  
的等熵压缩

小结

## 活塞的轨迹



## 活塞表面的流体密度



利用绝热声速方程  $c_s^2 = \gamma p / \rho$  以及绝热状态方程  $p \rho^{-\gamma} = \text{const}$ , 有

$$c_s = c_{s0} (\rho / \rho_0)^{(\gamma-1)/2}$$

由中心简单波方程  $x = (u + c_s)t$  以及沿特征线的方程关系式  $c_s = c_{s0} + (\gamma - 1)u/2$ , 有

$$c_s = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma + 1} c_{s0}.$$

由上面两个方程, 可以得到压缩流体的密度演化

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{(x/x_0)}{(t/t_0)} + \frac{2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}. \quad (87)$$

提要

等离子体的  
流体描述准热平衡的等  
离子体简单等离子体  
的双流体方程多离子组份等  
离子体高温等离子体  
中的辐射及其  
输运方程平面等熵流  
的黎曼理论可约方程与  
hodograph 变  
换特征线与黎曼  
不变量流动类型与黎  
曼方法

简单波

稀疏与压缩

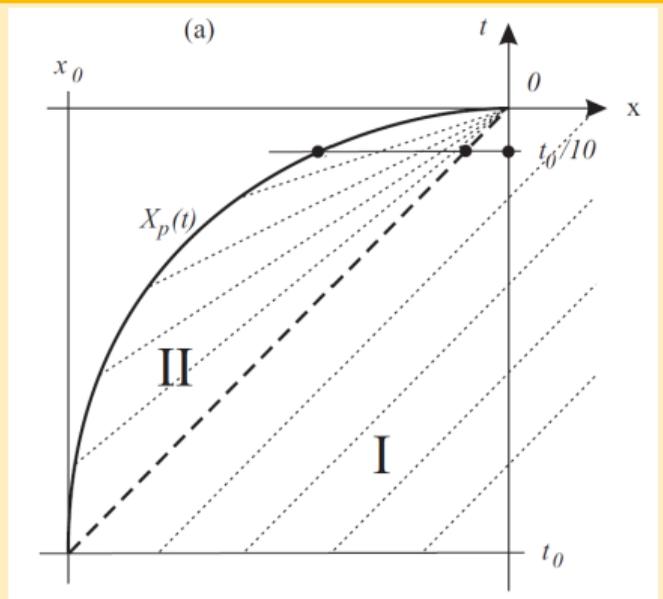
稀疏波

压缩型简单波

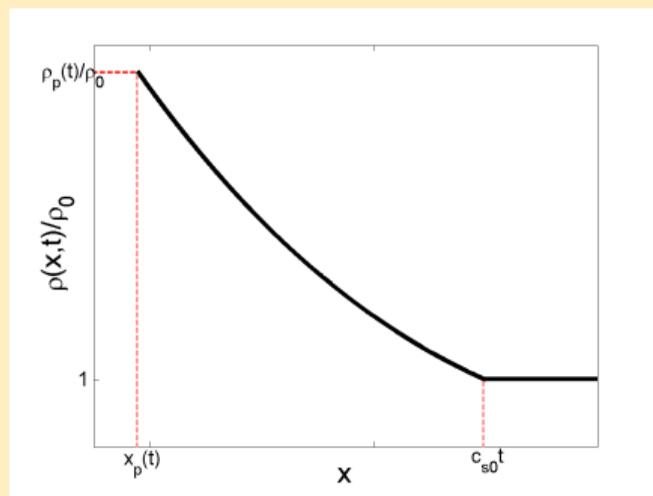
球对称流体  
的等熵压缩

小结

## 中心绝热压缩波的特征线



## 中心绝热压缩波的密度分布



在球对称情况下，也可以实现理想流体的无限压缩<sup>1</sup>。我们首先假定流体的流速具有如下形式

$$u(r, t) = \frac{r}{R_0(t)} \frac{dR_0(t)}{dt}, \quad (88)$$

这里  $R_0(t)$  是某个给定流体元的轨迹，这里我们设  $R_0(t)$  是球对称流体外边界。为了求解流体的运动，我们采用拉格朗日描述。设拉格朗日坐标为  $a$  的流体元，其径向轨迹为  $R(a, t)$ ，该流体元的流速为

$$u(a, t) = \frac{\partial R(a, t)}{\partial t}. \quad (89)$$

将(89)代入(88)，并令  $r = R(a, t)$ ，我们有

$$\frac{\partial R(a, t)}{\partial t} = \frac{R(a, t)}{R_0} \frac{dR_0(t)}{dt}.$$

<sup>1</sup>R.E. Kidder, Nuclear Fusion **14**, 53 (1974)

将方程对时间从 0 到  $t$  积分, 得

$$\frac{R(a, t)}{R(a, 0)} = \frac{R_0(t)}{R_0(0)} \equiv h(t), \quad (90)$$

该方程的右边不依赖于流体元的坐标, 意味着所有流体元按照相同的时间规律演化。将拉格朗日坐标  $a$  定义为初始时刻流体元的位置  $R(a, 0)$  与初始时刻流体外边界半径  $R_0 \equiv R_0(0)$  的比值,

$$a = \frac{R(a, 0)}{R_0},$$

那么方程(90)可改写为

$$\frac{R(a, t)}{R_0} = ah(t). \quad (91)$$

我们将求解  $h(t)$ 。等式(88)和(91)意味着流体方程在拉格朗日描述中可分离变量。

由质量守恒, 有

$$4\pi\rho(a, t)R^2(a, t)dR(a, t) = 4\pi\rho(a, 0)R^2(a, 0)dR(a, 0). \quad (92)$$

由此我们有

$$\rho(a, t) = \rho(a, 0) \frac{R^2(a, 0)dR(a, 0)}{R^2(a, t)dR(a, t)}.$$

由  $a$  的定义式  $a = R(a, 0)/R_0$ , 以及关系式  $R(a, t)/R_0 = ah(t)$ , 我们就得到流体元的密度随时间的演化关系

$$\rho(a, t) = \frac{\rho(a, 0)}{[h(t)]^3}. \quad (93)$$

对于绝热过程,  $p(a, t)\rho^{-\gamma}(a, t) = p(a, 0)\rho^{-\gamma}(a, 0)$ 。特别地, 当  $\gamma = 5/3$  时, 流体元的压强随时间演化为

$$p(a, t) = \frac{p(a, 0)}{[h(t)]^5}. \quad (94)$$

关系式(92)还给出了拉格朗日坐标与欧拉坐标之间的变换关系,

$$\frac{\partial a}{\partial r} = \frac{\partial a}{\partial R(a, t)} = \frac{\rho(a, t)R^2(a, t)}{\rho(a, 0)R_0^3 a^2},$$

由拉格朗日坐标中的动量方程(参考讲义的第二章),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial a}.$$

又流体元的流速为  $u(a, t) = \partial R(a, t)/\partial t$ , 我们有

$$\frac{\partial^2 R(a, t)}{\partial t^2} = -\frac{R^2(a, t)}{R_0^3 \rho(a, 0) a^2} \frac{\partial p(a, t)}{\partial a}.$$

将方程(91)和(94)代入上式, 我们有

$$h^3 \frac{d^2 h}{dt^2} = -\frac{1}{R_0^2 \rho(a, 0) a} \frac{dp_0(a)}{da}. \quad (95)$$

这里  $p_0(a) = p(a, 0)$  是初始时刻压强的分布。

方程(95)右边只是拉格朗日坐标  $a$  的函数, 而左边是时间  $t$  的函数。方程要成立, 必须有

$$-\frac{1}{R_0^2 \rho(a, 0) a} \frac{dp_0(a)}{da} = -\frac{1}{t_0^2}, \quad (96)$$

$$h^3 \frac{d^2 h}{dt^2} = -\frac{1}{t_0^2}. \quad (97)$$

其中  $t_0$  是常数。利用等式

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{dh^2}{dh},$$

这里  $\dot{h} = dh/dt$ , 方程(97)可改写为

$$h^3 \frac{dh^2}{dh} = -\frac{2}{t_0^2}.$$

设方程的初值条件为  $h(0) = 1$ ,  $(dh/dt)_{t=0} = 0$ , 对方程积分一次, 有

$$\dot{h}^2 = \frac{1}{t_0^2} \left( \frac{1}{h^2} - 1 \right).$$

再积分一次, 有

$$h(t) = \sqrt{1 - (t/t_0)^2}. \quad (98)$$

当  $t \rightarrow t_0$ , 那么  $h(t) \rightarrow 0$ 。由方程(93), 流体的密度趋于无限大。

我们将初始时刻燃料的密度与压强分布归一化,

$$\frac{\rho(a, 0)}{\rho(R_0, 0)} = G(a), \quad \frac{p(a, 0)}{p(R_0, 0)} = P(a),$$

那么方程(96)可改写为

$$\frac{1}{Ga} \frac{dP}{da} = \frac{(R_0/t_0)^2}{p_0/\rho_0}, \quad (99)$$

该方程的边界条件为  $P(1) = G(1) = 1$ 。利用绝热条件, 又有  $P(a) = G^{5/3}(a)$ , 有

$$\frac{dG^{2/3}}{d(a^2)} = \frac{(R_0/c_0 t_0)^2}{3}. \quad (100)$$

这里  $c_0 = \sqrt{(5/3)(p_0/\rho_0)}$ 。

我们对流体在初始时刻为一个球壳的情况感兴趣。为此引入参数

$$a_i^2 = 1 - \frac{3}{(R_0/c_0 t_0)^2} > 0, \quad (101)$$

于是方程(100)可写为

$$\frac{dG^{2/3}}{da^2} = \frac{1}{1 - a_i^2},$$

积分并利用边界条件  $G(1) = 1$ ，我们有初始时刻归一化密度分布，

$$G(a) = \left( \frac{a^2 - a_i^2}{1 - a_i^2} \right)^{3/2}. \quad (102)$$

于是初始时刻归一化压强分布为

$$P(a) = \left( \frac{a^2 - a_i^2}{1 - a_i^2} \right)^{5/2}. \quad (103)$$

## 球壳的无限压缩

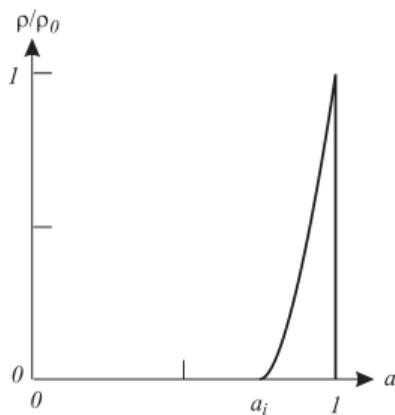
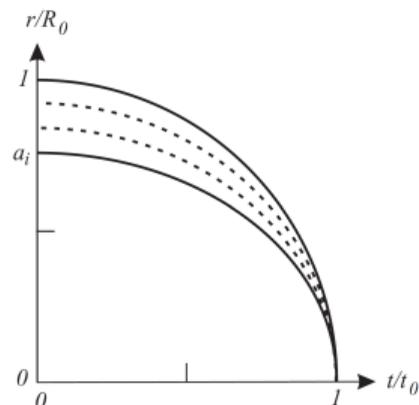
特定条件下可实现球壳状流体密度的无限压缩：

$$\rho(a, t) = \rho_0 \frac{[(a^2 - a_i^2)/(1 - a_i^2)]^{3/2}}{[1 - (t/t_0)^2]^{3/2}},$$

$$p(a, t) = p_0 \frac{[(a^2 - a_i^2)/(1 - a_i^2)]^{5/2}}{[1 - (t/t_0)^2]^{5/2}},$$

$$u(a, t) = \frac{aR_0 t}{t_0^2 [1 - (t/t_0)^2]^{3/2}},$$

$$R(a, t) = aR_0 [1 - (t/t_0)^2]^{1/2}.$$



## 特征线与黎曼不变量

对于一维平板等熵流，有

$$dr \equiv \frac{dp}{2\rho c_s} + \frac{du}{2} = 0, \text{ along } C_+ : \frac{dx}{dt} = u + c_s, \quad (104)$$

$$ds \equiv \frac{dp}{2\rho c_s} - \frac{du}{2} = 0, \text{ along } C_- : \frac{dx}{dt} = u - c_s. \quad (105)$$

这里  $C_{\pm}$  是特征线， $(r, s)$  是黎曼不变量。

## 平面等熵流类型

- 当  $\partial r/\partial x \neq 0$  且  $\partial s/\partial x \neq 0$ ，相应的是任意等熵流；
- 当  $\partial s/\partial x = 0$  但  $\partial r/\partial x \neq 0$ ，相应的是前向简单波；
- 当  $\partial r/\partial x = 0$  但  $\partial s/\partial x \neq 0$ ，相应的是后向简单波；
- 当  $\partial r/\partial x = \partial s/\partial x = 0$ ，相应的是定常流。

## 任意等熵流演化方程

当  $\partial r/\partial x \neq 0$  且  $\partial t/\partial x \neq 0$ ，一维平面等熵流演化方程可写为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - \frac{1}{2c_s} \frac{d \ln(c_s/\rho)}{d \ln \rho} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0.$$

时间  $t$  和坐标  $x$  为

$$t = -\frac{1}{2c_s} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right),$$

$$x = ut + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial s} \right).$$

## 前向简单波

$\partial s / \partial x = 0$  但是  $\partial r / \partial x \neq 0$ 。流动方程为

$$x = (u + c_s)t + F(u),$$

其中  $F(u)$  为

$$F(u) = \frac{d}{dr} w(r, s_0) = \frac{d}{du} w(u + s_0, s_0).$$

## 后向简单波

$\partial r / \partial x = 0$  但是  $\partial s / \partial x \neq 0$ 。流动方程为

$$x = (u - c_s)t + G(u),$$

其中  $G(u)$  为

$$G(u) = -\frac{dw}{ds} = \frac{d}{du} w(r_0, r_0 - u).$$