§7.3 幂级数与 Taylor 展开式

下面形式的函数项级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots . \tag{7.1}$$

称为在 x_0 展开的幂级数. 因为这种级数的前 $n+1$ 项的和是 n 次多项式, 所以它有很好的性质, 且便于计算.

为了方便, 我们将讨论在 0 点展开的简单形式的幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots . \tag{7.2}$$

一般的幂级数是这种简单幂级数的一个平移. 幂级数的形式虽然简单, 但它和后面要讨论的三角级数是应用最广泛也最重要的两类函数项级数.

我们先研究幂级数的和函数的性质: 定义域、连续性、可微性和可积性.

7.3.1 幂级数的收敛区域

定理 1 如果幂级数在 $x_0\,(\neq 0)$ 处收敛, 则它在所有 $|x|<|x_0|$ 的点 x 处绝对收敛. 如果幂级数在 x_0 处发散, 则当 $|x|>|x_0|$ 时也发散.

证明 设幂级数在 $x_0\neq 0$ 收敛, 则根据级数收敛的必要条件, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n=0$. 因此存在 $M>0$ 使得 $|a_n x_0^n|<M$（有界）. 因为对于任意满足 $|x|<|x_0|$ 的 x, 有

$$a_n x^n = a_n x_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n,$$

因而

$$|a_n x^n| \leqslant M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

由于 $|\frac{x}{x_0}|<1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\frac{x}{x_0}|^n$ 收敛, 根据比较判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ 收敛. 证毕.

分析一下, 幂级数的收敛域 E 有三种可能:

1° 仅在 $x = 0$ 处收敛: $E = \{0\}$;

2° 在 $E = (-\infty, +\infty)$ 上处处收敛;

3° 有不为零的收敛点和发散点, 所以 E 有界.

定理 2 如果幂级数有非零的收敛点和发散点, 则有正数 R, 使的幂级数在 $(-R, R)$ 中绝对收敛, 而当 $|x| > R$ 时, 幂级数发散.

证明 由于有发散点, 所以 E 是非空有界集, 故 E 有上确界, 记为 R. 又由于有非零的收敛点, 所以 $R > 0$, 根据定理 1 就得到本定理的结论.

称上面的 R 为幂级数的收敛半径; $(-R, R)$ 称为级数的收敛区间. 现在基本明白了, 在原点展开的幂级数的收敛区域 E 基本上是一个以原点为中心的区间, 在这个区间内部, 幂级数不但收敛而且绝对收敛. 只是区间的端点尚不确切, 需要具体问题具体对待.

7.3.2 收敛半径的计算

定理 3 如果 $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$; 或 $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = L$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为

$$R = \frac{1}{L} = \begin{cases} 0, & L = +\infty; \\ \frac{1}{L}, & L \text{ 有限}; \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$$

证明 根据 D'Alembert 判别法从

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = L|x|.$$

故可知当 $L|x| < 1$, 即 $|x| < R = \frac{1}{L}$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛; 而当 $|x|L > 1$, 即 $|x| > R$ 时, 幂级数发散. 所以, 级数的收敛半径为 R. 第二个公式可根据 Cauchy 判别法证明.

例 1 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}x^{n}$ 的收敛半径 R.

解 因为 $\lim \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} = 1$, 故 $R = 1$;

当 $\alpha = 0$: $\sum x^n$ 在 $x = \pm 1$ 发散, 所以 $E = (-1, 1)$（不含端点）.

当 $\alpha = -1$: $\sum \frac{1}{n}x^n$ 在 $x = 1$ 发散, 在 $x = -1$ 收敛. 所以 $E = [-1, 1)$（含左端点, 不含右端点）.

当 $\alpha = -2$: $\sum \frac{1}{n^2}x^n$ 在 $x = \pm 1$ 都收敛. 所以 $E = [-1, 1]$（含左右端点）.

上面的例子说明在收敛区间的端点, 各种情况都可能发生.

例 2 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n}$ 的收敛半径 R.

解 因为 $\lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$, 故 $R = +\infty$.

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径 R.

解 设 $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$. 因为

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\frac{(2n)!}{n!^2}} |x|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |x|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} 4|x|^2 \\
&= 4|x|^2,
\end{aligned}
$$

所以根据正项级数的 d'Alembert 判别法可知, 当 $4|x|^2 < 1$ 时, 该级数收敛; 当 $4|x|^2 > 1$ 时, 该级数发散. 因此该级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{2}$.

例 4 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 其中

$$a_n = \begin{cases} 2^k, & n = 2k, \\ k, & n = 2k+1. \end{cases}$$

解 原幂级数可以写成两个幂级数之和:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n+1}.$$

与前一个例题类似用 d'Alembert 判别法可知, 上式右端第一个级数的收敛半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 右端第二个级数的收敛半径为 1. 故, 原幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

也可以用

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{2}$$

求得 $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7.3.3 幂级数的运算

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2, 记 R 为 R_1 和 R_2 中较小的一个. 两个幂级数在共同的收敛区域, 即, 在 $(-R, R)$ 中可以相加, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n.$$

两个幂级数还可以相乘, 其结果还是一个幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

在 $(-R, R)$ 中成立, 其中 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

若 $R_1 < R_2$, 则上面两式右端的幂级数的收敛半径为 R_1.

例 5 求函数 $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 在 0 点的幂级数展开式.

解 注意到

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}.$$

由于

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1),$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (-2 < x < 2),$$

因此当 $-1 < x < 1$ 时, 有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n.$$