§11.7 保守场

11.7.1 向量场的散度

设 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是空间中一个光滑向量场, 不妨认为是流速场, S 是场中一个封闭曲面, 方向指向外侧, 则通量

$$N=\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

表示在流速场的作用下, 单位时间内流过曲面 S 的流体的流量. 设 $\sigma(V)$ 表示 S 所围成的区域 V 的体积, 则

$$\frac{1}{\sigma(V)}\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

表示单位时间内单位体积上流过体表面的流量. 当 S 缩成一点 M 时, 若极限

$$\lim_{S\to M}\frac{1}{\Delta V}\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

存在, 就称此极限为向量场 $\vec{F}$ 在 M 处的散度, 记为 $\operatorname{div}\vec{F}(M)$.

向量场 $\vec{F}$ 在一点的散度表示的是此点产生流体的能力. 若 $\operatorname{div}\vec{F}(M) > 0$, 则在 M 点产生流体, 此点就称为 "源", 若 $\operatorname{div}\vec{F}(M) < 0$, 则在 M 点吸收流体, 此点就称为 "漏" 或 "汇". 当 $\operatorname{div}\vec{F}$ 处处为零时, $\vec{F}$ 就称为无源场.

由 Gauss 公式和积分中值定理,

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV = \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)(M')\sigma(V),$$

其中 M' 是 S 内一点, 它随 S 收缩到 M 而趋于 M. 因此有

$$\operatorname{div}\vec{F}(M) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)(M).$$

这样就得到散度的计算公式:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}. \tag{11.1}$$

Gauss 公式也可以表示为

$$\oiint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV. \tag{11.2}$$

由前面这个式子, 可以得到 Gauss 公式的物理解释: 单位时间内流过物体表面的流量等于物体内所有 "源" 或 "汇" 的代数和. 因此, Gauss 公式也称为散度公式.

$\operatorname{div}: \vec{F} \to \operatorname{div} \vec{F}$ 是向量场到数量场的一个映射, 它满足以下运算法则:

1° $\operatorname{div}(c_1\vec{F}_1 + c_2\vec{F}_2) = c_1 \operatorname{div} \vec{F}_1 + c_2 \operatorname{div} \vec{F}_2$, c_1, c_2 是任意常数.

2° $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{grad} u \cdot \vec{F}$, 其中 u 是一个数量场.

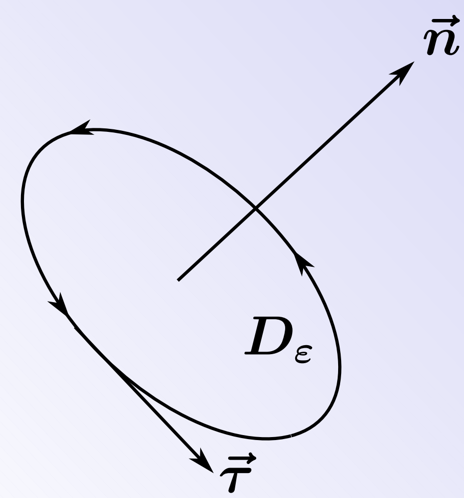
例 1 求电场强度 $\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$ 的散度, 其中 $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$.

解

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{E} &= \operatorname{div}\left(\frac{q}{r^3}\vec{r}\right) = \frac{q}{r^3}\operatorname{div}\vec{r} + \operatorname{grad}\left(\frac{q}{r^3}\right)\cdot\vec{r} \\
&= \frac{3q}{r^3} + \left(\frac{q}{r^3}\right)' \operatorname{grad} r \cdot \vec{r} \\
&= \frac{3q}{r^3} - \frac{3q}{r^4}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r} = 0.
\end{aligned}$$

11.7.2 向量场的旋度

设 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是空间 V 中一个光滑向量场, $p_0\in V$, $\vec{n}$ 是任意单位向量. 以 p_0 为圆心, 充分小的正数 ε 为半径作一个垂直于 $\vec{n}$ 的小圆盘 $D_\varepsilon\subset V$, ∂D_ε 是 D_ε 的边界. 设 $\vec{\tau}$ 表示 ∂D_ε 上沿正向 (即与 $\vec{n}$ 协调的方向) 的单位切向量, 则积分



$$\oint_{\partial D_\varepsilon}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{\partial D_\varepsilon}\vec{F}\cdot\vec{\tau}\,ds$$

为向量场 $\vec{F}$ 在圆周 ∂D_ε 上的环量. 因此

$$\frac{1}{d(D_\varepsilon)}\oint_{\partial D_\varepsilon}\vec{F}\cdot\vec{\tau}\,ds$$

反映了向量场 $\vec{F}$ 在 D_ε 上的平均旋转状态, 这里 $d(D_\varepsilon)$ 是 D_ε 的面积.

若 $\varepsilon \to 0$ 时, 极限

$$\Omega_{\vec{n}}(p_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{d(D_\varepsilon)} \oint_{\partial D_\varepsilon} \vec{F} \cdot \vec{\tau}\, ds$$

存在, 则此极限称为向量场 $\vec{F}$ 在 p_0 处绕 $\vec{n}$ 的环流量 (涡量). 它反映了 $\vec{F}$ 在 p_0 点的旋转状态.

设想 $\vec{F}$ 是一个流速场, 在 p_0 处形成漩涡, 在 p_0 放置一个小叶轮, 小叶轮在 $\vec{F}$ 的作用下将旋转起来. 改变小叶轮轴的角度, 则叶轮旋转的速度也发生变化. 存在一个轴的方向 $\vec{n}$, 在这个方向上 $\Omega_{\vec{n}}(p_0)$ 达到最大值. 根据 Stokes 公式, 有

$$\oint_{\partial D_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D_\varepsilon} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}\, dS,$$

这里 $\vec{\Omega} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$. 由积分中值定理, 存在一点 $p' \in D_\varepsilon$ 使得

$$\iint_{D_\varepsilon} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}\, dS = (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})(p') d(D_\varepsilon).$$

因而有

$$\Omega_{\vec{n}}(p_0) = \vec{\Omega}(p_0) \cdot \vec{n}.$$

由此式可知，当 $\vec{n}$ 取 $\vec{\Omega}(p_0)$ 的方向时，$\Omega_{\vec{n}}(p_0)$ 达到最大值 $|\vec{\Omega}(p_0)|$. 于是，称 $\vec{\Omega}(p)$ 为 $\vec{F}$ 在 p 点的旋度，记为 $\mathrm{rot}\,\vec{F}(p)$. 即，

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{11.3}$$

曲面 S 上的 Stokes 公式可以表为

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n} dS. \tag{11.4}$$

当 $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ 处处为零时，$\vec{F}$ 称为无旋场. 此时向量场 $\vec{F}$ 沿封闭曲线的环量为零.

旋度也可以看成是向量场到向量场的映射，它满足如下运算法则:

1° $\mathrm{rot}(c_1\vec{F}_1 + c_2\vec{F}_2) = c_1\,\mathrm{rot}\,\vec{F}_1 + c_2\,\mathrm{rot}\,\vec{F}_2$, c_1, c_2 是常数.

2° $\mathrm{rot}(u\vec{F}) = u\,\mathrm{rot}\,\vec{F} + \mathrm{grad}\,u \times \vec{F}$, u 是一个数量场.

3° $\mathrm{div}(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \mathrm{rot}\,\vec{F}_1 - \vec{F}_1 \cdot \mathrm{rot}\,\vec{F}_2$.

例 2 设 $f \in C^2(\Omega)$, 求梯度场 $\operatorname{grad} f$ 的旋度.

解 因为 $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, 所以

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{grad} f &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= (\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y})\vec{i} + (\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z})\vec{j} + (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x})\vec{k} \\ &= 0.\end{aligned}$$

例 3 求电场强度 $\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$ 的旋度, 其中 $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$.

解 设 $\varphi = -\frac{q}{r}$, 则 $\vec{E} = \operatorname{grad}\varphi$, 因此由上例可知, $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$. 也可直接计算. 因为 $\operatorname{rot}\vec{r} = 0$, 利用旋度的运算法则即得

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{rot}\left(\frac{q}{r^3}\vec{r}\right) = \frac{q}{r^3}\operatorname{rot}\vec{r} + \operatorname{grad}\frac{q}{r^3} \times \vec{r} = -\frac{3q}{r^4}\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r} = 0.$$

这就是说, 除电荷所在的点外, 电场强度 $\vec{E}$ 在整个空间中是无旋场.

11.7.3 哈密顿算符

为了方便起见, 将三个求偏导数的运算符放在一起得到的向量形式的运算符

$$\boldsymbol{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

称为Hamilton 算符 (读作 Nabla).

（1） $\boldsymbol{\nabla}$ 直接作用在数量场 $\boldsymbol{u}$ 上就是梯度, 即

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}) = \mathbf{grad}\, \boldsymbol{u}.$$

（2） $\boldsymbol{\nabla}$ 通过数量积, 作用在向量场 $\vec{F} = (P, Q, R)$ 上就是散度, 即

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \mathbf{div}\, \vec{F}.$$

（3） $\boldsymbol{\nabla}$ 通过向量积, 作用在向量场 $\vec{F} = (P, Q, R)$ 上就是旋度, 即

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \mathbf{rot}\, \vec{F}.$$

（4） **∇ 自己和自己作数量积**

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

形成一个新的算符 “$\boldsymbol{\Delta}$”, 称为 Laplace 算符. $\boldsymbol{\Delta}$ 作用在数量场 u 上, 就是

$$\boldsymbol{\Delta} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

利用 Hamilton 算符, Gauss 公式可以写成

$$\oiint_{\partial V} \vec{n} \cdot \vec{F}\, dS = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV. \tag{11.5}$$

Stokes 公式可以写成

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{\tau}\, ds = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS. \tag{11.6}$$

类比 (11.5) 式, 可以证明

$$\oiint_{\partial V} \vec{n} \times \vec{F}\, dS = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \times \vec{F}\, dV \tag{11.7}$$

证明 设 $\vec{a}$ 是任意常向量. 因为

$$\vec{a}\cdot\vec{n}\times\vec{F}=\vec{F}\times\vec{a}\cdot\vec{n},$$

所以

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\oiint_{\partial V}\vec{n}\times\vec{F}\,dS&=\oiint_{\partial V}(\vec{F}\times\vec{a}\cdot\vec{n})dS\\&=\iiint_V\nabla\cdot\vec{F}\times\vec{a}dV\\&=\iiint_V\vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{F})dV\\&=\vec{a}\cdot\iiint_V\nabla\times\vec{F}\,dV.\end{aligned}$$

此式对任意向量 $\vec{a}$ 成立. 于是 (11.7) 成立.

用类似地方法可以证明 (其中 $\vec{n}$ 是 S 的法向, $\vec{\tau}$ 是 ∂S 的切向量)

$$\oint_{\partial S}u\vec{\tau}\,ds=\iint_S\vec{n}\times\nabla u\,dS,\tag{11.8}$$

证明 设 $\vec{a}$ 是任意常向量. 有

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\oint_{\partial S} u\vec{\tau}\,ds &= \oint_{\partial S}(u\vec{a})\cdot\vec{\tau}\,ds \\
&= \iint_{S}(\nabla\times u\vec{a})\cdot\vec{n}\,ds \\
&= \iint_{S}(\vec{n}\times\nabla)\cdot u\vec{a}\,ds \\
&= \iint_{S}(\vec{n}\times\nabla u)\cdot\vec{a}\,ds \\
&= \vec{a}\cdot\iint_{S}(\vec{n}\times\nabla u)\,ds.
\end{aligned}$$

于是

$$\oint_{\partial S} u\vec{\tau}\,ds = \iint_{S}\vec{n}\times\nabla u\,dS.$$

习题:

1. **设 V 是空间中有界区域**, V **的边界** ∂V **是分片光滑封闭曲面**, φ **是定义在** V **上的连续可微函数. 证明**:

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \varphi \vec{n}\, dS = \iiint_V \nabla \varphi\, dV. \tag{11.9}$$

2. **利用上题的结论推出球坐标系下的梯度.**