$\sinh x$，$\cosh x$在$\mathbb{R}$ 中无界， 故$\sinh z$，$\cosh z$在复平面 无界.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $|\sin x|\le 1$, $|\cos x|\le 1$, 有界，但是

复变中 $|\sin z|$无界, $|\cos z|$无界.

证：当$z=\mathrm{i}\,y$，$y\to\infty$时，$\cos z=\cos\mathrm{i}\,y=\cosh y$,

$$|\cos\mathrm{i}\,y|=|\cosh y|=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\to\infty.$$

故 $|\cos z|$ 无界. 同理, $|\sin z|$ 无界. #

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

$$\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},$$

$$\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}.$$

$\cosh \mathrm{i}\,z=\cos z$,

$\cos \mathrm{i}\,z=\cosh z$,

$\sinh \mathrm{i}\,z=\mathrm{i}\sin z$,

$\sin \mathrm{i}\,z=\mathrm{i}\sinh z$.

例 求 $\dfrac{1}{\sin z-3}$ 的解析区域, 并求出微商.

解 先求 $\sin z-3=0$ 的全部解 $z=\mathrm{Arcsin}\,3$. 由 $\sin z$ 的定义知, 须求

$\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)-3=0$ 的解. **先求 e^{iz}.** 记 $w=e^{iz}$, 则

$w-w^{-1}-6i=0,\ w^2-6iw-1=0.$ 解得

$$e^{iz}=w=\frac{6i+\sqrt{36i^2+4}}{2}=3i+\frac{1}{2}\sqrt{-32}=\left(3\pm 2\left(\sqrt{2}\right)\right)i.$$

故 $iz=\mathrm{Ln}\left\{\left(3\pm 2\left(\sqrt{2}\right)\right)i\right\}=\ln\left(3\pm 2\left(\sqrt{2}\right)\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$. 两边乘以$(-i)$ 得奇点z.

故当 $z\neq\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi-i\ln\left(3\pm 2\left(\sqrt{2}\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$ 时, $\dfrac{1}{\sin z-3}$ 解析.

$$\left(\frac{1}{\sin z-3}\right)'=-\frac{(\sin z-3)'}{(\sin z-3)^2}=-\frac{\cos z}{(\sin z-3)^2}.\ \#$$

$$\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{z^2}.$$

2.5.7. 一般幂函数

设 $z\in\mathbb{C}$，$z\neq 0$，$\forall\alpha\in\mathbb{C}$，定义幂函数

$$z^{\alpha}=e^{\alpha\operatorname{Ln}z}=e^{\alpha\{\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\}},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

★★★★★ 背熟

(1) 当 $\alpha=n\in\mathbb{Z}^{+}$(正整数)时, 与乘方 z^{n} 一致，因为

$$z^{n}=e^{n\operatorname{Ln}z}=e^{n\ln|z|+in\arg z+2nk\pi i}$$

$$e^{2kn\pi i}=1$$

$$=e^{n\ln|z|}e^{in\arg z}e^{2kn\pi i}=e^{\ln|z|^{n}}e^{in\arg z}=|z|^{n}e^{in\arg z}.\ \#$$

2.5.1小节 当 $n\in\mathbb{Z}^{+}$时, z^{n}是单值函数, 全平面解析,

$$(z^{n})'=nz^{n-1}.$$

角域 $a<\arg z<b$, $b-a\leq\frac{2\pi}{n}$ 是 z^{n} 的单叶性区域.

(2) 当 $\alpha=\frac{1}{n}$, n是正整数, $z\neq 0$ 时, $z^{\frac{1}{n}}$与开方 $\sqrt[n]{z}$ 一致, 因为

$$z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\,z}=e^{\frac{1}{n}\ln|z|+i\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi)}=e^{\ln|z|^{\frac{1}{n}}}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$$

$$=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)\exp\left\{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right\},\quad k=0,1,2,\cdots,n-1,\quad \left(\sqrt[n]{|z|}\right)>0.$$

2.5.2小节 $\sqrt[n]{z}$ 定义 (多值函数)

故 $z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$, 是 n 值函数, 有且仅有0 和∞ 两个支点.

在沿任一支割线(连接支点简单曲线) 割开的复平面内, 每个单值连续分支

$$w_k\triangleq\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)\exp\left\{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right\},\quad \text{解析},$$

$$w_k'(z)=\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k'=\frac{1}{\left(w_k^n\right)'}=\frac{1}{nw_k^{n-1}}\cdot\frac{w_k}{w_k}=\frac{w_k}{nz}=\frac{\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k}{nz}.$$

(3) 当α是有理数, $\alpha = \frac{m}{n}$(既约), $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $z \neq 0$ 时,

$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m} = \sqrt[n]{|z|^m \exp\{im \arg z\}}$$

$$= \left(\sqrt[n]{|z|^m}\right)\exp\left\{i\frac{m\arg z + 2k\pi}{n}\right\}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n-1, \quad \left(\sqrt[n]{|z|^m}\right) > 0.$$

$z^{\frac{m}{n}}$是 n 值函数 (多值函数).

(4) 当α是无理数或一般复数($\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$) 时,

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln} z} = e^{\alpha\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\}}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots.$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $k\alpha$ 不是整数, $e^{2k\alpha\pi i} \neq 1$, z^{α}是无穷多值函数.

(4) 当α是无理数或一般复数($\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$)时，

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln} z} = e^{\alpha\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

z^{α}是无穷多值函数.

例 求 (1) i^{i}, (2) $(-2i)^{\sqrt{3}}$.

解 (1) $i^{i} = e^{i\mathrm{Ln} i} = e^{i\{\ln|i| + i(\arg i + 2k\pi)\}} = e^{i\left\{0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right\}}$

$= e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 无穷多值函数.

(2) $(-2i)^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\mathrm{Ln}(-2i)} = e^{\sqrt{3}\left\{\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right\}}$

$= e^{\sqrt{3}\ln 2}\, e^{i\sqrt{3}\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 无穷多值函数.

(4) 当α是无理数或一般复数($\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$)时,

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln} z} = e^{\alpha\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

例 $\{-1-(\sqrt{3})i\}^{2-3i} = e^{(2-3i)\mathrm{Ln}\{-1-(\sqrt{3})i\}} = e^{(2-3i)\{\ln|-1-(\sqrt{3})i| + i\{\arg\{-1-(\sqrt{3})i\}+2k\pi\}\}}$

$$= e^{(2-3i)\{\ln 2 + i\{-\pi + \arctan(\sqrt{3}) + 2k\pi\}\}} = e^{(2-3i)\{\ln 2 + i(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)\}}$$

$$= e^{2\ln 2 + 3(2k - \frac{2}{3})\pi + i\{2(2k-\frac{2}{3})\pi - 3\ln 2\}}$$

$$= e^{\ln 4} e^{(6k-2)\pi} e^{4k\pi i} e^{i(-\frac{4}{3}\pi - 3\ln 2)} \qquad e^{4k\pi i} = 1.$$

$$= 4e^{(6k-2)\pi} e^{-i(\frac{4}{3}\pi + 3\ln 2)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$它是无穷多值函数.

第三章 解析函数的积分表示

复积分是分析复变函数的重要工具，

许多重要性质都是在此基础上展开.

实定积分定义：将在 x 轴上的某个积分区间

分割、取函数近似值、作和、取极限；

复积分定义：将复平面一条有向连续曲线

分割、取复函数近似值、作和、取极限.

3.1 复变函数的积分

定义：设 C是z平面一条从 z_0 到Z 的逐段光滑有向曲线,

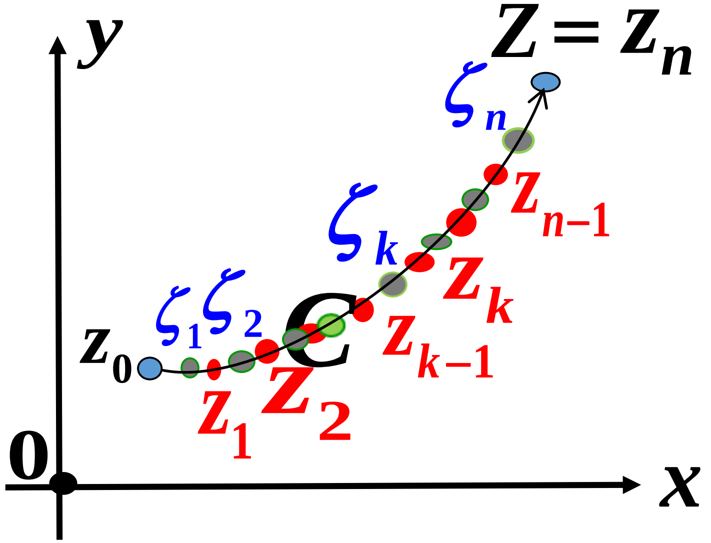
设 $w = f(z)$ $(z \in C)$是C上的单值连续复函数.

(1) 分割

在 C 中任意插入$(n-1)$个分点，

连同z_0和Z, 依次记为

$z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_{n-1}, z_n = Z.$



(2)取近似值

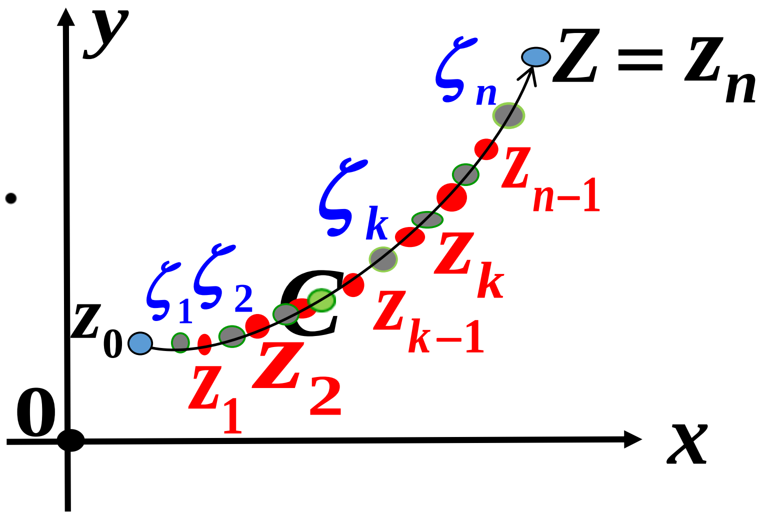
在每个弧段 $z_{k-1}z_k$ 上任取一点 ζ_k， $k = 1, 2, \cdots, n$,

用$f(\zeta_k)$近似$f(z)$在弧$z_{k-1}z_k$上每一点的值.

(3)作和.

记 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, 作和 $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$.

(4)求极限. 记 $\lambda = \max_{1\le k\le n}\{|\Delta z_k|\}$.



如果当 $n \to +\infty$, $\lambda \to 0$ 时,

$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$的极限存在, 与$C$分法和$\zeta_k$取法无关,

则称$f(z)$在曲线C上可积,

称此极限值为$f(z)$沿曲线C自z_0到Z的积分,

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z \triangleq \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z \triangleq \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k .$$

设$z = x + \mathrm{i}\, y$, $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$在$C$上连续, 求$\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

设 $z_k = x_k + \mathrm{i}\, y_k$, $\zeta_k = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k$, 简记$u(\xi_k, \eta_k) = u(\zeta_k)$, $v(\xi_k, \eta_k) = v(\zeta_k)$,

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = x_k - x_{k-1} + \mathrm{i}(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + \mathrm{i}\,\Delta y_k$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{u(\zeta_k) + \mathrm{i}\, v(\zeta_k)\right\}(\Delta x_k + \mathrm{i}\,\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{u(\zeta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k)\Delta y_k\right\} + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \left\{v(\zeta_k)\Delta x_k + u(\zeta_k)\Delta y_k\right\}.$$

令$n \to +\infty$, $\lambda \to 0$, 由第二型曲线积分定义知 $f(z)$在C上可积，且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

故得定理1(P51).

定理1(P51) 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在曲线$C$ 上连续，C 逐段光滑，则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$存在，且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y \qquad (3.1)\text{P51}$$

形式地 $\int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)$. (帮助记忆) $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y$

设C: $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$, $a\le t\le b$, 简单光滑曲线，(如P19的第19题)，

起点$z_0=z(a)=x(a)+\mathrm{i}\,y(a)$, 终点$Z=z(b)=x(b)+\mathrm{i}\,y(b)$,

则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(z(t))\{\mathrm{d}x(t)+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y(t)\}$ 参数法

$$=\int_a^b f(z(t))\{x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)\}\mathrm{d}t=\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t.$$

$z'(t)\triangleq x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)$ $\mathrm{d}z(t)=z'(t)\mathrm{d}t$ ★★★★★ 背熟

复积分有与实定积分类似的性质(P52-54):

(1) $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$, k为复常数(与积分变量z无关);

(2) $\int_C \{f(z)\pm g(z)\}dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz$;

被积函数的线性可加性

(3) $\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$, C与C^-:曲线相同, 方向相反;

(4) 设C由$C_1,C_2,C_3,\cdots,C_n$依次连接组成,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz.$$

积分路径的可加性

(1)–(4) 可直接由复积分定义或P51定理1推得.

设$z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t),\ \ a\le t\le b$,简单光滑, 则$z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)$,

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\mathrm{d}t.\quad (P\,51)\ \ (3.2)$$

背熟★★★

例 计算 $\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z$, C 为从原点到点$1+\mathrm{i}$ 的直线段.

Re z不解析, 用参数法积分.

解 (1)将C写成参数式. C是直线段, 设 $z(t)=z_1t+z_0,\quad 0\le t\le 1,$

起点: $t=0,\ z(0)=z_0=0$; 终点: $t=1,\ z(1)=z_1+z_0=1+\mathrm{i}.\ \ z_1=1+\mathrm{i}.$

(原点)

$C: z(t)=(1+\mathrm{i})t,\ 0\le t\le 1,\quad z'(t)=1+\mathrm{i}.\quad \mathrm{Re}\,z(t)=t,$

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z=\int_0^1 t\,z'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1(1+\mathrm{i})t\mathrm{d}t=(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}).\ \#$$

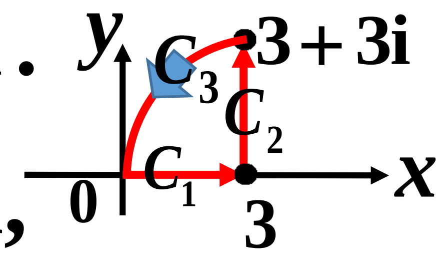
直线 $y=kx+b$有复数形式(t 实参数): $z=t+\mathrm{i}(kt+b)=(1+\mathrm{i}\,k)t+\mathrm{i}\,b\triangleq z_1t+z_0.$

例 计算 $\int_C \mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z$, C 为从点0到点3再到点$3+3\mathrm{i}$ 的折线段,
再加上从$3+3\mathrm{i}$到原点的以3为中心的圆弧构成的闭曲线. $\mathrm{i}\,\bar{z}$不解析, 用参数法积分.

解 $C=C_1+C_2+C_3$, C_1是从0到3直线段, C_2是从3到$3+3\mathrm{i}$直线段,
C_3从$3+3\mathrm{i}$到原点的以3为圆心的圆弧.

设线段C_1: $z(t)=z_1t+z_0$, $0\le t\le 1$, $z(0)=z_0=0$, $z(1)=z_1=3$, $z(t)=3t$,

$$\int_{C_1}\mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\int_0^1\overline{z(t)}z'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{i}\int_0^1 3t\cdot 3\mathrm{d}t=\frac{9}{2}\mathrm{i}.$$



线段C_2: $z=3\mathrm{i}t+3$, $0\le t\le 1$, $z'(t)=3\mathrm{i}$,

$$\int_{C_2}\mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\int_0^1\overline{z(t)}z'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{i}\int_0^1(-3\mathrm{i}t+3)\cdot 3\mathrm{i}\,\mathrm{d}t=3\mathrm{i}^2\left(-3\mathrm{i}\cdot\frac{t^2}{2}+3t\right)\Big|_0^1=-9+\frac{9}{2}\mathrm{i}.$$

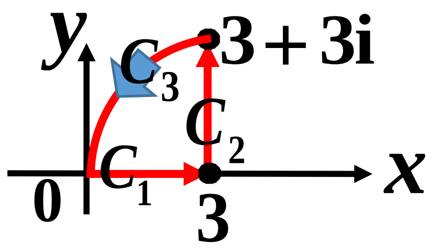
C_3: $|z-3|=3$, $z-3=3e^{\mathrm{i}\theta}$, $z=3+3e^{\mathrm{i}\theta}$, $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$, $z'(\theta)=3\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}$,

★★★★★

例 计算 $\int_C \mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z$, C 为从点0到点3再到点3+3i 的折线段,再加上从3+3i到原点的以3为中心的圆弧构成的闭曲线. $\mathrm{i}\bar{z}$不解析, 用参数法积分.

解 $C=C_1+C_2+C_3$, C_1是从0到3直线段, C_2是从3到3+3i直线段, C_3从3+3i到原点的以3为圆心的圆弧.

C_3: $|z-3|=3$, $z-3=3e^{i\theta}$, $z=3+3e^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$, $z'(\theta)=3\mathrm{i}e^{i\theta}$,



$$\int_{C_3}\mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\overline{z(\theta)}z'(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\mathrm{i}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(3+3e^{-i\theta})(3\mathrm{i}e^{i\theta})\mathrm{d}\theta=-9\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(e^{i\theta}+1)\mathrm{d}\theta$$

$$=-9\left(\frac{1}{\mathrm{i}}e^{i\theta}+\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-9\left\{\frac{1}{\mathrm{i}}(-1-\mathrm{i})+\frac{\pi}{2}\right\}=-9\left(\mathrm{i}-1+\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\int_C \mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{3}\int_{C_k}\mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z=\frac{9}{2}\mathrm{i}-9+\frac{9}{2}\mathrm{i}-9\left(\mathrm{i}-1+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{9\pi}{2}.\ \#$$

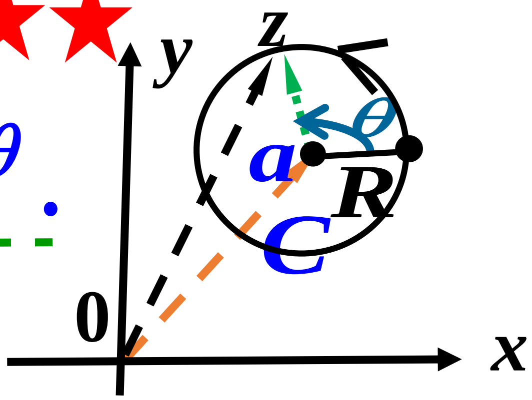
$(\neq 0.)$

例2(P52) 求 $\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz$，$n$ 为整数，

C 为以复数a为中心、$R>0$为半径的圆周，逆时针方向(正向).

解 $C:\ |z-a|=R$，故 $z-a=Re^{i\theta}$，★★★★★

故$C: z=a+Re^{i\theta}$，$0\le\theta<2\pi$. $z'(\theta)=Rie^{i\theta}$.



$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(Re^{i\theta})^n}(Re^{i\theta}i)d\theta.$$

1) $n=1$时，$\int_C \frac{1}{z-a}dz=i\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi i.$

2) $n\ne 1$且n为整数时，

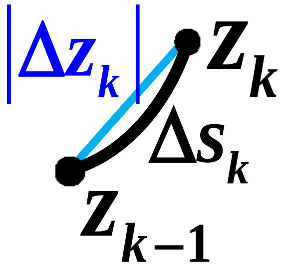
$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz=iR^{1-n}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\theta}d\theta=iR^{1-n}\cdot\frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=0.\ \#$$

背熟此结论！！！

(5) $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$；（积分估算） (3.3)

证明 在复积分定义中取模得，

$|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}| \le \Delta s_k$， Δs_k指C上 $z_{k-1}z_k$的弧长，



故 $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k$.

令$n \to +\infty$, $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{|\Delta z_k|\} \to 0$，得不等式(3.3). #

• 若$C: z(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$, $a \le t \le b$,

$z'(t) \triangleq x'(t) + \mathrm{i}\,y'(t)$

$\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t$

$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = |z'(t)|\,\mathrm{d}t \triangleq |\mathrm{d}z|$,

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \triangleq \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \equiv \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

★★★★★

(5) 设$f(z)$在曲线C上连续,则 $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$(第一类曲线积分). (3) (P50)

若$C: z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t),\ \ a\le t\le b,\ \ z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t),$

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \equiv \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \equiv \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,\mathrm{d}t.$$ ★★★★★

(6) 长大不等式:

设曲线 C 的长度为 L, 若在 C 上$|f(z)|\le A$, 则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le AL. \qquad (3.4)$$

证明:由(3.3)得 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le A\int_C 1\mathrm{d}s = AL.$ #

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \equiv \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \equiv \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,\mathrm{d}t \le \left\{\sup_{z\in C}|f(z)|\right\}\cdot(C\text{的长度}).\quad (3.3)$$

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \equiv \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \equiv \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,\mathrm{d}t \le \left\{\sup_{z\in C}|f(z)|\right\}\cdot(C\text{的长度}). \quad (3.3)$$

例 证明: $\left|\int_1^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+2\mathrm{i}\,y^2\right)\mathrm{d}z\right| \le \left(\sqrt{5}\right)$, 积分路径是直线段.

解 设线段C : $z(t)=z_1t+z_0,\quad 0\le t\le 1$, 起点$z(0)=z_0=\ 1$, ($z_0=$起点),

终点 $z(1)=z_1+z_0=1+\mathrm{i}$, $z_1=(1+\mathrm{i})-1=\mathrm{i}$, ($z_1=$终点－起点).

故 $z(t)=\mathrm{i}\,t+1$, $z'(t)=\mathrm{i}$. 当$0\le t\le 1$时, $0\le t^4\le 1$,

$$\left|\int_1^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+2\mathrm{i}\,y^2\right)\mathrm{d}z\right| \le \int_0^1\left|1^2+2\mathrm{i}\,t^2\right||z'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\sqrt{1+4t^4}\right)|\mathrm{i}|\,\mathrm{d}t$$

$$\le \int_0^1\left(\sqrt{1+4}\right)\mathrm{d}t = \left(\sqrt{5}\right). \quad \#$$

例 设 C 为从1到点 $4+4\mathrm{i}$ 的直线段，试求积分 $\int_C \frac{e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z$ 模的一个上界.

1). 先写C参数方程. 2). 在C上估算被积函数模. 3). 利用(3.3)或长大不等式(3.4).

解 设线段C : $z(t)=z_1t+z_0$， $0\le t\le 1$， 起点$z(0)=z_0=1$, ($z_0=$起点),

终点 $z(1)=z_1+z_0=z_1+1=4+4\mathrm{i}$，$z_1=3+4\mathrm{i}$, ($z_1=$终点$-$起点).

故C: $z(t)=(3+4\mathrm{i})t+1$, $0\le t\le 1$, $z'(t)=3+4\mathrm{i}$.

在 C 上，$$\left|\frac{e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\right|=\frac{|e^{\mathrm{i}(3t+1)}|}{|3t+1+\mathrm{i}(4t-1)|}=\frac{1}{\left(\sqrt{(3t+1)^2+(4t-1)^2}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{25t^2-2t+2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{25\left(t-\frac{1}{25}\right)^2+\frac{49}{25}}\right)}\le\frac{5}{7},\left(t=\frac{1}{25}\in(0,1)\right).$$

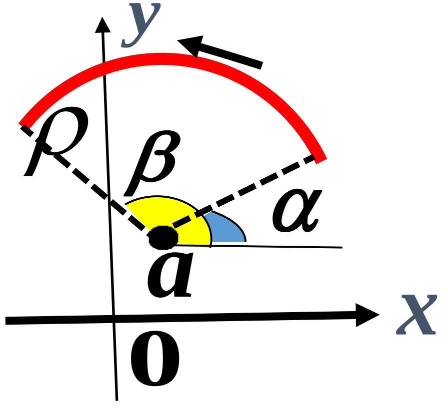
故 $$\left|\int_C \frac{e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z\right|\le\frac{5}{7}\cdot|1-(4+4\mathrm{i})|=\frac{5}{7}|-3-4\mathrm{i}|=\frac{25}{7}.\ \#$$

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C|f(z)|\mathrm{d}s\equiv\int_C|f(z)||\mathrm{d}z|\equiv\int_a^b|f(z(t))||z'(t)|\mathrm{d}t\le\left\{\sup_{z\in C}|f(z)|\right\}\cdot(C\text{的长度}).\quad(3.3)$$

例4(P53-54) 设$\rho>0$充分小，$f(z)$在 $C_\rho: z=a+\rho e^{i\theta}, \alpha\le\theta\le\beta$上连续，

且 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$, 则

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz = i(\beta-\alpha)k. \qquad (3.6)$$



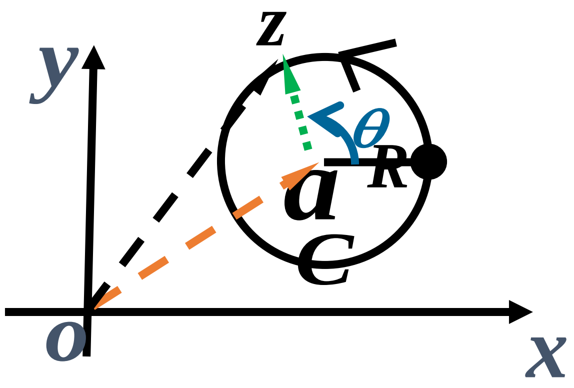
思路：先把右端与f 无关的部分$i(\beta-\alpha)$

表示成某函数沿C_ρ的积分值.

设$C: |z-a|=R$, 逆时针方向，则由P52例2得，$\int_C \frac{dz}{z-a}=2\pi i.$

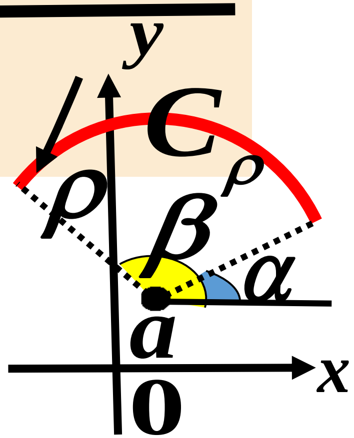
故猜测：$\int_{C_\rho}\frac{dz}{z-a}=i(\beta-\alpha).$

首先用参数法证明此猜测.



例4(P53-54). 设$\rho>0$充分小，$f(z)$在 C_ρ： $z=a+\rho e^{i\theta},\alpha\le\theta\le\beta$上连续，

$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$，则 $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz=i(\beta-\alpha)k$. (3.6)



证明: $\displaystyle\int_{C_\rho}\frac{dz}{z-a}=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\rho e^{i\theta}}(\rho i e^{i\theta})d\theta=i\int_\alpha^\beta 1\,d\theta=i(\beta-\alpha).$

故 $\displaystyle\left|\int_{C_\rho}f(z)dz-i(\beta-\alpha)k\right|=\left|\int_{C_\rho}f(z)dz-k\int_{C_\rho}\frac{1}{z-a}dz\right|$

$$=\left|\int_{C_\rho}\frac{(z-a)f(z)-k}{z-a}dz\right|\le\int_\alpha^\beta\frac{|(z(\theta)-a)f(z(\theta))-k|}{|\rho e^{i\theta}|}|\rho i e^{i\theta}|d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta|(z(\theta)-a)f(z(\theta))-k|\,d\theta.\qquad(*)$$

(P67)第7题仿照此例证明.

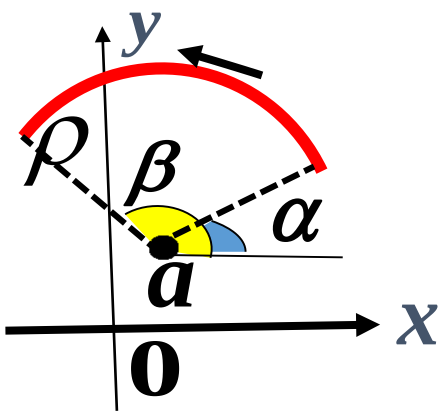
由条件知，$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, 当$\rho=|z-a|<\delta$时，

$|(z-a)f(z)-k|\le\dfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$，故(*)右边$\le\dfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\cdot(\beta-\alpha)=\varepsilon$. 故 (3.6)成立. #

例4(P53-54). 设$\rho>0$充分小，$f(z)$在 C_ρ： $z=a+\rho e^{i\theta},\alpha\le\theta\le\beta$上连续,

$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$, 则 $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}f(z)\,dz=i(\beta-\alpha)k$. (3.6)

(P67)第7题仿照此例证明.



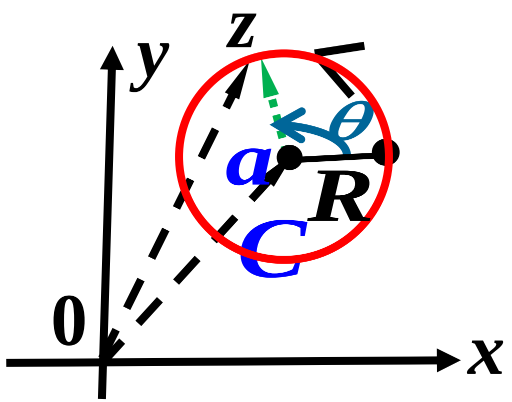
注:若$k\ne 0$,则$f(z)$在$z=a$ 不连续, $z=a$ 是$f(z)$ 的奇点.

熟记本题及(P67)第7题的结论.

在第六章需要用到这些结论.

$f(z)$沿着简单闭曲线C从某一点开始到第一次回到该点的积分，

也可记为 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z.$



例如，设C : $|z-a|=R$，逆时针方向，则由P52例2得，

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & n\neq 1\text{且}n\text{为整数时},\\ 2\pi\mathrm{i}, & n=1\text{ 时}.\end{cases}$$

作业

P 48-49

16 (2)(提示：可以分别考虑$z=x\to 0^+$ 和$z=-\mathrm{i}\,y,\ y\to 0^+$,参见此PPT 27页.)

$$\left(\text{注意}\ \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0.\right)$$

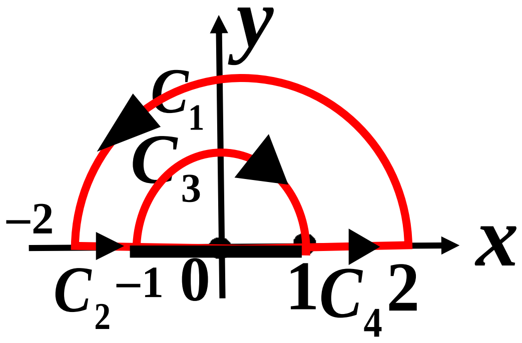
19(2) (注意：教材中19 (2)的答案有错误.)

23 第三行 $1^{(\sqrt{2})}$, $(-2)^{(\sqrt{2})}$, 2^{i}, $(3-4\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$

P 66 - 67

1, 2,

例1 计算 $I=\int_C \frac{z}{\bar z}dz$, C 为如图所示的半圆环边界.



解 $C=C_1+C_2+C_3+C_4$.

$C_1: z=2e^{i\theta},\ 0<\theta<\pi,\ z'(\theta)=2e^{i\theta}i,$

$$\int_{C_1}\frac{z}{\bar z}dz=\int_0^{\pi}\frac{2e^{i\theta}}{2e^{-i\theta}}\left(2e^{i\theta}i\right)d\theta=2i\int_0^{\pi}e^{3i\theta}d\theta=\frac{2i}{3i}\cdot e^{3i\theta}\Big|_0^{\pi}=-\frac{4}{3}.$$

同理, C_3: $z=e^{i\theta}$, θ从π到0, $z'(\theta)=e^{i\theta}i,$

$$\int_{C_3}\frac{z}{\bar z}dz=\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}\left(e^{i\theta}i\right)d\theta=i\int_{\pi}^{0}e^{3i\theta}d\theta=\frac{i}{3i}e^{3i\theta}\Big|_{\pi}^{0}=\frac{2}{3}.$$

C_2: $z=t-2,\ 0\le t\le 1,\ z'(t)=1.$

$$\int_{C_2}\frac{z}{\bar z}dz=\int_0^1\frac{t-2}{t-2}\cdot 1dt=1.$$

C_4: $z=t+1,\ 0\le t\le 1,\ z'(t)=1.$

$$\int_{C_4}\frac{z}{\bar z}dz=\int_0^1\frac{t+1}{t+1}\cdot 1dt=1.$$

故 $I=\sum_{k=1}^{4}\int_{C_k}\frac{z}{\bar z}dz=-\frac{4}{3}+1+\frac{2}{3}+1=\frac{4}{3}$. #

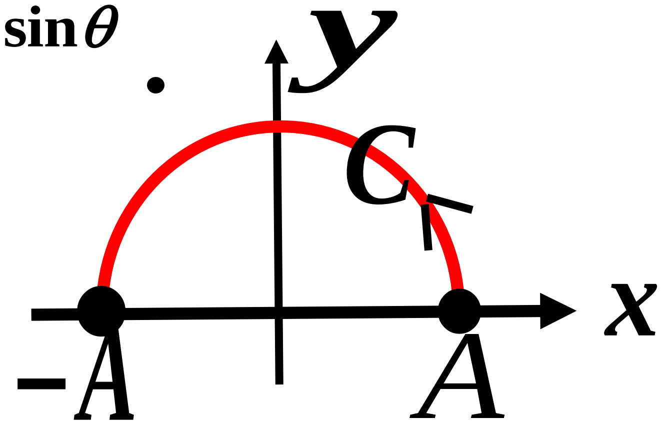
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds \equiv \int_C |f(z)||dz| \equiv \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,dt. \quad (3.3)$$

例3(P 53) 证： $\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| < \pi$，设 C 为 $|z| = A$ 上半圆周从 A 到 $-A$.

证1： C 的参数方程为 $z = Ae^{i\theta}$， $0 \le \theta \le \pi$. 在 C 上，

$$\left|e^{iz}\right| = e^{\mathrm{Re}(iAe^{i\theta})} = e^{\mathrm{Re}(-A\sin\theta + iA\cos\theta)} = e^{-A\sin\theta}.$$

$$|z'(\theta)| = \left|Aie^{i\theta}\right| = A.$$ 根据性质(3.3)知

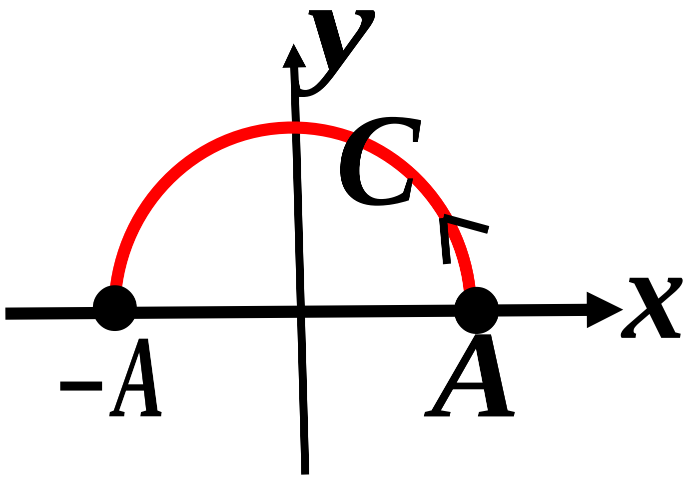


$$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \le A\int_0^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta = 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta.$$

因为 $\int_0^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta$ （对第二项积分 令 $\theta = \pi - \theta$）

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-A\sin\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta.$$

$$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \le A\int_0^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta = 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta.$$



当$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$时, $\frac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta\le\theta$. 故 $e^{-A\sin\theta}\le e^{-A\frac{2}{\pi}\theta}$.

推导见此PPT的30页.

故 $\left|\int_C e^{iz}\,dz\right|\le 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2A}{\pi}\theta}\,d\theta = -\pi e^{-\frac{2A}{\pi}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi e^{-A}+\pi<\pi.$ #

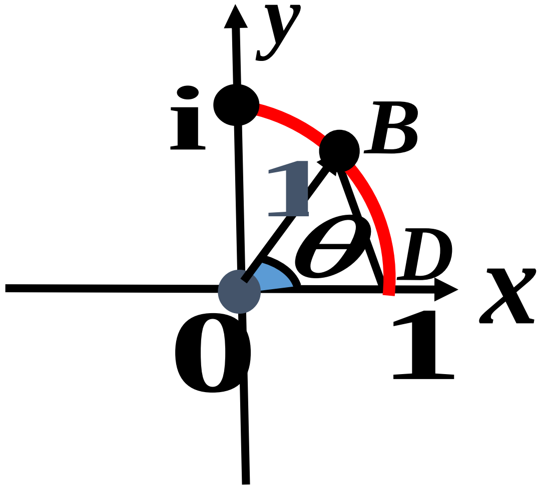
例3(P53)证2: 因e^{iz}处处处处解析, 且$e^{iz}=\left(\frac{e^{iz}}{i}\right)'$, 由3.3节(P56-58)知,

$$\int_C e^{iz}\,dz = \frac{e^{iz}}{i}\Big|_A^{-A} = \frac{e^{-iA}-e^{iA}}{i} = -2\sin A,\quad A>0.$$

故 $\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| = 2|\sin A|\le 2<\pi.$ #

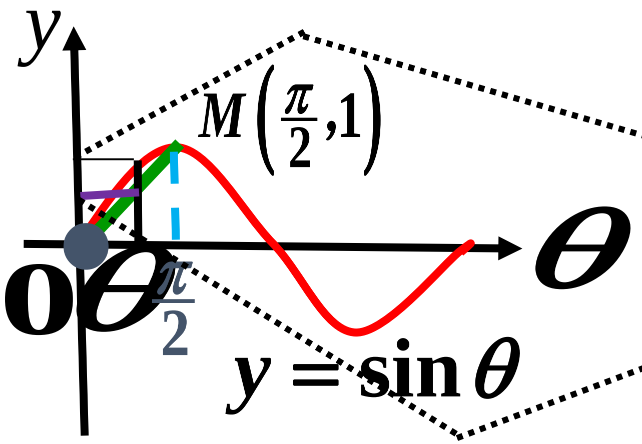
当 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 时， $\frac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta\le\theta.$

略证：



ΔOBD的面积 $\le$ 扇形OBD的面积，

$\frac{1}{2}\sin\theta\le\frac{1}{2}\theta$， 即 $\sin\theta\le\theta$， $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$



当 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $\sin''\theta=-\sin\theta\le0$,

故在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta$ 凹, 故

$\frac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta\le\theta.$ #

(3) 当α是有理数, $\alpha=\frac{m}{n}$(既约), $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, $z\neq 0$ 时,

$$z^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{z^m}=\sqrt[n]{|z|^m\exp\{\mathrm{i}m\arg z\}}$$

$$=\left(\sqrt[n]{|z|^m}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\frac{m\arg z+2k\pi}{n}\right\},\ k=0,1,2,\cdots,n-1,\ \left(\sqrt[n]{|z|^m}\right)>0.$$

2.5.2小节

$z^{\frac{m}{n}}$是 n 值函数(多值函数), 有且仅有0 和∞ 两个支点,

在沿任一支割线割开的复平面内, 每个单值连续分支

$$w_k\triangleq\left(z^{\frac{m}{n}}\right)_k=\left(\sqrt[n]{|z|^m}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\frac{m\arg z+2k\pi}{n}\right\}=e^{\frac{1}{n}(\mathrm{Ln}\,z^m)_k},$$ 解析,

$$w_k'=\left(z^{\frac{m}{n}}\right)_k'=\left(e^{\frac{1}{n}(\mathrm{Ln}\,z^m)_k}\right)'=\left(e^{\frac{1}{n}(\mathrm{Ln}\,z^m)_k}\right)\cdot\frac{mz^{m-1}}{nz^m}=\frac{m\left(z^{\frac{m}{n}}\right)_k}{nz}.$$

(4) 当α是无理数或一般复数($\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$)时，

$$z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln}\, z} = \mathrm{e}^{\alpha\{\ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)\}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

例 $(-2)^{\sqrt{3}} = \mathrm{e}^{\sqrt{3}\,\mathrm{Ln}(-2)}$

$$= \mathrm{e}^{\sqrt{3}\{\ln|-2| + \mathrm{i}(\arg(-2) + 2k\pi)\}}$$

$\arg(-2) = \pi$

$$= \mathrm{e}^{\sqrt{3}\ln 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}(\pi + 2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \ \#$$

它是无穷多值函数.#

$$z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t),\quad a\le t\le b,$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\mathrm{d}t. \qquad (3.2)$$

例 计算 $\int_C \mathrm{Im}\, z\mathrm{d}z$, C 为从点i到点$3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

解 C的参数方程为: $z(t)=\{(3+4\mathrm{i})-\mathrm{i}\}t+\mathrm{i},\ 0\le t\le 1,$

$z(0)=\mathrm{i}$(起点), $z(1)=3+4\mathrm{i}$(终点). $z(t)=(3+3\mathrm{i})t+\mathrm{i}$. $\quad z'(t)=3+3\mathrm{i}$.

$$\int_C (z+\mathrm{Im}\,z)\mathrm{d}z=\int_0^1\{z(t)+\mathrm{Im}\,z(t)\}z'(t)\mathrm{d}t$$

$$=(3+3\mathrm{i})\int_0^1\{(3+3\mathrm{i})t+\mathrm{i}+(3t+1)\}\mathrm{d}t=(3+3\mathrm{i})\int_0^1\{(6+3\mathrm{i})t+\mathrm{i}+1\}\mathrm{d}t$$

$$=(3+3\mathrm{i})\left\{(6+3\mathrm{i})\cdot\tfrac{1}{2}t^2+(\mathrm{i}+1)t\right\}\Big|_0^1=(3+3\mathrm{i})\left(4+\tfrac{5}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{9}{2}+\frac{39}{2}\mathrm{i}.\ \#$$