中国科学技术大学

2020—2021学年第二学期中考试试卷

考试科目: 数学分析B2　　　　得分________

学生所在院系:________　　姓名________　　学号________

得分

一（20分）:

1.求极限 $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

2. 求函数$f(x,y)=(x+y)^3$在区域$D=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$上的积分.

3. 求向量$\vec{a}=\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}$与向量$\vec{b}=\mathrm{i}+2\mathrm{j}+3\mathrm{k}$的叉乘$\vec{a}\times\vec{b}$.

4. 求函数$f(x,y)=e^{x+y}$在原点的4阶Taylor展开式.

装订线 答题时不要超过此线

二（10分）：

得分

设$f(x,y)$是2阶连续可微函数，且$\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$。设$y=\varphi(x)$是$f(x,y)=0$确定的隐函数，试求$\varphi''(x)$，用$f$的各阶偏导数表示.

三（10分）：

得分

求函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在区域$V=\{(x,\ y,\ z) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1, x,y,z\geq 0\}$上的积分.

四（10分）：

得分

设$x,y,z\geq 0$，$x+y+z=1$，试用拉格朗日乘数法求函数$f(x,\ y,\ z)=x^a y^b z^c\ (a,b,c>0)$的最大值.

五（12分）：

得分

设参数变换$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$具有2阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. 证明对任意二阶连续可微函数$z = f(u, v)$, 恒成立

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

六（13分）：

得分

1. 求椭球面$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$在点$(\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3})$的切平面$\pi$;
2. 设V是平面π与三个坐标平面围成的区域, 求积分

$$\iiint_V x(\sqrt{3} - \frac{y}{4} - \frac{z}{5})dxdydz.$$

七（15分）：

得分	

设A, B, C是平面三个不共线的点，且三角形$\triangle ABC$有一个内角$\geq \frac{2\pi}{3}$. 考虑平面上的函数$f(P) = |\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| + |\overrightarrow{PC}|$ $(\forall P)$.

1. 证明函数f可以在平面上取到最小值；
2. 求函数f在可微点的梯度；
3. 证明函数没有驻点，求函数的最小值并说明理由.

(I)

一 1. $0 \le \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \le \frac{2}{x^2+y^2}$ (4分).

0.5

$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0$ (1分).

0+5 2. $\iint_D (x+y)^3 dxdy = 0$ (5分)

由对称性.

或直接计算

0+5 3. $\vec{a}\times\vec{b} = (1,-2,1)$. (5分)

3+2 4. $\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = e^{x+y}$ (3分)

$f(x,y) = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \frac{1}{4!}(x+y)^4$ (2分)

二. $\frac{d}{dx} f(x,\varphi(x)) = 0$. (2分)

2+2+6. $\frac{d^2}{dx^2} f(x,\varphi(x)) = 0$. (8分).

直接计算可得. 被计算错误 -2分

三. 设D为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$.

6+2+2. $\int_V f\, dxdydz \overset{①}{=} \frac{1}{8}\int_D (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$.

② $\begin{cases} \xi = \frac{x}{a} \\ \eta = \frac{y}{b} \\ \zeta = \frac{z}{c} \end{cases}$ $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} = abc$

$= \frac{abc}{8}\int_{\Omega\ (\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le 1)} (a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)\, d\xi d\eta d\zeta$

③ $\int_\Omega \xi^2\, d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{3}\int_\Omega (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\, d\xi d\eta d\zeta$

$= \frac{1}{3}\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin\theta\, dr$.

$= \frac{4}{15}\pi$.

（10分）：
知 $f(x,$

（Ⅱ）

三（续）⇒ $\int_V f\,dxdydz = \frac{4}{15}\pi\frac{abc}{8}(a^2+b^2+c^2)$

也可直接计算，结果对均满分。
仅计算结果错扣2分。

四. $F(x,y,z) = x^a y^b z^c + \lambda(x+y+z-1)$

驻点

$\frac{\partial F}{\partial x} = a x^{a-1} y^b z^c + \lambda = 0$ 求出驻点（5分）

$\frac{\partial F}{\partial y} = b x^a y^{b-1} z^c + \lambda = 0$

$\frac{\partial F}{\partial z} = c x^a y^b z^{c-1} + \lambda = 0$ 6分

⇒ $(x,y,z) = \frac{1}{a+b+c}(a,b,c)$

$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x}$

$-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

判断出最大值点（5分） 2分 边界 2分 唯一驻点

Hessian阵或初等不等式均可。

五. ① $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ （4分）

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

② 写出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 2 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 2 链式法则表达式（4分）

$\frac{\partial z}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 2

③ 准确得出结论（2分）

有个 ~~$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}$~~ $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

2分

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$ $\quad$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
$+ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \boxed{\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
$+ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \boxed{\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ⇒ $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{cases}$

中
2021
析B2
域D
连
域

(Ⅲ).

二、

1. $F=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}-1$

$\nabla F=2(\frac{x}{9},\frac{y}{16},\frac{z}{25})$ (2分)

$\nabla F(\sqrt{3},\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{5\sqrt{3}}{3}) \parallel (\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5})$ (1分)

φ

切平面. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-\sqrt{3}=0$ (2分)

$5\sqrt{3}$

$4\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}$

2. $\iiint\limits_V x(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5})dxdydz$. (2分)

3×3

$=\iint\limits_{\substack{\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\le\sqrt{3}\\ y,z\ge 0}} dydz\int_0^{3(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5})} x\,dx$.

$\iint \int_0^{3\sqrt{3}-\frac{3}{4}y-\frac{3}{5}z}\sqrt{3}x\,dx$

$\frac{\sqrt{3}}{2}(3\sqrt{3}-\frac{3}{4}y-\frac{3}{5}z)^2$.

$=\iint (\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5})^3 dydz$. (2分)

$=\frac{9}{2}\iint(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5})^3$ (2分)

$=\frac{9}{2}\int_0^{4\sqrt{3}}dy\int_0^{5(\sqrt{3}-\frac{y}{4})}(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5})^3dz$ (1分)

$=\frac{9}{2}\int_0^{4\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\frac{y}{4})^4dy$.

$=\frac{81\sqrt{3}}{2}$ (1分)

$x(\sqrt{3}-\frac{1}{4}y-\frac{1}{5}z)$

$u(1-v-w)\,dw$

$x(\sqrt{3}-\frac{1}{4}y)(5\sqrt{3}-\frac{5}{3}x-\frac{5}{4}y)-\frac{1}{10}x(5\sqrt{3}-\frac{5}{3}x-\frac{5}{4}y)$

$(u-uv)(1-u-v)-u\frac{(1-u-v)^2}{2}$

$=u(1-u-v)[1-v-(1-u-v)]$

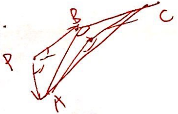
$=u^2(1-u-v)$

$30x+15y+12z-70\sqrt{3}=0$.

第七题简答：1. 利用函数的连续性。当$|PA| > |AB| + |AC|$时，函数在点P的值$f(P) > f(A)$。所以f的最小值在有界闭集$\{P \mid |PA| \le |AB| + |AC|\}$中取到.

2. 距离函数在原点不可微，所以f在A, B, C三点不可微。在其它点P处，

$$\nabla f\Big|_P = \frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}.$$



3. 如果f有一个驻点P_0，则三个单位向量

$$\frac{\overrightarrow{P_0A}}{|\overrightarrow{P_0A}|} + \frac{\overrightarrow{P_0B}}{|\overrightarrow{P_0B}|} + \frac{\overrightarrow{P_0C}}{|\overrightarrow{P_0C}|} = 0.$$

这说明这三个向量两两之间的夹角是120^o. 因此向量$\overrightarrow{P_0A}$, $\overrightarrow{P_0B}$, $\overrightarrow{P_0C}$两两之间的夹角也是120^o，这与ΔABC有一个内角大于或等于120^o矛盾.

所以函数f的最小值只能在A, B, C三点取到，$\min f = \min\{f(A), f(B), f(C)\}$.