

得分	评卷人

二、解答题

6. (10分) 给定方程 $x + \ln(x) = 2$

(1) 分析该方程在区间 $[1, 2]$ 上的根的情况;

(2) 用Newton迭代法, 取初值 $x_0 = 1.5$, 求出该方程的根。(最多迭代3步)

7. (15分) 给出下列函数表

x_i	-1	1	2	4
$f(x_i)$	0	8	12	16

(1) 作出差商表;

(2) 构造牛顿插值多项式, 并计算 $f(0)$;

(3) 写出 $f(0)$ 的插值误差表达式。

8. (15分) 给出下列数据:

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4
y_i	2.0	4.0	3.0	5.0

试对数据作出 $y(x) = a + bx^2$ 形式的拟合函数。

9. (15分) 对矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & t \\ 0 & t & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 求出 t 的范围, 使其Jacobi迭代格式收敛

(2) 求出 t 的范围, 使其Gauss-Siedel迭代格式收敛

10. (15分) 构造线性多步法 $p = 3, q = 2$ 的隐式差分格式。

中国科学技术大学

2007–2008学年第 1 学期考试试卷

考试科目：数值计算方法

得分：_____

学生所在系：_____ 姓名：_____

学号：_____

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。
3. 本试卷为闭卷考试。共 13 道试题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。
4. 计算中保留4位小数。

得分	评卷人

一、填空题

1. (6分) 设 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ ，则如下的三种公式能否成为向量范数，
 $|x_1| + 2|x_2| + 4|x_3|$ _____， $|x_1| + 3|x_2 + x_1| + 2|x_3|$ _____， $|x_1| + 3|x_2|$ _____。
2. (3分) 设 A 为实的对称阵，则 Jacobi 方法可以求出它的所有特征值。
3. (3分) 设 $f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 1$ ，则 $f[-1, 0, 2, 4, 9] =$ _____。
4. (3分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ ，则 $\|A\|_1 =$ _____。
5. (3分) 给出用 Newton 迭代求 $\sqrt[4]{5}$ 的格式_____。
6. (6分) 设 $l_0(x)$ ， $l_1(x)$ ， $l_2(x)$ ， $l_3(x)$ 是以互异的 x_0, x_1, x_2, x_3 为节点的 Lagrange 插值基函数，
 则 $\sum_{j=0}^3 l_j(x)(x_j + 1)^3 =$ _____。
7. (6分) 写出以 $(-\alpha, f(-\alpha), f'(-\alpha))$ ， $(0, f(0), f'(0))$ ， $(\alpha, f(\alpha), f'(\alpha))$ 为插值点构造的插值多项式的截断误差：
 _____。

得分	评卷人

二、解答题

8. (10分) 设有数据 $\begin{array}{c|ccc} x_i & -1 & 1 & 2 \\ \hline f(x_i) & 0 & 3 & 2 \end{array}$, 求其形如 $a + bx^2$ 的拟合多项式。

9. (10分) 考虑常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = x^2 \sin y, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 用4阶经典的Runge-Kutta公式求 $y(0.1)$ 的近似, 取步长 $h = 0.1$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \\ K_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases}$$

10. (15分)用 LDL^T 分解求解下列方程组

$$\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 20 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 1 \end{cases}$$

11. (15分) 用Gauss-Seidel方法求解下列方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

1) 写出迭代格式, 2) 求迭代矩阵; 3) 讨论迭代矩阵是否收敛?

12. (15分)

1) (10分) 确定参数 A , B , C 和 α , 使得数值积分公式

$$\int_{-2}^2 f(x)dx \approx Af(\alpha) + Bf(0) + Cf(-\alpha)$$

具有尽可能高的代数精度, 并求这个代数精度。

2) (5分) 若 $f(x)$ 足够光滑, 求这个数值积分公式的误差

13. (5分) 在做Newton插值时, 已知节点组 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 和各阶差商

$\{f(x_0), f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2], \dots, f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]\}$; 现增加了节点 $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$, 试给出求差商 $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ 的算法。

答案

1. 是(2分), 是(2分), 否(2分)

2. jacobí (3分)

3. 2(3分)

4. 5 (3分)

5. $\frac{3}{4}x_k + \frac{5}{4x_k^3}$

6. $(x+1)^3$ (3分)

7. $\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-\alpha)^2(x)^2(x-\alpha)^2, \xi \in [a, c]$ (4分)

8.

$$\begin{pmatrix} 3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ (6)}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ (4)}$$

9.

$$K_1 = 0 \text{ (2分)}$$

$$K_2 = 0.04207 \text{ (2分)}$$

$$K_3 = 0.04213 \text{ (2分)}$$

$$K_4 = 0.08437 \text{ (2分)}$$

$$y(0.1) = 1.00421 \text{ (2分)}$$

10. $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1/2 & 1 & \\ -1/3 & 4/13 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 13/2 & \\ & & 236/39 \end{pmatrix}$

或

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -0.5 & 1 & \\ -0.3333 & 0.3077 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 6.5 & \\ & & 6.0513 \end{pmatrix} \text{ (6分)}$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ Dz = y \\ L^T x = z \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -5 \\ 35/2 \\ -236/39 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 35/13 \\ -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

或

$$y = \begin{pmatrix} -5 \\ 17.5 \\ -6.0513 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0.8333 \\ 2.6923 \\ -1.0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ -1.0 \end{pmatrix} \quad (9\text{分})$$

11. 1) (5分) 2)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/10 & -13/20 \\ 0 & 3/20 & 1/40 \end{pmatrix} \quad (5\text{分})$$

3) 收敛, 对角占优(3分)

12. 1)

$$\begin{cases} A + B + C = \int_{-2}^2 x^0 dx = 4 \\ A(-\alpha) + C(\alpha) = \int_{-2}^2 x^1 dx = 0 \\ A(-\alpha)^2 + C(\alpha)^2 = \int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{16}{3} \\ A(-\alpha)^3 + C(\alpha)^3 = \int_{-2}^2 x^3 dx = 0 \\ A(-\alpha)^4 + C(\alpha)^4 = \int_{-2}^2 x^4 dx = \frac{64}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{10}{9} \\ B = \frac{16}{9} \\ C = \frac{10}{9} \\ \alpha = \sqrt{\frac{12}{5}} \end{cases}$$

2)

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} (x + \alpha)^2 x^2 (x - \alpha)^2 \\ &= \frac{1024}{175} \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} = \frac{64}{7875} f^{(6)}(\xi) \end{aligned}$$

13.

$$f[x_0, x_{n+1}] = \frac{f(x_0) - f(x_{n+1})}{x_0 - x_{n+1}}$$

$$f[x_0, x_1, x_{n+1}] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_{n+1}]}{x_1 - x_{n+1}}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_{n+1}] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_0, x_1, x_{n+1}]}{x_2 - x_{n+1}}$$

...

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] = \frac{f[x_0, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}]}{x_n - x_{n+1}}$$

中国科学技术大学

2010—2011学年 第2 学期考试试卷

考试科目：数值计算方法

得分：_____

学生所在系：_____ 姓名：_____

学号：_____

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 本试卷为闭卷考试。共 9 道试题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。
3. 计算结果保留4位小数。

得分	评卷人

一、填空题

1. (6分) 设 $f(x) = 2x^7 + x^3 + 1$ ，则 $f[2^0, 2^1] = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f[2^0, 2^1, \dots, 2^7] = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f[2^0, 2^1, \dots, 2^8] = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
2. (6分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ，则 $\|A\|_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\|A\|_\infty = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\rho(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. (6分) 做Dolittle分解 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \underline{\hspace{1cm}} & 1 & 0 \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ 0 & \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ 0 & 0 & \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix}$

得分	评卷人

二、解答题

4. (10分) 试对如下数据作出 $y(x) = ax^3 + b$ 形式的拟合函数：

x_i	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	2.0	4.0	3.2	5.0

5. (10分) 设 $f(x) = x^5 + x + 1$, 试构造一个最低阶的插值多项式 $q(x)$ 满足条件
 $q(-1) = f(-1)$, $q(0) = f(0)$, $q(1) = f(1)$, $q'(0) = f'(0)$, 并写出误差表达式。

6. (12分) 用幂法求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 9 & -29 & 13 \\ -2 & 6 & -2 \\ -10 & 34 & -14 \end{pmatrix}$ 的特征值, 以某初值开始, 若干步后, 得到如下结果, 试分析矩阵 A 的按模最大特征值和相应的特征向量。

k	X_k
..	...
6	(-12.8014, 6.9905, 19.7919)
7	(-60.6427, 27.962, 88.6047)
8	(-204.8219, 111.8481, 316.6699)
9	(-970.2823, 447.3923, 1417.6747)
10	(-3277.1495, 1789.5697, 5066.7192)

7. (14分) 用牛顿迭代求如下的非线性方程组的根, 要求误差 $\epsilon < 10^{-5}$, 取初值为 $(2.006, -2.003)^T$,

$$\begin{cases} x^2 + y^3 + 2x = 0 \\ x^3 + y^2 + 5y = 2 \end{cases}$$

8. (18分)

(1) 讨论用Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代解 $Ax=b$ 时的收敛性，如果收敛，比较那种方法收

敛较快，其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(2) 用Gauss-Seidel迭代解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 10x_3 = 10 \end{cases}$$

取初值为 $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ ，迭代2步。

9. (18分) 对于常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

其等价形式为: $y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x, y) dx$ 。

(1) 对于下列情形, 分别推导出该常微分方程的线性多步法格式,

(A) $p = 0$, 积分点取 x_n, x_{n-1} ;

(B) $p = 1$, 积分点取 x_{n+1}, x_n, x_{n-1} ;

(2) 分析(1)中格式(A)的局部截断误差;

(3) 试构造该常微分方程的一种预估—校正格式。

中国科学技术大学

2011— 2012学年 第 2 学期 《计算方法(B)》 考试试卷

题号	一	二	三	四	五	六	总计
得分							
评卷人							

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 本试卷为闭卷考试。共 6 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。
3. 计算结果保留4位小数。

填空

一、 填空

- (1) (6分) 准确值 $x^* = 0.715251828\cdots$, 保留四位有效数字所得的近似值为_____, 相对误差为_____.

- (2) (6分) 设 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, 则 $\|A\|_1 = \underline{\hspace{1cm}}$, $\|A\|_\infty = \underline{\hspace{1cm}}$.

- (3) (6分) n 个积分节点的数值积分公式, 最高能达到____阶代数精度, 达到时称_____

- (4) (6分) 解方程 $x^3 + x - 1 = 0$, 用Newton迭代法格式为_____; 用弦截法格式为_____.

- (5) (6分) 给出矩阵的LU分解。

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \underline{\hspace{1cm}} & 1 & 0 \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ 0 & \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ 0 & 0 & \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix}.$$

- (6) (6分) Gauss顺序消元法能进行的条件为_____, 解 n 阶线性方程组的计算量大约为_____.

- (7) (6分) $f(x) = x^4 + 2x - 1$, 满足 $h(-1) = f(-1), h(0) = f(0), h'(0) = f'(0), h(1) = f(1)$ 最低次的插值多项式为_____, 插值误差为_____.

得分	评卷人

二、解答题

二、（12分）下表为 $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ 在 $[0, 1]$ 区间等分点上的函数值，分别用复化梯形和复化 Simpson 积分公式计算 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$.

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.675	0.75	0.875	1
$f(x)$	4	3.9385	3.7647	3.5068	3.200	2.8764	2.5600	2.2655	2

三、（10分）设有数据

x_i	1	4	9	16
$f(x_i)$	2.96	5.04	6.88	9.24

, 求 $y = a + b\sqrt{x}$ 形式的拟合函数。

四、（10分）对某3阶矩阵 A 采用规范化幂法计算其模最大特征值，取初始向量 $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ 按照 $x^{(k+1)} = A \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_\infty}$ 算得向量序列 $\{x^{(i)}\}$ 如下表所示，请根据表格计算矩阵 A 的按模最大特征值和相应的特征向量，并简单说明理由.

i	$x^{(i)T}$
0	(1, 0, 0)
1	(-4.625, 1.688, -1.125)
2	(3.865, -1.095, 0.7297)
3	(-4.035, 1.227, -0.8182)
4	(3.991, -1.193, 0.7955)
5	(-4.002, 1.202, -0.8011)
6	(3.999, -1.200, 0.7997)
7	(-4.0, 1.200, -0.8001)
8	(4.0, -1.200, 0.8000)
9	(-4.0, 1.200, -0.8000)
10	(4.0, -1.200, 0.8000)

五、 (14分) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $b = (1, 2, 3)^T$, 用迭代法解方程组 $Ax = b$.

(1). 写出Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代的分量形式.

(2). 判断(1)中两种方法的收敛性, 如果均收敛, 说明哪一种方法收敛更快.

六、（12分）用线性多步法求初值问题
$$\begin{cases} y' = f(x, y) & (a \leq x \leq b) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$
 的数值解（取等距分割），请构造 $p = 1, q = 2$ 时的显式差分格式，并求出局部截断误差.

中国科学技术大学

2014 – 2015 学年第一学期《计算方法(B)》考试试卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
复评人								

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 计算结果保留4位小数。
3. 本试卷为闭卷考试, 共 7 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

得分	评卷人

一、填空题 (本题有6小题, 每小题6分, 共36分)

(1) 设 $\sqrt{20}$ 的近似值 x 相对误差为0.1%, 则 x 的绝对误差限为_____, 有_____位有效数字。

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 则范数 $\|A\|_2 =$ _____, 谱半径 $\rho(A) =$ _____。

(3) 设 $f(x) = 8x^8 - x^6 + 3$, 则差商 $f[0, 1] =$ _____, $f[2^0, 2^1, \dots, 2^8] =$ _____。

(4) 设三次样条函数 $S(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____。

(5) 设对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则Givens变换 $Q(1, 3, \theta) =$ _____。

使得 $Q(1, 3, \theta)^T A Q(1, 3, \theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(6) 设 $f(x) \in C^4[0, 1]$, 则满足 $h(0) = f(0) = 1$, $h'(0) = f'(0) = 3$, $h''(0) = f''(0) = -4$, $h(1) = f(1) = 3$ 的最低次插值多项式 $h(x)$ 为_____, 插值余项为_____。

得分	评卷人

二、（本题10分）

用Courant分解法求解线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 29 \\ -6 \end{pmatrix}$$

得分	评卷人

三、（本题10分）

下表为 $f(x) = e^{2x}$ 在 $[0, 1]$ 区间某些等分点上的函数值，分别用复化梯形积分公式和复化Simpson积分公式计算 $\int_0^1 e^{2x} dx$ 。

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1
$f(x)$	1	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183	3.4903	4.4817	5.7546	7.3891

得分	评卷人

四、（本题10分）

用最小二乘法原理求一个形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式，使其与下列数据相拟合：

x	3	4	5	6	7
y	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

得分	评卷人

五、（本题12分）

已知方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近有实根，

- (1) 用牛顿迭代法求根，取初值 $x_0 = 1.5$ ，计算到 $|x_{k+1} - x_k| < 0.05$ 时停止；
- (2) 判断迭代序列： $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$ 对初值 $x_0 = 1.5$ 的收敛性，并简述理由。

得分	评卷人

六、（本题12分）

用迭代法解线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ，其中实数 $a \neq 1$ 。

- (1) 分别写出Jacobi迭代公式、Gauss-Seidel迭代公式及松弛因子为 ω 的松弛迭代公式；
- (2) 写出Gauss-Seidel的迭代矩阵，并求 a 的取值范围使得Gauss-Seidel迭代收敛。

得分	评卷人

七、（本题10分）

设有线性多步格式： $y_{n+1} = y_n + h[Af(x_n, y_n) + Bf(x_{n-2}, y_{n-2}) + Cf(x_{n-4}, y_{n-4})]$, $n \geq 4$, 其中 $A, B, C \in \mathbb{R}$ 是常数。当该数值格式应用于常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a + bx + cx^2, & x \in [x_0, +\infty) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

时，对于任意给定的 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 可以得到该方程的精确解(假定计算过程中无舍入误差)，试确定常数 A, B, C 。

中国科学技术大学数学科学学院
2016 ~ 2017学年 第 1 学期期末考试试卷
■A卷 □B卷

课程名称 计算方法(B) 课程编号 001511
考试时间 2017年1月12日 考试形式 闭卷
姓 名 学 号 学 院

题号	一	二	三	四	五	六	七	总计
得分								
评卷人								

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 本试卷共 7 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。
3. 计算结果保留4位小数。

一、 (30分) 填空

- (1) (9分) 用规范的幂法求矩阵 A 的特征值。若 A 的按模最大特征值只有一个, 则序列表现为

若 A 的按模最大特征值是互为反号的两个实数, 则序列表现为

- (2) (6分) 解非线性方程 $f(x) = 0$ 的Newton迭代格式为_____

若已知方程的根是3重根, 则格式应该改为_____,

才能保证格式具有2阶收敛速度。

- (3) (3分) 6个点的数值积分公式至多可以到_____阶代数精度。

- (4) (6分) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$, 则 $\|A\|_1 =$ _____, $\|A\|_\infty =$ _____

- (5) (6分) 已知 $f(1) = 0.12, f(2) = 0.25, f(3) = 0.20$, 则用Simpson公式得到的函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的数值积分为_____, 差商 $f[1, 2, 3] =$ _____

二、（10分）用Courant分解求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -12 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -54 \end{cases}$$

提示： $A = LU$ ，其中 U 为单位上三角阵， L 为下三角阵，称为 A 的Courant分解。

三、（12分）按下列数据，用最小二乘法做出 $f(x) = a + bx^2$ 形式的拟合函数。

x_i	-1	0	0.5	2	2.5
y_i	0.60	0.71	0.75	0.8	1.0

四、（12分）确定下面求积分公式中的待定参数A, 使其代数精度尽可能高，写出公式并指出该求积公式所具有的代数精度：

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(0) + f(h)) + Ah^2(f'(0) - f'(h))$$

五、（12分）给定线性方程组 $Ax = b$ ，其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ， $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ 。若使用迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}), \alpha \in \mathbb{R}$$

求解方程。

1. 写出迭代公式的迭代矩阵；
2. 求出 α 的取值范围，使得迭代收敛，并指出 α 取何值时迭代收敛速度最快。

六、（12分）函数 $f(x)$ 足够光滑，以点2.0, 4.0, 6.0, 8.0为节点构造的Lagrange插值多项式为 $l_1(x)$ ；以4.0, 6.0, 8.0, 10.0为插值节点的插值多项式为 $l_2(x)$ ，若 $l_1(7.0) = 0.325$ ， $l_2(7.0) = 0.315$ ，

1. 用事后估计方法，估计 $l_1(7.0)$ 处的误差；
2. $l(x)$ 是以2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0为节点的插值多项式，试计算 $l(7.0)$ 的值。给出计算公式，并证明。

七、(12分) 对常微分方程
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = b \end{cases}$$
 , 在等距节点下构造如下的线性多步格式

$$y_{n+1} + (\alpha - 1)y_n - \alpha y_{n-1} = \frac{h}{4}[(\alpha + 3)f_{n+1} + (3\alpha + 1)f_{n-1}]$$

假定节点间距为 h

1. 证明 $\alpha \neq -1$ 时格式是二阶精度的 (即格式的局部截断误差为 $O(h^3)$) , 当 $\alpha = -1$ 时格式是三阶精度的。
2. 当 $\alpha = -1$ 时, 说明格式是几步几阶显式还是隐式格式。