中 国 科 学 技 术 大 学

2015—2016 学年第一学期考试试卷

考试科目:复变函数 (B 型)　　　　　　　　得分 ______________

学生所在系: ___________　　　　姓名 __________　　　　学号 __________

装订线 答题时不要超过此线

一. (共 12 分) 求解以下复方程

$(1)z^3+8=0,\quad (2)e^{iz}=1+i,\quad (3)|\cos z|=|\sin z|$

二. (9 分) 已知解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 其实部 $u(x,y)=x^2-y^2+3yx+x+1$, 且 $f(0)=1$, 求虚部 $v(x,y)$, 并计算 $f'(1)$.

三 计算积分 (共 36 分)

$$(1)\int_c |z|\overline{z}\,dz,\qquad \text{其中}c\text{是从}z=-2\text{到}z=2\text{沿圆周}|z|=2\text{的上半圆}$$

$$(2)\int_{|z|=4}\frac{e^z}{(z-1)^2(z-3)}\,dz,\qquad (3)\int_{|z|=1}z^5\left(1-\cos(\frac{2}{z})\right)\mathrm{d}z\,;$$

.

$$(4)\int_{|z|=2}\frac{\cos 2z\,\mathrm{d}z}{z^2\sin z},\qquad (5)\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+e^{i\theta}},$$

$$(6)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{x^4+1}dx$$

四. (14 分) 函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)^2}$

(1) 把 $f(z)$ 在 $z=0$ 展开成幂级数，并指出收敛区域。

(2) 把 $f(z)$ 在区域 $0<|z-2|<4$ 展成罗朗级数。

五(6 分) 判断 $\sin z=2z^4-8z^2+z$ 在 $|z|<1$ 的根的个数，并说明理由。

六(10 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程：

$$\begin{cases} y''-4y'+4y=te^{2t}\\ y(0)=0,y'(0)=-3. \end{cases}$$

六 (7 分) 设 $f(z)$ 在不包含无穷远点的复平面上除了 $z=2$ 外都解析， $z=2$ 是 $f(z)$ 的二级极点，当 $|z|>2015$ 时，存在 $M>0$, 使 $|f(z)|<M$. 且有 $f(0)=1,f(1)=2,f(3)=0$, 求 $f(z)$ 的表达式。

七(6 分) 设 f(z) 在以 a 点为中心的圆盘 $\overline{E}=\{|z-a|\leq 1\}$ 上解析， M 是 $|f(z)|$ 在 $\overline{E}$ 的最大值，记 $c=f'(a)-2hM,$其中$h>1$ 为实数，求证 $f(z)=c$ 在圆盘内部 $\overline{E}=\{|z-a|<1\}$ 中无解

(2)求$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}\dfrac{\cos x}{x^4-2x^2+4}dx$.

参考答案

一填空题，每题 3 分

$$1.\, z=(2k\pi+2)-(\ln 2)i, \text{k 为整数}, \qquad 2.\, z=\frac{2\pi i}{n!}, \qquad 3.\, z=-\frac{1}{8}$$

$$4.\, f(z)=z^2+2z+1\,, \qquad 5.\, n \qquad 6.\, e^x$$

注：第 4 小题答成 $f(z)=x^2-y^2+2x+1+i(2xy+2y)$ 也算对

二、级数展开题 (**每题** 7 **分**)

$$1.f(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n=\sum_{n=-2}^{+\infty} z^n \;\; (0<|z|<1)$$

$$2.\; f(z)=\frac{1}{z-4}\,\frac{1}{2+(z-4)}=\frac{1}{z-4}\frac{\frac{1}{z-4}}{1+\frac{2}{z-4}}$$

$$=\frac{1}{(z-4)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-2}{z-4}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{(z-4)^{n+2}} \;\; (2<|z-4|<+\infty)$$

三积分计算题 (**每题** 8 **分**).

(1)$f(z)=\frac{e^z\sin z}{\cos z}$ 在围道内的奇点为： $z_1=\frac{\pi}{2}, z_2=-\frac{\pi}{2}$, 则

$$\int_{|z|=2}\frac{e^z\sin z}{\cos z}dz=2\pi i\left(Res(f(z),z_1)+Res(f(z),z_2)\right)$$
$$=2\pi i\left(\frac{e^z\sin z}{(\cos z)'}\,|_{z=z_1}+\frac{e^z\sin z}{(\cos z)'}\,|_{z=z_2}\right)=\,-\mathbf{2}\pi\mathbf{i}(\mathbf{e}^{\frac{\pi}{2}}+\mathbf{e}^{-\frac{\pi}{2}})$$

(2) 记 $f(z)=z^3(1-\cos\frac{1}{z})$, 则 $f(z)=z^3\left(1-(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}+......)\right)$, 这样 $f(z)$ 的 z^{-1} 系数 $a_{-1}=-\frac{1}{4!}$, 由于闭路中只有唯一奇点 0 ，则原积分 $=2\pi i a_{-1}=-\frac{\pi\mathbf{i}}{\mathbf{12}}$

(3) 记 $f(z)=\frac{1}{z^3(13-z^2)}$, 闭路中只有唯一奇点 $0, Res[f(z),0]=\frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to 0}(z^3f(z))''=\frac{1}{169}$, 这样：

$$\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(13-z^2)}=2\pi i Res[f(z),0]=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{169}}\pi\mathbf{i}$$

(4) 令 $z=e^{i\theta}$, 则 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5-3\cos\theta}=\int_{|z|=1}f(z)dz$, 其中 $f(z)=\dfrac{2i}{3z^2-10z+3}$,$f(z)$ 在 $|z|=1$ 内有唯一奇点 $z_1=\frac{1}{3}$, 而 $Res[f(z),\frac{1}{3}]=\lim\limits_{z\to\frac{1}{3}}\left((z-\frac{1}{3})f(z)\right)=-\frac{i}{4}$, 所以由留数定理,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5-3\cos\theta}=\int_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i Res[f(z),\frac{1}{3}]=2\pi i\times(-\frac{i}{4})=\frac{\pi}{\mathbf{2}}$$

(5) 取 $f(z)=\frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}$, 并取围道 $C=[-R,-r]+C_r+[r,R]+C_R$, 其中 $R>r>0$, C_r 指以原点为中心 r 为半径的上半圆，即 $C_r=\{z\mid |z|=r, Imz\geq 0\}$. C_R 类似定义。 $f(z)$ 在围道 C 内奇点为： $z_1=1+i$ 。这样由留数定理：

$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{C_r} f(z)dz + \int_r^R f(x)dx + + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i Res[f(z), z_1] \qquad (1)$，由大圆弧原理（引理 1）或由约当引理（引理 3）: $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$，再由小圆弧引理（引理 2）: $\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz = -\pi i Res[f(z), 0] = -\dfrac{\pi i}{2}$，而 $2\pi i Res[f(z), z_1] = 2\pi i \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \dfrac{\pi}{2}e^{-1}\left((\cos 1 + \sin 1) + i(\sin 1 - \cos 1)\right)$, 这样结合 (1) 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+2x+5)} - \frac{\pi i}{5} = \frac{\pi}{10}e^{-2}\left((-\cos 1 - 2\sin 1) + i(-2\cos 1 + \sin 1)\right).$$

最后比较虚部，原积分 $=\frac{\pi}{10}e^{-2}(-2\cos 1 + \sin 1) + \frac{\pi}{5}$.

五. (1) 记 $L(y(t)) = Y(p)$, 对方程作 Laplace 变换：得到：

$p^2Y(p) + pY(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$, 最后利用 Laplace 反变换

$$y(t) = Res[Y(p)e^{pt}, 0] + Res[Y(p)e^{pt}, -1]$$

$Res[Y(p)e^{pt}, 0] = \lim_{p\to 0}\frac{e^{pt}}{(p+1)})' = t-1,\ \ Res[Y(p)e^{pt}, -1] = \lim_{p\to -1}(\frac{e^{pt}}{p^2}) = e^{-t}$ 所以原方程解为

$$\mathbf{y(t) = e^{-t} + t - 1}$$

(2) 记 $L(y(t)) = Y(p)$, 对方程作 Laplace 变换：得到：

$p^2Y(p) - p - 2 + 2 + 2(pY(p) - 1) + 2Y(p) = \frac{2}{p^2} \Rightarrow Y(p) = \frac{2}{(p^2+2p+2)p^2} + \frac{p}{p^2+2p+2}$,

利用化部分分式的方法， $Y(p) = -\frac{1}{2}\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} + \frac{\frac{3}{2}(p+1)-1}{(p+1)^2+1}$, 最后利用 Laplace 反变换并结合位移定理得到：

$$\mathbf{y(t) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{3}{2}e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t}$$

七. 1) **证明**：如果 $|f(z)| \equiv R$, 证明 $f(z)$ 一定恒为常数，这里 R 是正的实常数. 证明：设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, 依条件： $u^2 + v^2 = R^2$, 两边分别对 x 和 y 求导得到：

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

利用 C-R 方程 $u_x = v_y,\ \ u_y = -v_x$, 上式变为：

$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ vu_x - uv_x = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

把 (2) 看成 u_x, v_x 的方程组，再因为 $u^2 + v^2 \neq 0$, 即方程组系数行列式不为 0 ，这样解得：$u_x = v_x = 0$ ，再次利用 C-R 方程，得到： $u_y = v_y = 0$, 这样 u, v 都为常数，即 $f(z)$ 一定恒为常数，证闭.

1 ）令 $H(z) = f(z) - g(z)$, 这样只要证明在 D 内 $H(z)$ 恒等于 0 ，首先，依条件，$H(a_n) = f(a_n) - g(a_n) = 0, n = 0, 1, 2......$, 由于 $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, 且 $H(z)$ 在 a 点连续，所以 $H(a) = \lim_{n\to+\infty} H(a_n) = 0$, 这样 a 是 H(z) 的一个零点，并且不是孤立的.

2) 我们以下证明存在 a 的一个领域 S 使得在 S 内 $H(z)$ 恒等于 0. 用反证法，假定不然，则 $H(z) = (z-a)^m\varphi(z)$, 其中 m 为某一正整数，而 $\varphi(z)$ 解析， $\varphi(a) \neq 0$, 由连续性，存在

a 的一个领域 v, 在 v 中 $\varphi(z) \neq 0$, 这样在 v 内除 a 点外都有 $H(z) \neq 0$, 这说明 a 是孤立零点。这与 a 不是孤立零点矛盾。这样我们就证明了存在 a 的一个领域 S 使得 $H(z)$ 恒等于 0.

3) 最后，对与 D 内任意一点 z_0, 我们总可找折线 L 连接 a 和 z_0, 利用滚圆法 (即利用 a 为中心可作圆 S_1, 使 S_1 内 H(z) 恒为 0，然后再利用 S_1 与折线 L 的交点再作圆 S_2, 使 S_2 内 H(z) 恒为 0, 一直作下去直到最后一个圆包含了 z_0) 可证明 $H(z_0) = H(a) = 0$, 这样就证明了结论。

注：以上前两步已正确论述，而在第三步未详细论述滚圆法的不扣分。