微分几何第五次习题课

黄天一

USTC

更新：2023 年 11 月 25 日

目录

1 作业解答

作业 1 证明: $\frac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$ 与正交标架 e_1, e_2 的选取无关.

证明. 任取另一正交标架 $\{r : \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, e_3 = n\}$, 则存在函数 θ 使得

$$\tilde{e}_1 = e_1\cos\theta + e_2\sin\theta,\ \tilde{e}_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2.$$

此时计算可得

$$\tilde{\omega}^1 = \langle \mathrm{d}r, \tilde{e}_1\rangle = \omega^1\cos\theta + \omega^2\sin\theta,$$
$$\tilde{\omega}^2 = \langle \mathrm{d}r, \tilde{e}_2\rangle = -\omega^1\sin\theta + \omega^2\cos\theta.$$

另一方面, 由于

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{e}_1 &= \mathrm{d}e_1\cos\theta + \mathrm{d}e_2\sin\theta + (-e_1\sin\theta + e_2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= (\mathrm{d}e_1 + e_2\,\mathrm{d}\theta)\cos\theta + (\mathrm{d}e_2 - e_1\,\mathrm{d}\theta)\sin\theta.\end{aligned}$$

所以联络形式为

$$\tilde{\omega}_1^2 = \langle \mathrm{d}\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\rangle = -\sin^2\theta\langle \mathrm{d}e_2 - e_1\,\mathrm{d}\theta, e_1\rangle + \cos^2\theta\langle \mathrm{d}e_1 + e_2\,\mathrm{d}\theta, e_2\rangle = \omega_1^2 + \mathrm{d}\theta.$$

根据 Poincaré 等式 $\mathrm{d}^2=0$, 我们有 $\mathrm{d}\tilde{\omega}_1^2=\mathrm{d}\omega_1^2$. 又因为

$$\tilde{\omega}^1\wedge\tilde{\omega}^2=\omega^1\wedge\omega^2\cos^2\theta-\omega^2\wedge\omega^1\sin^2\theta=\omega^1\wedge\omega^2,$$

由此即证.

作业 2 *考虑球面* $r(u,v)=(a\cos u\cos v,a\cos u\sin v,a\sin u)$.

1. 求球面的一组正交活动标架.
2. 求诸微分形式.
3. 求球面的第二基本形式.

证明. 1. 由于 $r_u=(-a\sin u\cos v,-a\sin u\sin v,a\cos u)$, $r_v=(-a\cos u\sin v,a\cos u\cos v,0)$ 总为正交向量, 所以归一化可得一组正交活动标架 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$, 其中

$$e_1=\frac{r_u}{|r_u|}=(-\sin u\cos v,-\sin u\sin v,\cos u),\ e_2=\frac{r_v}{|r_v|}=(-\sin v,\cos v,0),$$

$$e_3=e_1\wedge e_2=(-\cos u\cos v,-\cos u\sin v,-\sin u).$$

2. 由于 $\mathrm{d}r=ae_1\,\mathrm{d}u+a\cos ue_2\,\mathrm{d}v$, 所以

$$\omega^1=\langle\mathrm{d}r,e_1\rangle=a\,\mathrm{d}u,\ \omega^2=\langle\mathrm{d}r,e_2\rangle=a\cos u\,\mathrm{d}v.$$

另一方面, 计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e_1&=(-\cos u\cos v,-\cos u\sin v,-\sin u)\,\mathrm{d}u+(\sin u\sin v,-\sin u\cos v,0)\,\mathrm{d}v\\&=e_3\,\mathrm{d}u-\sin ue_2\,\mathrm{d}v,\\\mathrm{d}e_2&=(-\cos v,-\sin v,0)\,\mathrm{d}v=(\sin ue_1+\cos ue_3)\,\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

所以

$$\omega_1^2=\langle\mathrm{d}e_1,e_2\rangle=-\sin u\,\mathrm{d}v,$$

$$\omega_1^3=\langle\mathrm{d}e_1,e_3\rangle=\mathrm{d}u,$$

$$\omega_2^3=\langle\mathrm{d}e_2,e_3\rangle=\cos u\,\mathrm{d}v.$$

3. 曲面的第二基本形式为

$$\mathrm{II}=\omega^\alpha\otimes\omega_\alpha^3=a\,\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+a\cos^2u\,\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v.$$

作业 3 *用正交标架法证明第三章习题 27.*

证明. (1) 证明不变, 下面用正交标架法证明 (2). 由于 S 和 $\tilde{S}$ 在对应点的切平面平行, 我们取定 S 的正交标架 $\{r; e_1, e_2, e_3 = n\}$, 则 $\{\tilde{r}; e_1, e_2, e_3 = n\}$ 也是 $\tilde{S}$ 的一个正交标架. 计算可得

$$\tilde{\omega}^\alpha = \langle \mathrm{d}\tilde{r}, e_\alpha \rangle = \langle \mathrm{d}r + \lambda\, \mathrm{d}n, e_\alpha \rangle = \omega^\alpha + \lambda \omega_3^\alpha.$$

回忆 $\omega_3^\alpha = -h_{\alpha\beta}\omega^\beta$, 所以

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2 &= (\omega^1 - \lambda h_{1\beta}\omega^\beta) \wedge (\omega^2 - \lambda h_{2\beta}\omega^\beta) \\ &= (1 - \lambda h_{11} - \lambda h_{22} + \lambda^2(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}))\omega^1 \wedge \omega^2.\end{aligned}$$

由于 $(h_{\alpha\beta})$ 即为 Weingarten 变换在 $\{r_u, r_v\}$ 下的矩阵, 所以 $h_{11} + h_{22} = 2H$, $h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = K$. 又因为 $\tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2$, 所以

$$\tilde{K} = -\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}_1^2}{\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2} = -\frac{1}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}\frac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}.$$

另一方面, 由

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2} = \frac{\omega^1 \wedge \omega_2^3 - \omega^2 \wedge \omega_1^3}{2\omega^1 \wedge \omega^2}$$

以及 $\tilde{\omega}_\alpha^3 = \omega_\alpha^3$ 可得

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= \frac{(\omega^1 + \lambda\omega_3^1) \wedge \omega_2^3 - (\omega^2 + \lambda\omega_3^2) \wedge \omega_1^3}{2\tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2} \\ &= \frac{1}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}\left(\frac{\omega^1 \wedge \omega_2^3 - \omega^2 \wedge \omega_1^3}{2\omega^1 \wedge \omega^2} + \frac{\lambda\, \mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}\right) \\ &= \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}.\end{aligned}$$

作业 4 设曲面 S 的参数表示为 $r = r(u, v)$, $e_1 = r_u, e_2 = r_v$ 是 S 的正交标架. 求 S 的 Gauss 曲率.

证明. 首先 $\omega^1 = \langle \mathrm{d}r, e_1 \rangle = \mathrm{d}u$, $\omega^2 = \langle \mathrm{d}r, e_2 \rangle = \mathrm{d}v$, 所以 $\omega^1 \wedge \omega^2 = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$. 又因为

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \langle \mathrm{d}e_1, e_2 \rangle = \langle r_{uu}\, \mathrm{d}u + r_{uv}\, \mathrm{d}v, r_v \rangle \\ &= \left(\partial_u \langle r_u, r_v \rangle - \frac{1}{2}\partial_v \langle r_u, r_u \rangle\right) \mathrm{d}u + \frac{1}{2}\partial_u \langle r_v, r_v \rangle\, \mathrm{d}v = 0,\end{aligned}$$

所以 $K = -\frac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = 0$.

作业 5 设 (u, v) 为曲面 S 的正交参数, $e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}$, $e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}}$. 证明: 方程 $\mathrm{d}\omega_\alpha^3 = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^3 (\alpha = 1, 2)$ 与 Codazzi 方程等价.

证明. 我们只需证明 $\mathrm{d}\omega_\alpha^3 = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^3$ 在正交参数下的形式即为 Codazzi 方程. 计算可得

$$\omega_1^2 = \left\langle \frac{r_{uu}}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u + \frac{r_{uv}}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v + \psi r_u, \frac{r_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v.$$

$$\omega_1^3 = \left\langle \frac{r_{uu}}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u + \frac{r_{uv}}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v + \psi r_u, n \right\rangle = \frac{L}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}u + \frac{M}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v.$$

$$\omega_2^3 = \left\langle \frac{r_{uv}}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u + \frac{r_{vv}}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}v + \xi r_v, n \right\rangle = \frac{M}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u + \frac{N}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}v.$$

这里 ψ, ξ 都是无关紧要的 1-形式. 所以

$$\mathrm{d}\omega_1^3 = \left[-\left(\frac{L}{\sqrt{E}} \right)_v + \left(\frac{M}{\sqrt{E}} \right)_u \right] \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = \left[-\frac{N(\sqrt{E})_v}{G} - \frac{M(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \right] \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

$$\mathrm{d}\omega_2^3 = \left[-\left(\frac{M}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{N}{\sqrt{G}} \right)_u \right] \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

$$\omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = \left[\frac{M(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} + \frac{L(\sqrt{G})_u}{E} \right] \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

由此即证.

作业 6 设 $\{e_1, e_2\}$ 是曲面的正交标架, e_1, e_2 是曲面的主方向, k_1, k_2 是相应的主曲率. 证明: 此时曲面的 Codazzi 方程等价于

$$\mathrm{d}k_1 \wedge \omega^1 = (k_2 - k_1)\omega_1^2 \wedge \omega^2,\ \mathrm{d}k_2 \wedge \omega^2 = (k_1 - k_2)\omega_2^1 \wedge \omega^1.$$

证明. 根据作业 5, 我们只需证明题设方程与 $\mathrm{d}\omega_\alpha^3 = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^3$ 等价. 首先有

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= \langle \mathrm{d}e_1, n \rangle = \langle e_1, -\mathrm{d}n \rangle = \langle e_1, \mathcal{W}(\mathrm{d}r) \rangle \\ &= \langle e_1, \mathcal{W}(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2) \rangle = k_1 \omega^1. \end{aligned}$$

类似可得 $\omega_2^3 = k_2 \omega^2$. 所以

$$\mathrm{d}\omega_1^3 = \mathrm{d}k_1 \wedge \omega^1 + k_1\,\mathrm{d}\omega^1 = \mathrm{d}k_1 \wedge \omega^1 + k_1 \omega_1^2 \wedge \omega^2.$$

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = \omega_1^2 \wedge k_2 \omega^2 = k_2 \omega_1^2 \wedge \omega^2.$$

$$\mathrm{d}\omega_2^3 = \mathrm{d}k_2 \wedge \omega^2 + k_2\,\mathrm{d}\omega^2 = \mathrm{d}k_2 \wedge \omega^2 + k_2 \omega_2^1 \wedge \omega^1,$$

$$\omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = k_1 \omega_2^1 \wedge \omega^1.$$

由此即证.

2 补充习题

习题 1 证明: $\Phi = \langle r, e_1\rangle\omega_2^3 - \langle r, e_2\rangle\omega_1^3$ 与曲面 $S: r = r(u, v)$ 上的正交标架 $\{r; e_1, e_2, e_3 = n\}$ 的选取无关, 其中 n 为单位法向量.

证明. 类似第一个作业题. 任取另一正交标架 $\{r; \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, e_3 = n\}$, 那么存在函数 θ 使得

$$\tilde{e}_1 = e_1\cos\theta + e_2\sin\theta,\ \tilde{e}_2 = -e_1\sin\theta + e_2\cos\theta.$$

此时计算可得

$$\tilde{\omega}_2^3 = \langle \mathrm{d}\tilde{e}_2, n\rangle = \langle -\mathrm{d}e_1\sin\theta + \mathrm{d}e_2\cos\theta + \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2, n\rangle = -\omega_1^3\cos\theta + \omega_2^3\cos\theta.$$

这里 ψ_1, ψ_2 是两个无关紧要的 1-形式. 类似可得

$$\tilde{\omega}_1^3 = \omega_1^3\cos\theta + \omega_2^3\sin\theta.$$

所以

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} &= (\langle r, e_1\rangle\cos\theta + \langle r, e_2\rangle\sin\theta)(-\omega_1^3\cos\theta + \omega_2^3\cos\theta)\\ &\quad - (-\langle r, e_1\rangle\sin\theta + \langle r, e_2\rangle\cos\theta)(\omega_1^3\cos\theta + \omega_2^3\sin\theta)\\ &= \langle r, e_1\rangle\omega_1^3 - \langle r, e_2\rangle\omega_2^3 = \Phi.\end{aligned}$$

习题 2 求下列第一基本形式对应曲面片的 Gauss 曲率, 并找出这两个曲面片之间的一个等距对应.

$$\mathrm{I} = \frac{4(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y)}{(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)^2},\ D = \{(x,y): x^2+y^2>1, x\neq 0\}.$$

$$\tilde{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u + \mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v}{v^2},\ \tilde{D} = \{(u,v): v>0, 0<u<2\pi\}.$$

证明. 我们先求等温参数下曲面的 Gauss 曲率, 即 $\mathrm{I} = \lambda(u,v)^2(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u + \mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v)$. 这时, $e_1 = \frac{r_u}{\lambda}, e_2 = \frac{r_v}{\lambda}$, 且

$$\omega^1 = \lambda\,\mathrm{d}u,\ \omega^2 = \lambda\,\mathrm{d}v.$$

从而可得

$$\mathrm{d}\omega^1 = -\lambda_v\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v = -\frac{\lambda_v}{\lambda^2}\omega^1\wedge\omega^2,\ \mathrm{d}\omega^2 = \lambda_u\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v = \frac{\lambda_u}{\lambda^2}\omega^1\wedge\omega^2.$$

所以联络形式为

$$\omega_1^2 = -\frac{\lambda_v}{\lambda^2}\omega^1 + \frac{\lambda_u}{\lambda^2}\omega^2 = -(\log\lambda)_v\,\mathrm{d}u + (\log\lambda)_u\,\mathrm{d}v.$$

由 Gauss 方程可得

$$K=-\frac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega_2}=-\frac{\Delta(\log\lambda)}{\lambda^2}.$$

将 $\lambda(x,y)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)}$ 代入可得 (下面记 $\boldsymbol{x}=(x,y)$)

$$K=\frac{|\boldsymbol{x}|^2(\log|\boldsymbol{x}|^2)^2}{4}\Delta\left(\log\frac{|\boldsymbol{x}|}{2}+\log\log|\boldsymbol{x}|^2\right)=-1.$$

[1]另一方面, 将 $\lambda(u,v)=\frac{1}{v}$ 代入可得

$$\tilde{K}=v^2\Delta(\log v)=-1.$$

现在我们考虑如何求等距对应. 首先, 考虑极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则

$$\mathrm{I}=\frac{4((\cos\theta\,\mathrm{d}r-r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)^2+(\sin\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta)^2)}{r^2(\log r^2)^2}=\frac{\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r+r^2\,\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}\theta}{r^2(\log r)^2}.$$

亦即极坐标变换给出了曲面片一和

$$\mathrm{I}=\frac{\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r+r^2\,\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}\theta}{r^2(\log r)^2},\ D=\{(r,\theta):r>1,0<\theta<2\pi\}$$

之间的等距对应. 设 $(r,\theta)\mapsto(u,v)$ 给出了上述曲面片和曲面片二的等距对应, 其 Jacobi 矩阵为 J, 那么成立

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{r^2(\log r)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{(\log r)^2}\end{pmatrix}=\frac{1}{v^2}JJ^T=\frac{1}{v^2}\begin{pmatrix}u_r^2+v_r^2 & u_rv_\theta+u_\theta v_r\\ u_rv_\theta+u_\theta v_r & u_\theta^2+v_\theta^2\end{pmatrix}.$$

上述偏微分方程组是难以求解的, 但我们可以考虑更简单的情况, 即 $u=u(\theta)$, $v=v(r)$. 此时, 上述化为常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\frac{v}{r\log r},\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=\frac{v}{\log r}.$$

注意到第二个 ODE 左端只与 θ 有关, 右端只与 r 有关, 所以存在常数 $C>0$ 使得 $v=C\log r$ 且 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=C$. 代入第一个 ODE 可得上述确实是一个解. 取 $C=1$, 就得到了一个合适的等距对应

$$u=\arg\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y},\ v=\log\sqrt{x^2+y^2}.$$

[1]我们来演示一下上面的具体计算. 在微分方程里我们学过 $\log|\boldsymbol{x}|$ 是 $\mathbb{R}^2\setminus 0$ 上的调和函数, 所以前一项直接为零. 另一方面, 计算可得

$$\Delta(\log f(\boldsymbol{x}))=\left(\frac{f_x}{f}\right)_x+\left(\frac{f_y}{f}\right)_y=\frac{\Delta f}{f}-\frac{|\nabla f|^2}{f^2}.$$

将调和函数 $f(\boldsymbol{x})=\log|\boldsymbol{x}|^2$ 代入即可.

3 补充内容: 常正高斯曲率曲面的分类

在课上, 老师曾证明了: 高斯曲率恒为零的无脐点曲面局部上一定是可展直纹面. 现在, 有了第四章提供的强有力工具, 我们可以作更进一步的分类. 首先, 需要简单介绍一些整体曲面的概念.

在此前的学习中, 我们的研究对象都是 "曲面片", 也就是可以选取正则参数化 $r = r(u, v), D \to \mathbb{R}^3$, 使得 $S = r(D)$, 其中 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是开区域. 但是, 很多熟知的曲面并不能被赋予一个整体的参数化. 例如球面, 无论是用球面坐标, 还是复变里的球极投影, 都不能把球面表示为上面所述的参数化映射的像. 为了解决这个问题, 人们非常机智地做了 "拼接" 的工作. 我们以球面为例.

例 3.1 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 $\mathbb{S}^2$. 在复分析里, 我们学习过可以用球极投影将去掉一极的球面与二维 (复) 平面构造一一对应. 具体来说, 如果记 $N = (0, 0, 1), S = (0, 0, -1)$ 分别为北极点和南极点, 那么映射

$$\varphi_N(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right),$$
$$\varphi_S(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \right)$$

分别给出了 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{S}^2 \setminus N$ 和 $\mathbb{S}^2 \setminus S$ 之间的一一对应. 事实上, 它们都是拓扑意义下的同胚映射, 并且 $(\mathbb{S}^2 \setminus N, \varphi_N)$ 和 $(\mathbb{S}^2 \setminus S, \varphi_S)$ 都是正则曲面片. 可以看到, $\{\mathbb{S}^2 \setminus N, \mathbb{S}^2 \setminus S\}$ 构成了 $\mathbb{S}^2$ 的一个开覆盖 (子空间拓扑意义下), 并且各自同胚于二维平面, 所以球面可以视作这两个曲面片的 "拼接". 但是, 这种拼接不能是简单的拓扑覆盖, 它还应该是光滑的. 具体来说, 我们希望两个转移映射 $\varphi_N^{-1} \circ \varphi_S, \varphi_S^{-1} \circ \varphi_N : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 是欧氏空间之间的光滑映射. 具体计算可得

$$\varphi_N^{-1} \circ \varphi_S(u, v) = \varphi_S^{-1} \circ \varphi_N(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right).$$

可以看到这符合我们的要求.

更一般地, 我们有如下定义:

定义 3.1 设 $S \subset \mathbb{R}^3$. 称 S 是一个 (无边的) 正则曲面, 是指 $S = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$, 且满足:

1. 每个 S_α 都是正则曲面片. 即存在参数区域 (连通开集)D_α, 以及光滑的拓扑同胚 $r_\alpha : D_\alpha \to S_\alpha, (u^\alpha, v^\alpha) \mapsto r_\alpha(u^\alpha, v^\alpha)$, 满足 $\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\alpha} \wedge \frac{\partial r_\alpha}{\partial v^\alpha} \neq 0$.
2. 对任意 $\alpha, \beta \in A$ 满足 $S_\alpha \cap S_\beta \neq \varnothing$, 两个转移映射

$$r_\alpha^{-1} \circ r_\beta : r_\beta^{-1}(S_\alpha \cap S_\beta) \to D_\alpha,$$
$$r_\beta^{-1} \circ r_\alpha : r_\alpha^{-1}(S_\alpha \cap S_\beta) \to D_\beta$$

都是光滑的.

3.1 常正高斯曲率曲面的分类: Liebmann 定理

我们知道一个非常漂亮的常正高斯曲率曲面, 那就是球面: 半径为 R 的球面的高斯曲率恒为 $\frac{1}{R^2}$. 反过来, 可以证明如下的刚性定理:

定理 3.1 (Liebmann) *如果紧致连通曲面 S 的高斯曲率恒为 (正) 常数, 那么 S 为球面.*

这里的紧致, 是指正则曲面 S 作为 $\mathbb{R}^3$ 的子集是有界闭的. 例如, 球面、环面都是紧致的, 但平面、柱面就不紧致. 注意到定理陈述中常数曲率为正这个条件是可去的, 这是因为下面的引理:

引理 3.2 *设 S 为紧致曲面, 那么存在 $p \in S$ 使得高斯曲率 $K(p) > 0$.*

证明. 定义函数 $f : S(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. 那么由紧致性可得 f 存在最大值点 $P_0 \in S$. 下证 $K(P_0) > 0$. 取 S 在 P_0 附近的局部坐标系 $r = r(u, v)$, 那么考虑函数 $F(u, v) = (f \circ r)(u, v) = \langle r(u, v), r(u, v)\rangle$. 由 f 在 P_0 处取得极值可得 $\mathrm{d}f(P_0) = 0$, 从而 $0 = \mathrm{d}F(u_0, v_0) = 2\langle \mathrm{d}r(u_0, v_0), r(u_0, v_0)\rangle$. 所以存在 $\lambda \neq 0$, 使得 $r(u_0, v_0) = \lambda n(u_0, v_0)$, 这里 $n(u_0, v_0)$ 是 S 在 P_0 处的单位法向.

现在任取 S 上过 $P_0 = r(0)$ 的弧长参数曲线 $r(s) = r(u(s), v(s))$, 那么 $f \circ r$ 在 $s = 0$ 也取得最大值. 所以

$$0 \geqslant \frac{\mathrm{d}^2(f \circ r)}{\mathrm{d}s^2}(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} 2\langle \dot{r}(s), r(s)\rangle = 2\langle \ddot{r}(0), \lambda n(0)\rangle + 2.$$

由此可得沿 $v = \dot{r}(0)$ 方向的法曲率满足 $\lambda k_n(v) \leqslant -1$, 即 S 在 P_0 处沿各方向的法曲率总同号, 且 $|k_n(v)| \geqslant \frac{1}{|\lambda|}$, 故 $K(P_0) \geqslant \frac{1}{\lambda^2} > 0$.

现在想想怎么开始刚性定理的证明. 对于常正 Gauss 曲率的曲面 S, 其主曲率函数 $k_1, k_2 (k_1 \geqslant k_2)$ 是连续函数, 并且 $k_1 k_2 = K$ 为常数. 这说明, 如果 k_1 在某点 p_0 处取得极大值, 则 k_2 必然在 p_0 取得极小值. 出于上述观察, Hilbert 考察了这样的极值点 p_0, 并给出了如下引理:

引理 3.3 (Hilbert) *设 $k_1, k_2 (k_1 \geqslant k_2)$ 为 S 的主曲率函数, 非脐点 $P_0 \in S$ 满足 k_1 在 P_0 处取得局部极大值, 且 k_2 在 P_0 处取得局部极小值. 那么 $K(P_0) \leqslant 0$.*

证明. 我们需要借助作业 6 的结果. 由于 P_0 非脐点, 可以在 P_0 附近选取曲率线网 (u, v), 即 r_u, r_v 均为主方向. 此时选取正交标架 $\{r; e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}}, e_3 = n\}$, 则 $\omega^1 = \sqrt{E}\,\mathrm{d}u$, $\omega^2 = \sqrt{G}\,\mathrm{d}v$. 记 k_1, k_2 为 r_u, r_v 对应的主曲率函数, 那么

$$\mathrm{d}k_1 \wedge \omega^1 = ((k_1)_u\,\mathrm{d}u + (k_1)_v\,\mathrm{d}v) \wedge \sqrt{E}\,\mathrm{d}u = -\sqrt{E}(k_1)_v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}k_2 \wedge \omega^2 = ((k_2)_u \,\mathrm{d}u + (k_2)_v \,\mathrm{d}v) \wedge \sqrt{G}\,\mathrm{d}v = \sqrt{G}(k_2)_u \,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

代入作业 6 的结果可得

$$-(k_1)_v \omega^1 \wedge \omega^2 + \sqrt{G}(k_1 - k_2)\omega_1^2 \wedge \omega^2 = 0,$$

$$-(k_2)_u \omega^2 \wedge \omega^1 + \sqrt{E}(k_1 - k_2)\omega_1^2 \wedge \omega^1 = 0.$$

我们记 $(k_1 - k_2)\omega_1^2 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2$, 那么

$$-(k_1)_v + \sqrt{G}\alpha = -(k_2)_u + \sqrt{E}\beta = 0.$$

所以

$$(k_1 - k_2)\omega_1^2 = \frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}\omega^1 + \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}\omega^2.$$

继续微分可得

$$\mathrm{d}(k_1 - k_2) \wedge \omega_1^2 + (k_1 - k_2)\,\mathrm{d}\omega_1^2 = \mathrm{d}\left(\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}\omega^1 + \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}\omega^2\right).$$

由于 k_1, k_2 在 P_0 处取极值, 所以 $\mathrm{d}k_1(P_0) = \mathrm{d}k_2(P_0) = 0$. 由 Gauss 方程可得 $\mathrm{d}\omega_1^2 = -K(P_0)\omega^1 \wedge \omega^2$. 现在, 在 P_0 处计算右式可得

$$\text{RHS} = \left(\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}\right)_v \mathrm{d}v \wedge \omega^1 + \left(\frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}\right)_u \mathrm{d}u \wedge \omega^2 = \left(\frac{(k_2)_{uu}}{E} - \frac{(k_1)_{vv}}{G}\right)\omega^1 \wedge \omega^2.$$

所以

$$K(P_0) = -\frac{1}{k_1(P_0) - k_2(P_0)}\left(\frac{(k_2)_{uu}(P_0)}{E} - \frac{(k_1)_{vv}(P_0)}{G}\right).$$

然后, 由于 k_1 和 k_2 分别在 P_0 处取极大、极小值, 且 $k_1(P_0) > k_2(P_0)$, 所以 $K(P_0) \leqslant 0$.

有了 Hilbert 引理, 让我们回到 Liebmann 刚性定理的证明.

证明. 这个证明最早由陈省身先生给出. 以下不妨设 $k_1 \geqslant k_2$ 为主曲率函数. 由于 S 是紧致的, 所以存在 $p_0 \in S$, 使得 k_1 在 p_0 处达到最大值. 此时, k_2 在 p_0 处达到最小值. 根据 Hilbert 引理以及 S 具有常正 Gauss 曲率, $p_0 \in S$ 只能是脐点, 即 $k_1(p_0) = k_2(p_0)$. 现在任取 $p \in S$, 有 $k_1(p) \leqslant k_1(p_0) = k_2(p_0) \leqslant k_2(p) \leqslant k_1(p)$. 上式每一步的等号都必须成立, 因此 S 是全脐点曲面. 又因为 $K > 0$, 所以 S 是球面的一部分.

另一方面, 由于 S 是紧致连通曲面, 所以 S 是某个半径恒定的球面的闭子集. 而无边整体曲面每点局部同胚于二维欧氏开区域, 所以 S 还是这个球面的开子集. 根据球面的连通性即可得 S 就是整个球面.

3.2 常负高斯曲率曲面的分类: Sine-Gordon 方程

现在, 我们再去讨论具有常负高斯曲率曲面的分类. 这时, 我们不妨设曲面的 Gauss 曲率恒为 -1[2]. 由于曲面的高斯曲率恒为 -1, 所以是无脐点曲面. 在 $p \in M$ 附近, 可以选取曲率线网 (u, v), 此时 $e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}}$ 是正交的主方向. 这时计算可得

$$\omega_1^2 = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\,\mathrm{d}u + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}v.$$

现在考虑 Codazzi 方程 $\mathrm{d}\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3$, 由 $\omega_\alpha^3 = k_\alpha \omega^\alpha$ 可得

$$\mathrm{d}(k_1\omega^1) = k_2\omega_1^2 \wedge \omega^2 \Rightarrow (k_1\sqrt{E})_v\,\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u = -k_2(\sqrt{E})_v\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

整理可得

$$(k_1)_v\sqrt{E} + (k_1 - k_2)(\sqrt{E})_v = 0.$$

类似可由另一个 Codazzi 方程得到

$$(k_2)_u\sqrt{G} - (k_1 - k_2)(\sqrt{G})_u = 0.$$

回忆渐近方向由 $k_1u^2 + k_2v^2 = 0$ 定义, 结合 $K = -1$ 可得 $k_1k_2 = -1$, 所以渐近方向即为 $v = \pm k_1 u$ 对应曲面片上的单位切向量. 对于前者, 即有

$$w = \frac{r_u + k_1 r_v}{|r_u + k_1 r_v|}.$$

我们设 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ 是渐近方向 w 与 e_1 的夹角, 那么 $k_1 = \tan\varphi$, 从而 $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\cot\varphi$. 代回 Codazzi 方程可得

$$0 = \frac{\sqrt{E}}{\cos^2\varphi}\varphi_v + \frac{(\sqrt{E})_v}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\varphi_v\sin\varphi\sqrt{E} + (\sqrt{E})_v\cos\varphi}{\sin\varphi\cos^2\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}\right)_v.$$

$$0 = \frac{\sqrt{G}}{\sin^2\varphi}\varphi_u - \frac{(\sqrt{G})_u}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\varphi_u\cos\varphi\sqrt{G} - (\sqrt{G})_u\sin\varphi}{\sin^2\varphi\cos\varphi} = -\frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi}\right)_u.$$

由此可得 $(\frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi})_v = (\frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi})_u = 0$, 即 $\frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}$ 只与 u 有关, $\frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi}$ 只与 v 有关. 因此可以选取新的局部参数 $\xi = \xi(u), \eta = \eta(v)$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u} = \frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}, \quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}v} = \frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi}.$$

这时, (ξ, η) 仍然是曲率线网, 并且 $\omega^1 = \sqrt{E}\,\mathrm{d}u = \cos\varphi\,\mathrm{d}\xi, \omega^2 = \sqrt{G}\,\mathrm{d}v = \sin\varphi\,\mathrm{d}\eta$. 所以

$$\mathrm{d}\omega^1 = -\sin\varphi\cdot\varphi_\eta\,\mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\xi = \frac{\varphi_\eta}{\cos\varphi}\omega^1 \wedge \omega^2.$$

[2]这是因为, 如果曲面 S 的 Gauss 曲率恒为负数 $-c^2$, 那么可以作相似变换 $r \mapsto cr$, 此时得到相似曲面的高斯曲率即为 $\frac{1}{c^2}K = -1$.

$$\mathrm{d}\omega^2 = \cos\varphi \cdot \varphi_\xi \,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta = \frac{\varphi_\xi}{\sin\varphi}\omega^1 \wedge \omega^2.$$

所以 $\omega_1^2 = \frac{\varphi_\eta}{\cos\varphi}\omega^1 + \frac{\varphi_\xi}{\sin\varphi}\omega^2 = \varphi_\eta \,\mathrm{d}\xi + \varphi_\xi \,\mathrm{d}\eta$. 计算可得

$$-1 = K = -\frac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \frac{(\varphi_{\eta\eta} - \varphi_{\xi\xi})\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta}{\cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta} = \frac{\varphi_{\eta\eta} - \varphi_{\xi\xi}}{\cos\varphi \sin\varphi}.$$

因此夹角 φ 满足双曲方程 $\varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta\eta} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$. 更进一步, 作变换 $t = \frac{\xi+\eta}{2}, t = \frac{\xi-\eta}{2}$, 以及 $\alpha = 2\varphi$(表示两个渐近方向之间的夹角), 那么可以得到 **Sine-Gordon 方程**

$$\alpha_{st} = \sin\alpha.$$

这就说明常负高斯曲率的结构方程等价于上述 Sine-Gordon 方程. 并且此时,

$$r_t = r_\xi + r_\eta = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2,$$

$$r_s = r_\xi - r_\eta = \cos\varphi e_1 - \sin\varphi e_2$$

恰为曲面片的两个渐近方向. 这也说明: 常负高斯曲率曲面每点附近都存在曲面片具有渐近曲线网.