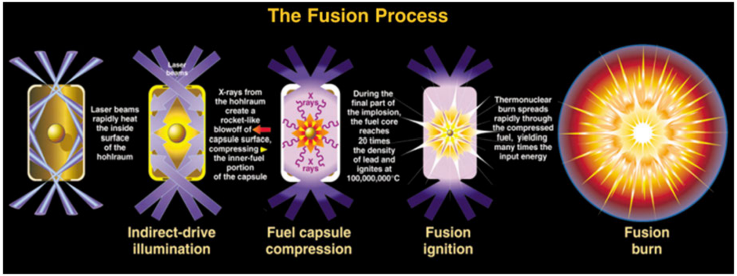
一维不定常流 · I
(受控热核聚变导论 · 第十章)

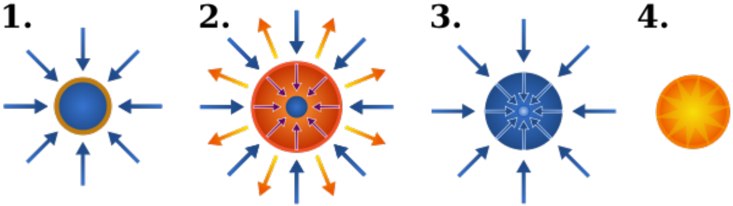
郑 坚

中国科学技术大学核科学技术学院

2023–2024第二学期

提要





无论是直接驱动还是间接驱动，聚变靶丸在激光束/粒子束/辐射场的作用下发生内爆的过程也是燃料的运动过程；由于内爆过程随时间演化，相应的运动称为非定常流 (unsteady flow)，通常采用流体方程(hydrodynamic equation)以近似描述。

理想流体描述的前提条件

当宏观物质运动的特征时间尺度 τ_H 和空间尺度 L_H 满足条件，

$$\tau_H \gg \tau_c(\text{粒子之间的平均碰撞时间}) \tag{1a}$$

$$L_H \gg \lambda_c(\text{粒子的平均自由程}), \tag{1b}$$

物质处于局部热平衡状态(local thermal equilibrium)。

例如，处于局部热平衡态的经典理想气体，粒子的速度服从局部麦克斯韦分布，

$$f_{\mathrm{M}}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=\frac{n(\mathbf{r},t)}{(2\pi)^{3/2}v_T^3(\mathbf{r},\mathbf{t})}\exp\left\{-\frac{[\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{r},t)]^2}{2v_T^2(\mathbf{r},t)}\right\}, \tag{2}$$

其中 $v_T(\mathbf{r},t)=[T(\mathbf{r},t)/m]^{1/2}$ 是粒子的热速度，$T(\mathbf{r},t)$ 是气体的局部温度。处于局部热平衡态的宏观物质，粒子的个体行为因为粒子之间的频繁碰撞而被淹没了。对于这样的系统，只需要知道物质的若干个宏观物理量：

- 数密度 n 或质量密度 ρ;
- 流速 $\mathbf{u}$;
- 温度 T。

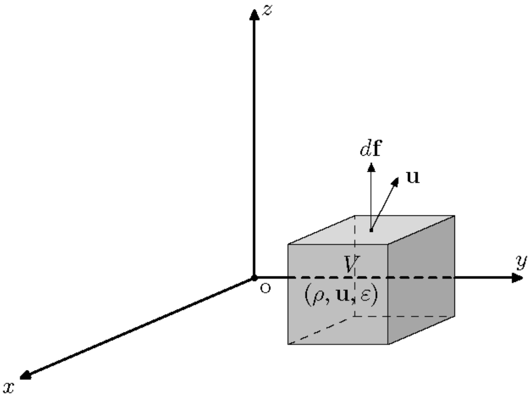
流体力学方程组

流体力学是描述局部热平衡状态宏观物质流动的有力手段。完备的流体力学方程组包括以下四个方程：

- 连续性方程：来自质量守恒的要求；
- 动量方程：来自动量守恒的要求：
- 能量方程：来自能量守恒的要求；
- 状态方程：描述流体物质的热力学性质。

流体力学方程组的前三个方程是三个守恒律的结果，不依赖于局部热平衡态的前提假定；但状态方程是局部热平衡态的结果 $\Longrightarrow$ 对状态方程作适当修正，流体力学方程可以近似描述远离局部热平衡态物质的流动。

流体方程的欧拉描述



考察固定体积 V 内流体的质量、动量以及能量的变化，就可以获得描述流体运动的三个基本方程。这种描述流体运动的方式称为欧拉描述。

考察流体中任意一个固定体积 V 内流体质量的变化。单位时间内流出体积 V 的流体质量为

$$\oint_S \rho\mathbf{u}\cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})d^3r, \tag{3}$$

单位时间内，体积 V 内的物质的质量损失为

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho d^3r = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}d^3r. \tag{4}$$

由于质量守恒，体积 V 内的物质只能通过流体运动而离开体积 V，因此方程(3) 和方程(4) 应该相等，于是有

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho d^3r = \oint_S \rho\mathbf{u}\cdot d\mathbf{f}, \Rightarrow \int_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\right] d^3r = 0.$$

因为 V 是任意选择的，因此有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0. \tag{5}$$

这就是连续性方程(continuity equation)。

动量方程

考察流体中任意一个固定体积 V 内流体动量的变化。在单位时间内因为流体的流动导致体积 V 内的动量损失为

$$\oint_S \rho \mathbf{u}\mathbf{u} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) d^3 r.$$

在单位时间内，体积 V 内的物质因对周围流体施加热压力 p 而损失的动量为

$$\oint_S p d\mathbf{f} = \int_V (\nabla p) d^3 r.$$

若单位质量的流体所受的外力为 $\mathbf{F}$，那么 V 内的流体在单位时间从外场力获得的动量为

$$\int_V \rho \mathbf{F} d^3 r.$$

在单位时间内，体积 V 内流体动量的变化为

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\mathbf{u}d^3r = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u})d^3r.$$

由于动量守恒，我们有如下等式，

$$-\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u})d^3r = \oint_S \rho\mathbf{u}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{f} + \oint_S p d\mathbf{f} - \int_V \rho\mathbf{F}d^3r.$$

因为 V 的选择是任意的，有动量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) + \nabla p = \rho\mathbf{F}. \tag{6}$$

利用连续性方程(5)，动量方程(6) 的形式可以化简，

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right] = -\nabla p + \rho\mathbf{F}. \tag{7}$$

方程(7) 又称为欧拉方程(Euler equation)。

引入动量流密度(momentum flux density)，

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho u_i u_k \tag{8}$$

或写为

$$\mathbf{\Pi} = p\mathbf{I} + \rho\mathbf{uu},$$

这里 $\mathbf{I}$ 是单位张量。利用这个张量，在无外力场的情况下，动量方程(6) 可以写为如下守恒方程的形式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \nabla\cdot\mathbf{\Pi} = 0. \tag{9}$$

这里我们假定流体没有受到外力的作用。

能量方程

考察流体中任意一个固定体积 V 内流体能量的变化。流体的能量包括流体的动能以及流体的内能，

$$\int_V \left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon\right) d^3r,$$

这里 ε 是单位质量的流体所含的内能，它是流体的质量密度 ρ 与压强 p 的函数。

因为流体的流动，体积 V 内的能量在单位时间的损失为，

$$\oint_S \left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon\right) \mathbf{u}\cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon\right)\mathbf{u}\right] d^3r,$$

由于压强做功，体积 V 内的流体在单位时间内损失的能量为

$$\oint_S p\mathbf{u}\cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla\cdot(p\mathbf{u})\, d^3r.$$

因为能量守恒，那么必然有

$$-\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon\right) d^3r = \oint_S \left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon\right) \mathbf{u}\cdot d\mathbf{f} + \oint_S p\mathbf{u}\cdot d\mathbf{f}.$$

由于体积 V 选择的任意性，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon\right) + \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon + p\right)\mathbf{u}\right] = 0. \tag{10}$$

单位质量物质的焓 h 与内能的关系为

$$h = \varepsilon + p/\rho,$$

能量方程可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon\right) + \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho h\right)\mathbf{u}\right] = 0. \tag{11}$$

由能量方程(11) 容易看到，流体的能流密度应该为

$$\mathbf{Q} = \rho\left(u^2/2 + h\right)\mathbf{u}. \tag{12}$$

利用连续性方程和动量方程，能量方程(11) 的形式可以改写为

$$\rho\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\varepsilon\right]-\frac{p}{\rho}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho\right]=0. \tag{13}$$

引入比容 $V=1/\rho$，上式可改写为

$$\frac{d\varepsilon}{dt}+p\frac{dV}{dt}=0, \tag{14}$$

这里 d/dt 表示的是跟随流体元运动的坐标系中的时间微商

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla.$$

另一方面，利用热力学微分关系式

$$Tds=d\varepsilon+pdV, \tag{15}$$

这里 s 是单位质量流体所含的熵，方程(14) 于是可以写为

$$\frac{ds}{dt}=0. \tag{16}$$

即理想流体元的熵是个运动不变量。这个方程的意义如下：由热力学系统的熵增与系统的热能变化有关，

$$ds=\frac{\delta Q}{T},$$

理想流体中不存在任何热力学不可逆过程，因此 $\delta Q=0$，此即方程(16)。

理想流体力学方程组(一)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{17a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u} + p\mathbf{I}) = 0, \tag{17b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \varepsilon\right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \varepsilon + p\right)\mathbf{u}\right] = 0. \tag{17c}$$

理想流体力学方程组(二)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \ln \rho = -\nabla \cdot \mathbf{u}, \tag{18a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{18b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) s = 0. \tag{18c}$$

状态方程

连续性方程、欧拉方程、能量方程共有五个方程(两个标量方程，一个矢量方程)，而有六个未知量(质量密度 ρ、内能密度 ε/熵密度 s、压强 p、流速 $\mathbf{u}$)。还需要一个描述物质固有属性的方程。

状态方程

将物质的内能密度 ε、密度 ρ 和压强 p 三个热力学量联系起来的方程称为状态方程(equation of state)

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, p) \tag{19}$$

状态方程给出了处于热平衡态物质的热力学量之间的关系，是物质的固有属性。

对于经典理想气体，其状态方程为，

$$\varepsilon = \frac{c_V}{m} p, \tag{20}$$

这里 m 是气体分子的质量，c_V 是气体的等容比热。单位质量经典理想气体的熵为

$$s = -\frac{1}{m}\ln p + \frac{c_p}{m}\ln T + \frac{1}{m}(c_p + \xi), \tag{21}$$

这里 c_p 是气体的等压比热，T 是温度。对于单原子分子经典理想气体，有

$$c_p = \frac{5}{2},\ c_V = \frac{3}{2},\ \xi = \frac{3}{2}\ln\frac{m}{2\pi\hbar^2}. \tag{22}$$

经典理想气体的压强与温度和密度的关系为

$$p = \frac{\rho T}{m}. \tag{23}$$

利用方程(23)消去方程(21)右端的温度，

$$p\rho^{-\gamma} = A(\gamma, m)e^{ms/c_V}. \tag{24}$$

这里 $\gamma = c_p/(c_p - 1) = c_p/c_V$ 是比热比，$A(\gamma, m)$ 是依赖于γ的气体常数。

对于温度为 $T=0$ 的理想电子气体，系统处于基态，其状态方程完全取决于量子效应。电子是费米子，服从费米— 狄拉克分布，

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\exp[(\varepsilon-\mu)/T]+1}.$$

这里 ε 是化学势，是温度和密度的函数。当 $T=0$ 时，电子的最大能量为费米能量 ε_{F}，即温度等于零时的化学势，

$$\varepsilon_{\mathrm{F}}=(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m_e}n^{2/3}. \tag{25}$$

单位体积电子气的能量密度为

$$(E_0/V)=\frac{3n}{10}\varepsilon_{\mathrm{F}}. \tag{26}$$

电子气的压强为

$$p_0=\frac{2}{3}(E_0/V)=\frac{n}{5}\varepsilon_{\mathrm{F}}. \tag{27}$$

当温度不为零，但满足条件 $T \ll \varepsilon_{\mathrm{F}}$ 时，单位体积理想电子气的熵为

$$(S/V) = \frac{\pi^2}{2}\frac{nT}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}. \tag{28}$$

电子的比热为

$$c_p = c_V = T\frac{\partial(S/V)}{n\partial T} = \frac{\pi^2}{2}\frac{T}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}. \tag{29}$$

单位体积电子气的能量密度为

$$(E/V) = (E_0/V)\left[1 + \frac{5\pi^2}{6}\left(\frac{T}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2\right]. \tag{30}$$

在热平衡态，物质处于能量为 E_n 的状态的几率满足吉布斯分布，

$$w_n = e^{F-E_n/T}, \text{ where } F = -T \ln \sum_n e^{-E_n/T}. \tag{31}$$

其中 F 是物质的 Gibbs 自由能，满足热力学微分关系式

$$dF = -SdT - pdV. \tag{32}$$

由此可以得到物质的熵和压强，

$$S = -(\partial F/\partial T)_V, \ p = -(\partial F/\partial V)_T. \tag{33}$$

已知物质的能级结构，就可以求得物质的状态方程。

在一维平板情况下，理想流体的运动方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \tag{34a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{34b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right) s = 0. \tag{34c}$$

物态方程则可以表示为熵与压强和密度的函数关系，

$$s = s(p, \rho) \tag{35}$$

在一维柱对称情况下，理想流体的运动方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u)}{\partial r}&=0,\\
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)s&=0.
\end{aligned}
$$

在一维球对称情况下，理想流体的运动方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho u)&=0,\\
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}\right)s&=0.
\end{aligned}
$$

一维理想流体力学方程组可统一写为如下形式,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^D}\frac{\partial (r^D \rho u)}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r}\right) s = 0.$$

其中 D 的取值如下

$$D = \begin{cases} 0, & \text{一维平板情况,} \\ 1, & \text{一维柱对称情况,} \\ 2, & \text{一维球对称情况.} \end{cases}$$

考察理想流体中的小扰动运动。将流体力学变量作分解为平衡量以及扰动量之和，

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho,\ p = p_0 + \delta p,$$

这里 ρ_0、 p_0 是未扰动流体的平衡密度和压强， $\delta\rho$、 δp 是密度和压强的扰动。由连续性方程，有

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

由动量方程，有

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial\delta p}{\partial x}.$$

这里假定 $u_0 = 0$。

因为理想流体的熵不变，压强扰动和密度扰动之间的关系为

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \delta \rho.$$

引入绝热声速，

$$c_s = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}. \tag{39}$$

于是动量方程为

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -c_s^2 \frac{\partial \delta\rho}{\partial x}.$$

利用连续性方程，将 u 消去，就得到如下方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \delta\rho = 0. \tag{40}$$

这是一个波动方程，波的速度就是 c_s，它就是理想流体中小扰动传播的速度。

理想气体绝热声速

利用理想气体的绝热状态方程(**??**)，绝热声速可以写为

$$c_s = \sqrt{(\gamma p/\rho)}, \tag{41a}$$

$$c_s = \text{const.} \times \rho^{(\gamma-1)/2}, \tag{41b}$$

$$c_s = \text{const.} \times p^{(\gamma-1)/2\gamma}. \tag{41c}$$

再利用理想气体的状态方程(20)，绝热声速与温度的关系为

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{T}{m}}. \tag{42}$$

将流体中的小振幅扰动展开为平面波形式

$$a \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}.$$

那么线性化熵方程变为

$$\omega\delta s = 0. \tag{43}$$

若流体中存在熵扰动，即 $\delta s \neq 0$，那么必然要求 $\omega = 0$。此时线性化连续性方程变为

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{44}$$

此时流速扰动与波矢垂直，而密度扰动 $\delta\rho$ 与熵扰动 δs 无关。线性化欧拉方程变为

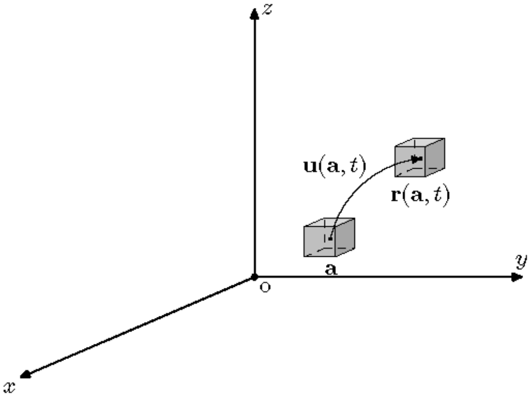
$$\mathbf{k}\delta p = 0. \tag{45}$$

此时没有压强扰动。

熵波的性质

- 有密度扰动、流速扰动以及熵扰动；
- 流速扰动的散度为零；
- 密度扰动、流速扰动以及熵扰动之间无关；
- 无压强扰动；
- 扰动的相速度等于 0,即扰动不传播。

流体方程的拉格朗日描述



跟随一个流体元，考察流体的质量、动量，以及能量的变化情况，这种描述流体运动的方式就是拉格朗日描述。

在一般情况下，拉格朗日描述的流体力学方程比较复杂。在直角坐标系中，设拉格朗日坐标 (τ, X, Y, Z) 与欧拉坐标 (y, x, y, z) 之间的微分关系如下，

$$\begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ u_x & \partial x/\partial X & \partial x/\partial Y & \partial x/\partial Z \\ u_y & \partial y/\partial X & \partial y/\partial Y & \partial y/\partial Z \\ u_z & \partial z/\partial X & \partial z/\partial Y & \partial z/\partial Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tau \\ dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} \tag{46}$$

流体元的速度为

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial \tau},\ u_y = \frac{\partial y}{\partial \tau},\ u_z = \frac{\partial z}{\partial \tau},$$

其初值条件为

$$(x, y, z)_{\tau=0} = (X, Y, Z).$$

引入变换的雅克比矩阵 $\mathbf{J}$ 及其伴随矩阵 $\mathbf{J}'$,

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} J_{xX} & J_{xY} & J_{xZ}\\ J_{yX} & J_{yY} & J_{yZ}\\ J_{zX} & J_{zY} & J_{zZ}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \partial x/\partial X & \partial x/\partial Y & \partial x/\partial Z\\ \partial y/\partial X & \partial y/\partial Y & \partial y/\partial Z\\ \partial z/\partial X & \partial z/\partial Y & \partial z/\partial Z\end{pmatrix}, \tag{47a}$$

$$\mathbf{J}'=\begin{pmatrix} J'_{Xx} & J'_{Xy} & J'_{Xz}\\ J'_{Yx} & J'_{Yy} & J'_{Yz}\\ J'_{Zx} & J'_{Zy} & J'_{ZZ}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial z}{\partial Z}-\frac{\partial y}{\partial Z}\frac{\partial z}{\partial Y} & -\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial z}{\partial Z}+\frac{\partial x}{\partial Z}\frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial Z}-\frac{\partial x}{\partial Z}\frac{\partial y}{\partial Y}\\ -\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial z}{\partial Z}+\frac{\partial y}{\partial Z}\frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial z}{\partial Z}-\frac{\partial x}{\partial Z}\frac{\partial z}{\partial X} & -\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Z}+\frac{\partial x}{\partial Z}\frac{\partial y}{\partial X}\\ \frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial z}{\partial Y}-\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial z}{\partial X} & -\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial z}{\partial Y}+\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y}-\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}\end{pmatrix}. \tag{47b}$$

雅克比矩阵与其伴随矩阵的矩阵积为 $\mathbf{J}'\mathbf{J}=J\mathbf{I}$，这里 J 是雅克比矩阵的行列式,

$$J=\begin{vmatrix} \partial x/\partial X & \partial x/\partial Y & \partial x/\partial Z\\ \partial y/\partial X & \partial y/\partial Y & \partial y/\partial Z\\ \partial z/\partial X & \partial z/\partial Y & \partial z/\partial Z\end{vmatrix}. \tag{48}$$

容易证明，伴随矩阵具有如下性质,

$$J'_{Ki}=\frac{\partial J}{\partial J_{iK}},\quad \sum_K\frac{\partial J'_{Ki}}{\partial X_K}=0. \tag{49}$$

利用伴随矩阵，逆变换为

$$\begin{pmatrix} d\tau \\ dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ -\sum_i J'_{Xi}u_i & J'_{Xx} & J'_{Xy} & J'_{Xz} \\ -\sum_i J'_{Yi}u_i & J'_{Yx} & J'_{Yy} & J'_{Yz} \\ -\sum_i J'_{Xi}u_i & J'_{Zx} & J'_{Zy} & J'_{Zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{50}$$

其中 $\sum_i$ 表示对三个分量求和。于是

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{J}\sum_{I,i} J'_{Ii}u_i\frac{\partial}{\partial X_I},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{J}\sum_{K} J'_{Ki}\frac{\partial}{\partial X_K},$$

由此有

$$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

连续性方程可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\rho}{J} \sum_{K,i} J'_{Ki} \frac{\partial u_i}{\partial X_K} = 0.$$

由流速的定义，有

$$\sum_{K,i} J'_{Ki} \frac{\partial u_i}{\partial X_K} = \sum_{K,i} J'_{Ki} \frac{\partial^2 x_i}{\partial X_K \partial \tau} = \sum_{K,i} J'_{Ki} \frac{\partial J_{iK}}{\partial \tau} = \sum_{K,i} \frac{\partial J}{\partial J_{iK}} \frac{\partial J_{iK}}{\partial \tau} = \frac{\partial J}{\partial \tau}.$$

连续性方程可改写为

$$\frac{\partial (\rho J)}{\partial \tau} = 0.$$

利用初值条件，有

$$\rho J = \rho_0.$$

最终连续性方程可写为

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho_0} \sum_{K,i} \frac{\partial (J'_{Ki} u_i)}{\partial X_K}.$$

动量方程为

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{1}{J}\sum_K J'_{Ki}\frac{\partial p}{\partial X_K} = -\frac{1}{J}\sum_K\frac{\partial(J'_{Ki}p)}{\partial X_K}$$

那么

$$\rho_0\frac{\partial u_i}{\partial\tau} = -\sum_K\frac{\partial(J'_{Ki}p)}{\partial X_K}.$$

能量方程则为

$$\rho_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} = -p\sum_{K,i}\frac{\partial(J'_{Ki}u_i)}{\partial X_K}.$$

综上所述，

$$\rho_0\frac{\partial V}{\partial\tau} = \nabla_{\mathbf{X}}\cdot(\mathbf{J}'\cdot\mathbf{u}), \tag{51a}$$

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau} = -\nabla_{\mathbf{X}}\cdot(p\mathbf{J}'), \tag{51b}$$

$$\rho_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} = -p\nabla_{\mathbf{X}}\cdot(\mathbf{J}'\cdot\mathbf{u}). \tag{51c}$$

这里 $\nabla_{\mathbf{X}}$ 是拉格朗日坐标的梯度算子。

特别地，对于一维平板流体运动。欧拉坐标 (t, x) 与拉格朗日坐标 (τ, X)之间的关系为

$$t = \tau, \tag{52a}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = u,\ x(0, X) = X. \tag{52b}$$

此时 $\mathbf{J}' = 1$，方程组(51)为

$$\rho_0 \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial X}, \tag{53a}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial X}, \tag{53b}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = -p \frac{\partial u}{\partial X}. \tag{53c}$$

耗散的起源

以气体为例，分子之间的碰撞时间 τ_c 以及平均自由程 λ_c 是有限的，那么非均匀气体的分子速度分布实际上是稍微偏离麦克斯韦分布的

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{\mathrm{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \delta f. \tag{54}$$

其中 δf 是对局部麦克斯韦分布的修正，

$$\left|\frac{\delta f}{f_{\mathrm{M}}}\right| \propto \frac{\lambda_c}{L_H} \sim \frac{\tau_c}{\tau_H} \ll 1.$$

计及修正后，流体方程将出现耗散项：粘滞与热传导。

粘滞

当流体的流速不均匀时，不同速度的流体元之间有摩擦，使流体的动能转变为流体的热能。

热传导

当流体的温度不均匀时，不同温度的流体元之间有热流，使流体的温度趋于均匀。

粘滞的效应可以通过在动量通量张量中增加一项粘滞的贡献来得到。将动量通量张量写为

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho u_i u_k + \pi_{ik}. \tag{55}$$

其中 π_{ik} 称为粘滞应力张量(viscous stress tensor)，它描述流体元之间的内摩擦引起的动量通量。

粘滞应力张量的性质

- 流速的梯度比较小时，粘滞应力张量正比于流速的梯度 $\partial u_i/\partial x_k$；
- 流体以角速度 $\mathbf{\Omega}$ 作整体匀角速转动时，即流速为 $\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ 时，粘滞不会出现；

对于各向同性的流体，满足上面这两个条件的二阶张量的最一般的形式为

$$\pi_{ik} = -\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) - \zeta\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ik}, \tag{56}$$

这里 η 和 ζ 是流体的粘滞系数(viscosity)，一般来说依赖于流体的温度和密度。计及粘滞，流体的动量方程变为，

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} = -\nabla P + \eta\nabla^2\mathbf{u} + (\zeta + \eta/3)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \rho\mathbf{F}. \tag{57}$$

这里假定粘滞系数是常数。方程(57)就是著名的 纳维尔—斯托克斯方程(Navier-Stokes equation)，方程右侧的第二项和第三项就是粘滞力。

例题

考察不可压缩流体因粘滞而引起的动能耗散。

由于不可压缩流体的密度是一个常数，流体的动能为

$$\mathcal{E}_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\rho \int_V u^2 d^3 r.$$

流体动能随时间的变化率为

$$\dot{\mathcal{E}}_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u^2) d^3 r = \int_V \rho \mathbf{u}\cdot\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d^3 r.$$

由纳维尔—斯托克斯方程，有

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k},$$

于是单位体积流体的动能变化率为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u^2/2\right) &= \rho u_i\left[-u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k}\right] \\ &= -\rho u_k\frac{\partial}{\partial x_k}(u_iu_i/2) - u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} - u_i\frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} \\ &= -\rho u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u^2/2 + p/\rho\right] - \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i\pi_{ik}) + \pi_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}.\end{aligned}$$

对于不可压缩流体，有 $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$，上式可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u^2/2\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho u_k\left(u^2/2 + P/\rho\right) + u_i\pi_{ik}\right] + \pi_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \tag{58}$$

其中 $u_i\pi_{ik}$ 则是因为流体的内摩擦(粘滞)而导致的能流密度，这是因为物质之间的动量传递总是伴随着能量传递。

将方程(58) 两边对流体的体积积分，再利用高斯定理，有

$$\dot{\mathcal{E}}_{\rm kin} = -\oint_S \left[\rho u_k \left(u^2/2 + p/\rho\right) + u_i \pi_{ik}\right] df_k + \int_V \pi_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d^3 r, \tag{59}$$

流体在固定边界的速度因粘滞而为零。因此有

$$\dot{\mathcal{E}}_{\rm kin} = \int_V \pi_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d^3 r = \frac{1}{2} \int_V \pi_{ik} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) d^3 r.$$

不可压缩流体的粘滞应力张量为 $\pi_{ik} = -\eta(\partial u_k/\partial x_i + \partial u_i/\partial x_k)$，我们最终有

$$\dot{\mathcal{E}}_{\rm kin} = -\frac{\eta}{2} \int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 d^3 r. \tag{60}$$

由于粘滞的作用总是使流体的动能减少，那么总是有 $\dot{\mathcal{E}}_{\rm kin} < 0$，而方程(60) 右边的积分式总是大于零的，因此粘滞系数 η 总是大于零的。

粘滞使流体的动能转化为热能；热传导使热能从流体的高温区向低温流动，形成热流。当流体的温度梯度很小时，热流的大小与温度梯度成正比，

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \tag{61}$$

这里 κ 称为热导(thermal conductivity)。粘滞对能流的贡献为 $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\pi}$。因此，考虑了耗散效应之后，流体的能量方程变为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon\right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho h\right)\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\pi} - \kappa \nabla T\right] = 0, \tag{62}$$

而能量通量为

$$\mathbf{Q} = \left(u^2/2 + h\right)\rho\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\pi} - \kappa \nabla T. \tag{63}$$

能量方程(62) 也可以表示为熵的演化方程，

$$\rho T\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)s=-\pi_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\nabla\cdot(\kappa\nabla T). \qquad (64)$$

方程(64) 的意义是很明显的：方程右边第一项是单位体积的流体因粘滞而产生的热能，第二项是因为热传导流入单位体积的热能。

对于单原子分子理想气体，其单位体积的内能为

$$\rho\varepsilon=\frac{3}{2}nT, \qquad (65)$$

这里 n 是粒子的数密度， T 是气体温度。将表达式(65) 代入能量守恒方程(62)，再利用连续性方程和动量方程，就得到温度的演化方程

$$\frac{3}{2}n\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)T=-p\nabla\cdot\mathbf{u}-\pi_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\nabla\cdot(\kappa\nabla T). \qquad (66)$$

方程右边第一项是压强做功导致的温度变化。

粘滞和热传导是不可逆热力学过程，应该会导致流体的熵随时间增长，为此我们考察非理想流体的熵随时间的变化。给定体积 V，流体的熵为

$$S = \int_V \rho s d^3 r,$$

其随时间的变化率为

$$\dot{S} = \int_V \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} d^3 r.$$

利用连续性方程，有

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -s\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \rho \frac{\partial s}{\partial t}.$$

利用粘滞应力张量的表达式，熵方程(64) 的形式可改写为

$$\begin{aligned} \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s \right) =& \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{u} \right)^2 \\ & + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \end{aligned} \tag{67}$$

于是有

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -s\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) - \rho\mathbf{u}\cdot\nabla s + \frac{1}{T}\nabla\cdot(\kappa\nabla T) + \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)^2 + \frac{\zeta}{T}(\nabla\cdot\mathbf{u})^2.$$

那么流体熵的变化率为

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\int_V \nabla\cdot(\rho s\mathbf{u})\,d^3r + \int_V \frac{1}{T}\nabla\cdot(\kappa\nabla T)d^3r + \int_V \frac{\zeta}{T}(\nabla\cdot\mathbf{u})^2 d^3r \\ &\quad + \int_V \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)^2 d^3r \\ &= -\int_V \nabla\cdot(\rho s\mathbf{u})\,d^3r + \int_V \nabla\cdot\left(\frac{\kappa\nabla T}{T}\right)d^3r + \int_V \frac{\kappa(\nabla T)^2}{T^2}d^3r \\ &\quad + \int_V \frac{\zeta}{T}(\nabla\cdot\mathbf{u})^2 d^3r + \int_V \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\nabla\cdot\mathbf{u}\right)^2 d^3r.\end{aligned}$$

边界条件

- 流体在固定边界的流速为零，$\mathbf{u}=0$；
- 系统封闭，流体在边界的热流为零，$\nabla T=0$ 。

于是有

$$\dot{S}=\int_V \frac{\kappa(\nabla T)^2}{T^2}d^3r+\int_V \frac{\zeta}{T}(\nabla\cdot\mathbf{u})^2 d^3r + \int_V \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2 d^3r. \tag{68}$$

显然，为了保证 $\dot{S}>0$，三个系数 κ、 η 以及 ζ 必须大于零。

声波是流体中的宏观运动，会由于不可逆热力学过程而逐渐衰减。系统的总能量为，

$$dE = dE_{\mathrm{diss}} + dE_{\mathrm{mech}}.$$

其中 $dE_{\mathrm{diss}} = TdS$ 是耗散过程导致的能量变化，dE_{mech} 是系统的机械运动能的变化。由于能量守恒，我们有

$$\dot{E}_{\mathrm{mech}} = -\dot{E}_{\mathrm{diss}} = -T\dot{S}.$$

对于均匀流体中的声波，利用关系式(68)，我们有

$$\dot{E}_{\mathrm{mech}} = -\frac{\kappa}{T}\int_V (\nabla T)^2 d^3r - \zeta\int_V (\nabla\cdot\mathbf{u})^2 d^3r - \frac{\eta}{2}\int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2 d^3r$$

设声波是单色平面的，其扰动速度为

$$\mathbf{u} = u_0 \cos(kx - \omega t)\mathbf{e}_x,$$

相应的温度和压强扰动为

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \delta p,\ \delta p = \rho c_s u.$$

利用声波的上述关系式，我们有 [1]

$$\overline{\dot{E}_{\text{mech}}} = -\frac{1}{2}k^2 u_0^2 V \left[\kappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\right]$$

由此可见，粘滞和热传导对声波的能量耗散均起作用。

[1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1987), 2nd Edition, Sect. 79.

声波的总能量为

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\rho u_0^2 V.$$

声波的能量衰减率为

$$\gamma = -\frac{\overline{\dot{E}_{\mathrm{mech}}}}{2\overline{E}} = \frac{\omega^2}{2\rho c_s^2}\left[\kappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\right]. \tag{69}$$

该等式成立的前提条件是 $\gamma \ll \omega$。声波振幅随时间的关系为 $e^{-\gamma t}$。

由若干种性质不同的粒子混合而成的流体物质是混合物(mixture)。不同种类粒子占物质总量的百分比，即粒子的浓度/丰度(concentration)，是描述混合物性质的基本物理量。描述混合物演化的完备流体力学方程组必须包含丰度演化方程。而且，由于非均匀性，混合物流体中会出现新的不可逆热力学过程：扩散(diffusion)。

为了简化讨论，我们仅讨论只含有两种粒子的混合物流体。引入质量丰度 c，

$$c = \frac{n_1 m_1}{n_1 m_1 + n_2 m_2}, \tag{70}$$

这里 $n_{1,2}$ 是粒子的数密度，$m_{1,2}$ 是粒子的质量。由于扩散，粒子的丰度将发生演化，

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\right) c = -\nabla\cdot\mathbf{i}. \tag{71}$$

方程右边的 $\mathbf{i}$ 是扩散流。当梯度很小时，扩散流可以表示为

$$\mathbf{i} = -\rho D(\nabla c + \kappa_T \nabla \ln T + \kappa_p \nabla \ln p), \tag{72}$$

其中 D 是扩散系数 (diffusion coefficient)，描述了丰度梯度驱动的扩散流；$\kappa_T D$ 是热扩散系数 (thermal diffusion coefficient)，描述了温度梯度驱动的扩散流；$\kappa_p D$ 是压强扩散系数 (barodiffusion coefficient)，描述了压强梯度驱动的扩散流。

扩散是不可逆热力学过程，流体的熵方程也有所变化，

$$\rho T\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)s=-\pi_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\nabla\cdot(\mathbf{q}-\mu\mathbf{i})-\mathbf{i}\cdot\nabla\mu. \tag{73}$$

其中 μ 是物质的化学势，$\mathbf{q}$ 是热流，

$$\mathbf{q}=[\kappa_T(\partial\mu/\partial c)_{p,T}-T(\partial\mu/\partial T)_{p,c}+\mu]\mathbf{i}-\kappa\nabla T. \tag{74}$$

能量方程的形式不变，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho\varepsilon\right)+\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho h\right)\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\pi}+\mathbf{q}\right]=0. \tag{75}$$

混合物质的热力学关系式为

$$d\varepsilon=Tds-pdV+\mu dc, \tag{76a}$$
$$dh=Tds+Vdp+\mu dc. \tag{76b}$$