第一章习题答案

习题 1.1

黑体辐射公式为

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1}d\nu,$$

ρ_ν 是电磁波在频率为 ν 时的能量密度，因此，在频率 $(\nu_0, \nu_0 + d\nu)$ 之间的电磁波总能量为

$$dE = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu_0/k_BT}-1}d\nu,$$

频率 ν 与波长 λ 之间的关系为

$$\lambda\nu = c,$$

因此，在频率 $(\nu_0, \nu_0 + d\nu)$ 之间的电磁波波段为 $\left(\frac{c}{\nu_0 + d\nu}, \frac{c}{\nu_0}\right) = \left(\frac{c}{\nu_0}\left(1 - \frac{d\nu}{\nu_0}\right), \frac{c}{\nu_0}\right)$ ，记这个区间为 $(\lambda_0, \lambda_0 + d\lambda)$ ，其中 $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}, d\lambda = \frac{c}{\nu_0^2}d\nu$ ，并且记 ρ_λ 是电磁波在波长为 λ 时的能量密度，因此

$$\rho_{\nu_0}d\nu = \rho_{\lambda_0}d\lambda,$$

$$\rho_{\lambda_0} = \frac{1}{c}\rho_{\nu_0}\nu_0^2 = \frac{8\pi h\nu_0^5}{c^4}\frac{1}{e^{h\nu_0/k_BT}-1} = \frac{8\pi hc}{\lambda_0^5}\frac{1}{e^{hc/k_BT\lambda_0}-1},$$

记

$$x = \frac{hc}{k_BT\lambda_0},$$

其中 $x > 0$ 。因此

$$\rho_{\lambda_0} = A\left(x^{-5}\left(e^x - 1\right)\right)^{-1},$$

其中 A 是一个常数，具体大小与题目无关，因此不做展开。因为 $x^{-5}\left(e^x - 1\right) > 0$ ，所以只需计算 $x^{-5}\left(e^x - 1\right)$ 的最小值即可。令

$$f(x) = x^{-5}\left(e^x - 1\right),$$

因此

$$f'(x) = -5x^{-6}\left(e^{x}-1\right)+x^{-5}e^{x} = x^{-6}e^{x}\left(x-5+5e^{-x}\right),$$

令

$$g(x) = x-5+5e^{-x},$$

因此

$$g'(x) = 1-5e^{-x,}$$

$g(x)$ 在 $(0, \log 5)$ 上递减，在 $(\log 5,\ \infty)$ 上递增。而 $\lim_{x\searrow 0} g(x) = 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上有唯一解，令其为 x^* ，即

$$x^* - 5 + 5e^{-x^*} = 0,$$

因此，$f(x)$ 在 $(0,\ x^*)$ 上递减，在 $(x^*,\ \infty)$ 上递增。$f(x)$ 的最小值为 $f(x^*)$ ，所以只需求解 x^* 的大小即可。

显然，$g(x)$ 在 x^* 附近是可导的，且 $g'(x^*) \neq 0$ ，因为 $x^* > \log 5$ 。所以牛顿迭代法是可行的。因为

$$g(4) = -1+5e^{-4} < -1+5\times 2^{-4} < 0,$$

$$g(5) = 5e^{-5} > 0,$$

所以 $x^* \in (4,\ 5)$ 。而 $g'(x)$ 在 $(4,\ 5)$ 上是大于 0 的，所以可以设置迭代的第一项为 $x_0 = 4.5$ 「只需 $4 < x_0 < 5$ 即可，可以任取」。根据牛顿迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - 5 + 5e^{-x_n}}{1-5e^{-x_n}},$$

可得

$$x_1 \approx 4.97059,$$

$$x_2 \approx 4.96511,$$

$$x_3 \approx 4.96511,$$

因此 $x^* \approx 4.97$ ，即

$$\frac{hc}{k_B T \lambda_0} \approx 4.97,$$

$$b = \lambda_0 T \approx \frac{hc}{4.97 k_B} \approx 2.90 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}.$$

附录：牛顿迭代法可行性的证明

令 $f(x) \in C^2(U)$「定义域为 U ，且具有连续的二阶导数」，其中 $U \subseteq \mathbb{R}$ 是开子集。假设 $f(x)$ 具有零点 x^* ，在 x^* 附近泰勒展开可得

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2,$$

其中 ξ_n 在 x^* 与 x_n 之间。所以

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n) = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2,$$

令

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

因此

$$x^* - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2,$$

记误差 $\epsilon_n = \left| x^* - x_n \right|$ ，因此

$$\epsilon_{n+1} = \frac{\left| f''(\xi_n) \right|}{2\left| f'(x_n) \right|} \epsilon_n^2,$$

所以需要满足以下条件，牛顿迭代法才能够使用：

(1) 当 $x \in \left[x^* - \epsilon_0, x^* + \epsilon_0\right]$ 时，$f'(x) \neq 0$ 。

(2) 当 $x \in \left[x^* - \epsilon_0, x^* + \epsilon_0\right]$ 时，$f''(x)$ 是连续的。

(3) 因为 $\left[x^* - \epsilon_0, x^* + \epsilon_0\right]$ 是紧集「任何开覆盖都具有有限的子开覆盖」，根据 $\left| f''(x) \right|, \left| f'(x) \right|$ 的连续性，并且 $f'(x) \neq 0$，$\left| f''(x) \right|, \left| f'(x) \right|$ 可以在 $\left[x^* - \epsilon_0, x^* + \epsilon_0\right]$ 上取到最大与最小值。记 $\left| f''(x) \right|$ 在 $\left[x^* - \epsilon_0, x^* + \epsilon_0\right]$ 的最大值为 M ，$\left| f'(x) \right|$ 在 $\left[x^* - \epsilon_0, x^* + \epsilon_0\right]$ 的最小值为 $m(m > 0)$ ，$\dfrac{M}{2m} = C$ ，需要满足 $C\epsilon_0 < 1$ 。

如果这三个条件同时满足，那么

$$\epsilon_{n+1} \leq C\epsilon_n^2,$$

记 $K \in (C\epsilon_0, 1)$ 是一个常数，并且令 $\epsilon_0 > 0$「否则直接找到零点了，无论怎么迭代都会停留在零点不动」。因此

$$\epsilon_1 \leq C\epsilon_0^2 < K\epsilon_0,$$

$$\epsilon_2 \leq C\epsilon_1^2 < C\epsilon_0 K^2 \epsilon_0 < K^2 \epsilon_0,$$

假设

$$\epsilon_n < K^{2^{n-1}} \epsilon_0,$$

那么

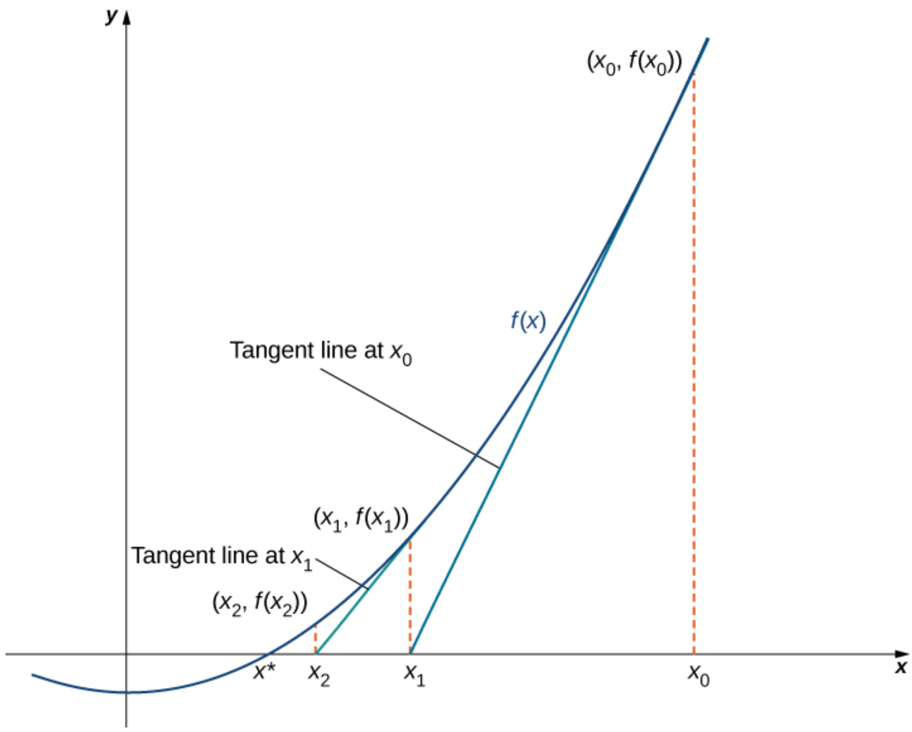
$$\epsilon_{n+1} \leq C\epsilon_n^2 < C\epsilon_0 K^{2^n} \epsilon_0 < K^{2^n} \epsilon_0,$$

因此，对于任意 n

$$\epsilon_n < K^{2^{n-1}} \epsilon_0,$$

因此这个迭代是收敛的。

如图所示，这是比较容易理解的一种办法。



习题 1.2

价电子的动能为

$$K \approx 3 \text{ eV},$$

价电子的静能「静止质量与光速平方的乘积」为

$$E = m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV},$$

因此 $K \ll E$ ，无需考虑相对论效应。德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e K}} \approx 7.08 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

习题 1.3

氦原子的动能为

$$K = \frac{3}{2}k_B T \approx 1.29 \times 10^{-4} \text{ eV},$$

氦原子的静能为

$$E \approx 4m_p c^2 \approx 3.73 \text{ GeV},$$

因此 $K \ll E$ ，无需考虑相对论效应。德布罗意波长为

$$\lambda \approx \frac{h}{\sqrt{2(4m_p)K}} \approx 1.26 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

习题 1.4

(1) 一维谐振子的能量为

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2,$$

因此，在能量给定的情况下

$$p = \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)},$$

Sommerfield 的量子化条件为

$$\int_C p\,dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) h,$$

其中 C 是一维谐振子运动一个周期走过的轨道。在一个周期内，谐振子先从坐标 $(-A,0)$ 运动到坐标 $(A,0)$ ，再从坐标 $(A,0)$ 运动到坐标 $(-A,0)$ 。其中

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}},$$

记运动轨道的参数方程为

$$x(t) = \begin{cases} -A + \frac{4A}{T}t, & 0 \le t < \frac{T}{2}, \\ 3A - \frac{4A}{T}t, & \frac{T}{2} \le t \le T, \end{cases}$$

因此「注意，后半周期谐振子运动方向向左，因此动量为负数」

$$p(t) = \begin{cases} \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}kx(t)^2\right)}, & 0 \le t < \frac{T}{2}, \\ -\sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}kx(t)^2\right)}, & \frac{T}{2} \le t \le T, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_C p\,dx &= \int_0^T p(t)x'(t)dt \\ &= \frac{4A}{T}\left(\int_0^{T/2} \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}k\left(-A + \frac{4A}{T}t\right)^2\right)}dt + \int_{T/2}^T \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}k\left(3A - \frac{4A}{T}t\right)^2\right)}dt\right) \\ &= 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)h, \end{aligned}$$

(我并不是很喜欢去计算这个) 因此

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k}{m}},$$

其中 $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ 是约化普朗克常数，在之后的课程中会广泛运用。

(2) 因为 $\mathbb{R}^3$ 的 de Rham 上同调群 (de Rham Cohomology Group) 为

$$H^p_{\mathrm{dR}}\left(\mathbb{R}^3\right) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0, \\ 0, & p \geq 1, \end{cases}$$

所以对于 $\mathbb{R}^3$ 上的任意光滑向量场 $\mathbf{B}$ ，如果 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ，那么都存在光滑向量场 $\mathbf{A}$ ，使得 $\mathbf{B} = \operatorname{curl}\ \mathbf{A}$ 。

令 $\mathbf{B}$ 为空间中的均匀磁场，因此存在光滑向量场 $\mathbf{A}$ ，使得 $\mathbf{B} = \operatorname{curl}\ \mathbf{A}$ 。此时光滑向量场 $\mathbf{A}$ 称为**磁矢势**。注意，磁矢势不一定是唯一的，只需要满足 $\mathbf{B} = \operatorname{curl}\ \mathbf{A}$ 即可。它没有实际的物理意义，但是数学上证明它是存在的，并且对于分析一些问题也具有一定的帮助。电子的**正则动量**定义为 $\mathbf{p} = m\mathbf{v} - e\mathbf{A}$ 。

Sommerfield 的量子化条件为

$$\int_C \mathbf{p} \cdot d\mathbf{s} = \left(n + \frac{1}{2}\right) h,$$

其中 C 是电子运动一个周期走过的轨道。因此

$$m \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} - e \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(n + \frac{1}{2}\right) h,$$

根据 Stokes 定理，令 S 是电子轨道包围的曲面，其半径为 R ，因此

$$e \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = e \int_S \operatorname{curl}\ \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = e \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \pi e B R^2,$$

而

$$m \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = m \frac{eBR}{m} 2\pi R = 2\pi e B R^2,$$

因此

$$\pi e B R^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right) h,$$

$$R = \sqrt{(2n+1)\frac{\hbar}{eB}}\,.$$

电子的动能为

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{eBR}{m}\right)^2=(2n+1)\frac{\hbar eB}{2m}=(2n+1)M_BB,$$

其中 $M_B=\dfrac{\hbar e}{2m}$ 为玻尔磁子。因此，动能间隔为

$$\Delta K=2M_BB\,.$$

附录：de Rham 上同调 (de Rham Cohomology) 「只讨论欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 开集 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 的情况」

令 $x^1,\dots,x^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的坐标，$dx^1,\dots,dx^n$ 为 n 个互不相同的对象，定义运算 $\wedge$ 满足

$$\begin{cases} dx^i\wedge dx^i=0, & i\in\{1,\,\dots,\,n\},\\ dx^i\wedge dx^j=-\,dx^j\wedge dx^i, & i,j\in\{1,\,\dots,\,n\},i\neq j,\end{cases}$$

并且运算满足结合律，你可以把它们拼在一起

$$\left(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\right)\wedge\left(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_l}\right)=dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_l},$$

对于整数 $0\le k\le n$ ，定义 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 $\Lambda^k(U)$ ，它的基为

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k},\qquad i_1,\dots,i_k\in\{1,\,\dots\,,n\},i_1<\cdots<i_k,$$

因此，$\Lambda^k(U)$ 的维数是

$$\dim\Lambda^k(U)=\binom{n}{k}.$$

定义

$$\Lambda^*(U)=\bigoplus_{k=1}^{n}\Lambda^k(U),$$

如果 $\omega\in\Lambda^k(U)\subseteq\Lambda^*(U)$ ，称 ω 的**次数 (Dimension)** 为 $|\omega|=k$ 。因此，映射 $\wedge:\Lambda^*(U)\times\Lambda^*(U)\to\Lambda^*(U)$ 将次数为 k 与次数为 l 的元素映射到次数为 $k+l$ 的元素，此时称 $\Lambda^*(U)$ 为**分次代数 (Graded Algebra)** 。并且满足

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{|\omega|\,|\eta|}\eta\wedge\omega\,.$$

记 $C^{\infty}(U)$ 为 U 上所有光滑函数 $f: U \to \mathbb{R}$ 的集合，很显然它是含幺交换环，只需定义乘积运算 $fg: U \to \mathbb{R}, (fg)(p) = f(p)g(p)$ 即可。定义分次代数

$$\Omega^*(U) = C^{\infty}(U) \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^*(U) = \bigoplus_{k=1}^{n} \Omega^k(U),$$

$\Omega^k(U)$ 元素称为 **k–形式 (k–Forms)**，它们都可以表示为

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \qquad \alpha_{i_1 \dots i_k} \in C^{\infty}(U),$$

0–形式则是光滑函数，即 $\Omega^0(U) \cong C^{\infty}(U)$ 。定义 $\mathbb{R}$ 上「注意：在含幺交换环 $C^{\infty}(U)$ 上不是线性的」的线性映射 $d: \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$

$$d\left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

举例：
在 $\mathbb{R}^3$ 上的 0–形式「光滑函数」可以表示为

$$f,$$

其中 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ 。因此

$$E: \Omega^0(\mathbb{R}^3) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^3), E(f) = f,$$

是同构映射。

可以计算得出

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

在 $\mathbb{R}^3$ 上的 1–形式可以表示为

$$\omega = P dx + Q dy + R dz,$$

其中 $P, Q, R \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ 。因此

$$F: \Omega^1(\mathbb{R}^3) \to \mathscr{X}(\mathbb{R}^3), F(P dx + Q dy + R dz) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big),$$

是同构映射。

可以计算得出

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)dx\wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz,
\end{aligned}
$$

在 $\mathbb{R}^3$ 上的 2–形式可以表示为

$$\eta = u dx\wedge dy + v dx\wedge dz + w dy\wedge dz,$$

其中 $u, v, w \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ 。因此

$$G:\Omega^2\left(\mathbb{R}^3\right)\to\mathscr{X}\left(\mathbb{R}^3\right), G\left(u dx\wedge dy + v dx\wedge dz + w dy\wedge dz\right) = \Big(u\left(x,y,z\right), -v\left(x,y,z\right), w\left(x,y,z\right)\Big),$$

是同构映射。

可以计算得出

$$d\eta = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)dx\wedge dy\wedge dz\,.$$

在 $\mathbb{R}^3$ 上的 3–形式可以表示为

$$\theta = f dx\wedge dy\wedge dz,$$

其中 $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ 。因此

$$H:\Omega^3\left(\mathbb{R}^3\right)\to C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right), H\left(f dx\wedge dy\wedge dz\right) = f,$$

是同构映射。

因此，下面的图表是交换的。

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^0(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "E"] & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "F"] & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "G"] & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \arrow[d, "H"] \\
C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{curl}"] & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"] & C^\infty(\mathbb{R}^3)
\end{tikzcd}
$$

△

因此，$\mathbb{R}$ 上的线性映射 $d\circ d:\Omega^k(U)\to\Omega^{k+2}(U)$ 为

$$
\begin{aligned}
d\circ d\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\alpha_{i_1\ldots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\right) &= d\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le i\le n}\frac{\partial\alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\right)\\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n}\frac{\partial^2\alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i\partial x^j}dx^i\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\partial^2\alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i\partial x^j}dx^i\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\\
&\quad+\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le j<i\le n}\frac{\partial^2\alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i\partial x^j}dx^i\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\partial^2\alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i\partial x^j}dx^i\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\\
&\quad+\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le j<i\le n}\frac{\partial^2\alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i\partial x^j}(-dx^j\wedge dx^i)\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial^2\alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial^2\alpha_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^j\partial x^i}\right)dx^i\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\\
&\equiv 0,
\end{aligned}
$$

即 $d\circ d\equiv 0$ 。

令 $\omega\in\Omega^k(U)$ ，如果 $d\omega=0$ ，则称 ω 是**闭合形式 (Closed Form)**；如果存在 $\eta\in\Omega^{k-1}(U)$ 使得 $\omega=d\eta$ ，则称 ω 是**恰当形式 (Exact Form)** 。

根据 $d\circ d\equiv 0$ 可得 $d(d\eta)=0$ 。因此，任意恰当形式都是闭合形式。但是反过来就不一定了，通过这一点，就引出了 de Rham 上同调 (de Rham Cohomology) 理论。

通过以上理论，可以写出 $\mathbb{R}$ 上的向量空间的序列

$$\cdots\to\Omega^{p-1}(U)\xrightarrow{d}\Omega^p(U)\xrightarrow{d}\Omega^{p+1}(U)\to\cdots,$$

定义子空间

$$
\begin{cases}
Z^p(U)=\mathrm{Ker}\left(d:\Omega^p(U)\to\Omega^{p+1}(U)\right),\\
B^p(U)=\mathrm{Im}\left(d:\Omega^{p-1}(U)\to\Omega^p(U)\right),
\end{cases}
$$

因此，$Z^p(U)$ 是 $\Omega^p(U)$ 所有闭合形式的集合，$B^p(U)$ 是 $\Omega^p(U)$ 所有恰当形式的集合。因为任意恰当形式都是闭合形式，所以 $B^p(U)\subseteq Z^p(U)$ ，再根据线性的性质可以得出 $B^p(U)$ 是 $Z^p(U)$ 的子空间。

定义 p 阶 de Rham 上同调群 (de Rham Cohomology Group in Degree p) 为

$$H^p_{\mathrm{dR}}(U)=\frac{Z^p(U)}{B^p(U)},$$

对于任意闭合形式 $\omega\in Z^p(U)$，定义它在 $H^p_{\mathrm{dR}}(U)$ 上的等价类为 $[\omega]$，因此当 $[\omega]=\left[\omega'\right]$ 时，存在 $\eta\in\Omega^{p-1}(U)$ 使得 $\omega'=\omega+d\eta$ 。如果 $H^q_{\mathrm{dR}}(U)=0$，那么对于任意闭合形式 $\omega\in Z^q(U)$，都具有 $[\omega]=0$，即存在 $\eta\in\Omega^{q-1}(U)$ 使得 $\omega=d\eta$ 。相当于，任意闭合形式都是恰当形式。

令 M,N 均为 $\mathbb{R}^n$ 的开集，并且具有光滑映射 $F:M\to N$，对于任意 p，定义 p–形式的**拉回 (Pullback)** 为

$$F^*:\Omega^p(N)\to\Omega^p(M),F^*\left(d\left(u\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\right)\right)=d(u\circ F)\wedge d(x^{i_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge d(x^{i_k}\circ F),$$

其中 $f\circ F\in C^\infty(M)$ 是复合映射 $M\xrightarrow{F}N\xrightarrow{f}\mathbb{R}$，$x^i\circ F\in C^\infty(M)$ 是 $F(p)$ 的第 i 个坐标分量。因此

$$F^*(d\omega)=d(F^*\omega).$$

可以证明「在这里不做证明」，当 M,N 均为 $\mathbb{R}^n$ 的开集，并且具有光滑映射 $F:M\to N$，那么拉回就能诱导出 de Rham 上同调群之间的映射，称为**诱导上同调映射 (Induced Cohomology Map)** $F^*:H^p_{\mathrm{dR}}(N)\to H^p_{\mathrm{dR}}(M)$，其中 $F^*[\omega]=\left[F^*\omega\right]$；
并且对于恒映射 $\mathrm{Id}:M\to M$，$\mathrm{Id}^*:H^p_{\mathrm{dR}}(M)\to H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ 是同构映射；
对于复合映射 $M\xrightarrow{F}N\xrightarrow{G}P$，$(G\circ F)^*=F^*\circ G^*:H^p_{\mathrm{dR}}(P)\to H^p_{\mathrm{dR}}(M)$ 。

对于任意 p，令 A^p 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，并且定义 $\mathbb{R}$ 上的线性映射 $d:A^{p-1}\to A^p$ 使得对于任意 p 都满足 $d\circ d:A^p\to A^{p+2}$ 都是零映射。此时定义**链复形 (Chain Complex)** 为如下序列

$$\cdots\to A^{p-1}\xrightarrow{d}A^p\xrightarrow{d}A^{p+1}\to\cdots,$$

如果对于任意 p，$\mathrm{Ker}\ d=\mathrm{Im}\ d\subseteq A^p$ 均成立，那么该链复形被称为**正合列 (Exact Sequence)** 。

令 M,U,V 均为 $\mathbb{R}^n$ 的开集，并且 $U\cup V=M$，定义**包含映射 (Inclusion Map)**

$$U\cap V\xrightarrow{i}U\xrightarrow{k}M,$$

$$U\cap V\xrightarrow{j}V\xrightarrow{l}M,$$

它的拉回为

$$\Omega^p(M) \xrightarrow{k^*} \Omega^p(U) \xrightarrow{i^*} \Omega^p(U \cap V),$$

$$\Omega^p(M) \xrightarrow{l^*} \Omega^p(V) \xrightarrow{j^*} \Omega^p(U \cap V),$$

根据包含映射的性质，可以得出，例如 $k^*\omega = \omega\big|_U$ 。考虑如下序列

$$0 \to \Omega^p(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Omega^p(U \cap V) \to 0,$$

其中

$$(k^* \oplus l^*)\omega = (k^*\omega, l^*\omega),$$

$$(i^* - j^*)(\omega, \eta) = i^*\omega - j^*\eta\,.$$

可以证明「在这里不做证明」，存在线性映射 $\delta : H^p_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \to H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(M)$ 使得 **Mayor–Vietoris 序列 (Mayor–Vietoris Sequence)**

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^p_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^p_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^p_{\mathrm{dR}}(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H^p_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \cdots$$

是正合列。其中 $k^* \oplus l^*, i^* - j^*$ 均为诱导同调映射。

关于计算，就不做展开了。

习题 1.5

当两个能量相等的光子相向碰撞时，动量之和为零，因此根据动量守恒定律，产生的正负电子对是静止的。令此时光子波长为 λ ，因此

$$2\frac{hc}{\lambda} = 2m_e c^2,$$

$$\lambda = \frac{h}{m_e c} \approx 2.43 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}\,.$$