(单复变) 复分析 $\longrightarrow$ $\begin{cases} \text{实分析} \checkmark \\ \text{泛函分析} \checkmark \\ \text{Fourier分析} \star \\ \text{调和分析} \star \\ \text{随机分析} \star \end{cases}$

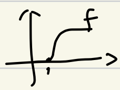
一元微积分 $\longrightarrow$ 多元微积分 (也要研究微分几何)

单复变 $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $\longrightarrow$ 多复变 $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ (也要研究复代数几何、Kahler几何)

例. 实光滑函数不一定解析

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \quad \text{Taylor级数}$$

光滑　不一定成立!

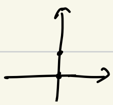


f光滑但 $f^{(n)}(1)=0$, $\forall n$

定理: 复可微函数一定解析 analytic

(全纯 holomorphic)

Lec 1



$\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$
$z=x+iy$
$i^2=-1$

复结构 $J: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 逆时针旋转90°

基 $\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ $J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $J^2=-Id$

复数运算 ①加法 ②乘法 ③模 ④共轭、$\mathrm{Re}\,z$、$\mathrm{Im}\,z$

性质 ① $|\mathrm{Re}\,z|, |\mathrm{Im}\,z| \le |z|$. ② $|z+w| \le |z|+|w|$ ③ $|z|^2 = z\bar{z}$, $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ $(z\neq 0)$

极坐标、辐角 $\mathrm{Arg}(z)=\{\theta_0+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$（为防止$2\pi$处不连续突变，允许它为无穷值函数）

$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2)$ 集合相加

$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2)$

注意. $A+A=\{a+b \mid a,b\in A\}$ 与 $2A=\{2a \mid a\in A\}$ 一般不同

例. $z=i$、$\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(z)\neq 2\mathrm{Arg}(z)$

定义 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$\downarrow$

Taylor展开 $=1+(i\theta)+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\cdots$

$e^{i\pi}+1=0$

$e^{i\theta}w=$ 把w沿逆时针旋转θ

例. • $\mathbb{C}$中直线方程 $ax+by+c=0$. $a,b,c\in\mathbb{R}$

$x=\frac{z+\bar{z}}{2}$. $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\frac{a-bi}{2}}_{B\in\mathbb{C}}z+\frac{a+bi}{2}\bar{z}+c=0$

$Bz+\overline{Bz}+C=0$

• 圆周方程 $|z-z_0|=R$ 即 $|z|^2-\bar{z}_0z-z_0\bar{z}+|z_0|^2-R^2=0$

命题. 若 $A,C\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{C}$, $|B|^2-AC>0$

则 $(*)$ $A|z|^2+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0$ 表示直线或者圆周. 并且

① 若$A=0$. 则为直线 ② 若$A\neq 0$. 则为圆周 $\left(R^2=\frac{|B|^2-AC}{A}\right.$, $A\to 0$时趋于直线$)$ □

定义 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. 于是 $\overline{\mathbb{C}}$ 与 S^2 一一对应

命题. ① z对应的点 $P\in S^2$ 为 $\left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$

② 若 $P=(x_1,x_2,x_3)\in S^2$. 则对应的复数为 $z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$

③ 在这种球极投影下, $S^2\setminus N \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$

不过N的圆周 $\longleftrightarrow$ 圆周

过N的圆周 $\longleftrightarrow$ 直线

因此 $\mathbb{C}$上的圆周或直线统称为广义圆周

(Exercise)

Lec 2 复数的性质

复数列$\{z_n\}$的极限

$z_n = x_n + iy_n$. 称 ① $z_n \to z_0 \in \mathbb{C}$, 若 $\forall \varepsilon>0$. $\exists N>0$. 当$n>N$时均有$|z_n - z_0| < \varepsilon$

或若 ② $z_0 \to \infty$, 若$\forall M>0$. $\exists N>0$. 当$n>N$时均有$|z| > M$.

设$a \in \mathbb{C}$, $r>0$, 称 ① $B(a,r) = \{z: |z-a|<r\}$为a的r-邻域

② 无穷远处的r-邻域 $B(\infty, r) = \{z: |z|>r\}$

① $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \iff \forall \varepsilon>0$及所有充分大的$n$. $z_n \in B(z_0, r)$

② $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \iff \forall r>0$及所有充分大的$n$. $z_n \in B(\infty, r)$

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \iff \begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \end{cases}$

称$\{z_n\} \in \mathbb{C}$为Cauchy列. 若$\forall \varepsilon>0$. $\exists N>0$. 当$n, m>N$. 均有$|z_n - z_0| < \varepsilon$

$\{z_n\}$为Cauchy列 $\iff \{x_n\}$. $\{y_n\}$均为Cauchy列 $\iff \{x_n\}$. $\{y_n\}$均收敛 $\iff \{z_n\}$收敛

命题. $\mathbb{C}$是完备的 □

例. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$不是完备的

$\mathbb{C}$中的开集, 闭集, 紧集

设$E \subset \mathbb{C}$. $\mathbb{C}$按E分为内点, 外点, 边界点三大类

$\{\frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}\}$为离散集. 无内点. 无外点. 点均为边界点 $0 \notin E$是边界点

极限点: 考虑E, $a \in \mathbb{C}$, $\forall r>0$, 若$(B(a,r) \setminus \{a\}) \cap E \neq 0$, 称$a$为$E$的极限点 (不一定在$E$中)

极限点的集合E'称为E的导集, $E \setminus E'$称为E的孤立点

E称为开集, 若$E = E^\circ$. E称为闭集, 若E^c为开集

定义E的闭包$\overline{E} = E \cup E'$. $\overline{E}$为包含E的最小闭集

命题: ① $a \in \overline{E} \iff \forall r>0$. 有$B(a,r) \cap E \neq \phi$

② $(\overline{E})^c = (E^c)^\circ$, $\overline{(E^c)} = (E^\circ)^c$ □

命题: ① E°是开集. ∂E, $\overline{E}$是闭集 (ϕ, $\mathbb{C}$既开又闭)

② E是闭集 $\iff E = \overline{E} \iff E' \subset E$ □

E称为紧集: 若E的任意开覆盖均存在有限子覆盖

① 开集的(无穷)并还是开集，无穷交不一定是开集

② 闭集的(无穷交)是闭集，无穷并不一定是闭集

定理(Heine-Borel) ① $E\subset\mathbb{C}$为紧集 $\Leftrightarrow$ E是$\mathbb{C}$中的有界闭集

② $E\subset\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，$E$是紧集 $\Leftrightarrow$ E是闭集

注：① 只对有限维空间成立

命题：设E为紧集，F为闭集，$E\cap F=\phi$，则$d(E,F)>0$

定理(Bolzano-Weierstrass) 若在$\mathbb{C}$中无穷点列，则$\{z_n\}$一定有极限点(包括∞)

连续曲线与域(region)

$\mathbb{C}$中曲线$\gamma(t)$，$t\in[a,b]$ $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$，起点$\gamma(a)$，终点$\gamma(b)$

① 若$\gamma(a)=\gamma(b)$，称γ为闭曲线

② 若$\gamma(t_1)=\gamma(t_2)\Rightarrow t_1=t_2$ 称γ为简单曲线

③ 若$\gamma(a)=\gamma(b)$，且无其他自交点，称γ为简单(Jordan)闭曲线

划分P：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，$|P|=\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|$

称$\gamma(t)$可求长，若$\sup|P|<+\infty$，此时定义$|\gamma(t)|=\sup|P|$.(不要求γ光滑)

定义. E称为连通：若E不能表示为两个非空开集(闭集)无交并

定理. 开集E连通 $\Leftrightarrow$ E中任意两点可由E中曲线连接

定理(Jordan) 任一Jordan曲线$\gamma(t)$将$\mathbb{C}$划分成两个域(连通开集)，一个是有界内部，一个是无界外部，$\gamma(t)$是公共边界

定义(单连通) 若域E中的Jordan闭曲线围成区域内部仍在E中，称E为单连通的.

E n-连通：若E由n条$\begin{cases}\text{Jordan闭曲线}\\\text{简单曲线}\\\text{一个点}\end{cases}$围成

Lec 3

定义(连续) $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ s.t. $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$, $\forall z\in B(z_0,\delta)$

定义(可导) $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处可导. 如果 $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在, 该极限记为 $f'(z_0)$

定义(可微) $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处可微, 如果 $\Delta f = f(z)-f(z_0) = A(z_0)\underset{\overset{\parallel}{z-z_0}}{\Delta z} + \rho(\Delta z)$, 其中 $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0$

(可微 $\Leftrightarrow$ 可导) $\Rightarrow$ 连续

例. $f(z)=\bar{z}$. $z_0=0$. $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\bar{z}}{z}$

① 取 $z=a\in\mathbb{R}$. $\lim_{a\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=1$

② 取 $z=bi\in i\mathbb{R}$. $\lim_{b\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=-1$

$\therefore \lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{f(z)}$ 不存在

$f=u+iv=\mathrm{Re}(f)+i\,\mathrm{Im}(f)$

设 f 在 z_0 处可微. 不妨设 $z_0=0$, $f(z_0)=0$. 于是 $\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}$ 存在

$f(z)=f'(0)z+\rho(z)$. 其中 $\lim_{z\to 0}\frac{\rho(z)}{z}=0$

$\parallel$

$(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial u}{\partial y}y)+i(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial v}{\partial y}y)+o(|z|) = (\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})x+(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y})y+o(|z|)$

(可导 ~~推出~~ 实部和虚部均可微(实可微))

$= (\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y})z + (\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y})\bar{z}+o(|z|)$

令 $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})$ $\quad = \frac{\partial f}{\partial z}z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{z}+o(|z|)$

$\frac{f(z)}{z} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}}_{\text{固定函数}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\bar{z}}{z} + \underbrace{\frac{o(|z|)}{z}}_{\downarrow\, 0}$ 极限存在 $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$

$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0\\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$ Cauchy-Riemann 条件

$\therefore f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 在 z_0 可微 $\Leftrightarrow$ f 在 z_0 实可微且满足 Cauchy-Riemann 条件

定义 ① 称 $f(z)$ 在区域 D 中全纯, 若 f 在 D 中每点可导

② 称 $f(z)$ 在 z_0 点全纯, 若 f 在 z_0 某个邻域 $B(z_0,r)$ 上全纯

例. $f(z)=(\mathrm{Re}\,z)^2$ 在 $z=0$ 处可导，但不全纯（水平方向、竖直方向极限不同）

Cauchy-Riemann方程：提升正则性

$f=u+iv$ 在D上全纯 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$

$\cap$

$C^2(\Omega)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta u=0 \Rightarrow u \text{ 是调和函数} \Rightarrow u \text{ 是光滑的}$$

同理 $\Delta v=0$（f 乘上 i，实虚部互换）

Δ：Laplace 算子

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}u\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)=\frac{1}{4}\Delta u$$

$$\Rightarrow \Delta=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar z}=4\frac{\partial^2}{\partial \bar z\partial z}$$

Lec 4

$(x,y) \xmapsto{\varphi} (u,v) \qquad (x_0,y_0) \longmapsto (u_0,v_0)$

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)+\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+o(|(x-x_0,y-y_0)|)$$

$$v(x,y)=v(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+o(|(x-x_0,y-y_0)|)$$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}}_{D\varphi \longrightarrow \text{切映射}}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+o\left(\sqrt{|\Delta x|^2+|\Delta y|^2}\right)$$

令 $\begin{cases} a=\frac{\partial u}{\partial x} \\ b=\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$. $D\varphi=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$D\varphi$ 是旋转和放缩的组合

角度 θ 　倍数为 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}-i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]+i\left[\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right)$$

$\underline{\text{C-R方程}}$ $a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\,e^{i\theta}=|f'(z_0)|\,e^{i\operatorname{Arg}(f'(z_0))}$

导数的几何意义

设 $\gamma(t)$ 为一条光滑曲线，$\gamma(0)=z_0$，$\sigma(z)=f(\gamma(t))=u(\gamma(t))+iv(\gamma(t))$，则 $\sigma(t)$ 为经过 $w_0=(u_0,v_0)$ 的曲线 .

在 t_0 处，$\gamma_1(t)$ 的切线与 x 轴正向夹角 $\operatorname{Arg}\gamma_1'(0)$

$\gamma_2(t)$ 　　'' 　　$\operatorname{Arg}\gamma_2'(0)$

从 $\gamma_1(t)$ 到 $\gamma_2(t)$ 在 z_0 处转动的角度为 $\operatorname{Arg}\gamma_2'(0)-\operatorname{Arg}\gamma_1'(0)$

由于 $\sigma_i(t)=f(\gamma_i(t))$，$i=1,2$ 　$\sigma_i'(t)=f'(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)$

$\sigma_i'(t)$ 在 w_0 处与 x_0 轴夹角为 $\operatorname{Arg}\sigma_i'(0)=\operatorname{Arg}f'(z_0)+\operatorname{Arg}\gamma_i'(0)$

得到 $\underbrace{\operatorname{Arg}\sigma_2'(0)-\operatorname{Arg}\sigma_1'(0)}_{\text{曲线}\sigma_1\text{和}\sigma_2\text{之间的夹角}}=\underbrace{\operatorname{Arg}\gamma_2'(0)-\operatorname{Arg}\gamma_1'(0)}_{\text{曲线}\gamma_1\text{和}\gamma_2\text{之间的夹角}} \longrightarrow$ 角度保持（保角）

条件：$f'(z_0)\neq 0$，否则 $\operatorname{Arg}f'(z_0)$ 没有意义

定理：若 $f(z)$ 在区域 D 中全纯，则在 $f'(z)\neq 0$ 处 $f(z)$ 保角 $\square$

例 $f(z)=z^k$，$k\ge 1$ 整数

$\begin{cases}\gamma_1(t)=t \\ \gamma_2(t)=e^{i\theta}t\end{cases}$ $t\in[0,1]$　　$\begin{cases}\sigma_1(t)=t^k \\ \sigma_2(t)=e^{ik\theta}t^k\end{cases}$　k 给定，取 θ 充分小，$k\theta\ne\theta \pmod{2\pi}$

一般情况下 $f'(z_0)=0$，保角性质不满足（一定不保角）

为什么研究 z^k？全纯函数展开成 $f(z)-f(z_0)\overset{f'(z_0)=0}{=}\frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\cdots=\sum_{k=k_0}^{\infty}a_k(z-z_0)^{k}$，$a_{k_0}\ne 0$，$k_0\ge 2$

$$=a_{k_0}(z-z_0)^{k_0}\left\{1+\frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}}(z-z_0)+\cdots\right\}$$

$$=a_{k_0}(z-z_0)^{k_0}g(z),\quad g(z_0)=1$$

f 的改变角度的性质完全由 $(z-z_0)^k$ 决定，从而不保角。

f 在 D 上全纯，$z_0\in D$. $f'(z_0)=|f'(z_0)|e^{i\mathrm{Arg}(f'(z_0))}$

$\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|$ 是放缩比率（伸缩率）

Green公式

定理　若函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上连续，且有连续的一阶偏导数，则有

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial\Omega}Pdx+Qdy$$

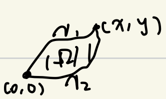
（外微分：$d(Pdx+Qdy)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy$

$$=\frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy.$$

外微分：统一性. Green公式 $\rightsquigarrow$ 一般维数Stokes公式也对

假设 P,Q 在 Ω 上满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$，则 $\int_{\partial\Omega}Pdx+Qdy=0$

如果 P,Q 在整个 $\mathbb{C}$ 上定义且满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$



$\int_{\gamma_1-\gamma_2}Pdx+Qdy=0 \Rightarrow \int_{\gamma_1}Pdx+Qdy=\int_{\gamma_2}Pdx+Qdy$

$\Rightarrow$ 可以定义函数 $F(x,y)=\int_{\gamma_1}Pdx+Qdy$

同样的方法依然有效，如果 Ω 是单连通的（其中 γ 是连结 (x_0,y_0) 到 (x,y) 的分段光滑曲线）

回到调和函数. u 调和 $\Leftrightarrow \Delta u=0$

条件：设 Ω 连通，$u:\Omega\to\mathbb{R}$ 是调和函数.

令 $P=-\frac{\partial u}{\partial y}$　$Q=\frac{\partial u}{\partial x}$.

则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

令 $v(x,y)=\int_\gamma Pdx+Qdy$ 是 Ω 上良定义的函数

$\frac{\partial v}{\partial x}=P=-\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=Q=\frac{\partial u}{\partial x}$ ，v 是 u 的共轭调和函数

令 $f=u+iv$. 则 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$. f 是全纯的

$\rightsquigarrow$ 在单连通区域上，调和函数一定可以当成全纯函数的实部

实变函数中导数的运算法则在这里依然成立

若 Ω 不是单连通，则没有共轭调和函数 .

$\log|z|=\log r$.　$\log|z|=\frac{1}{2}(\log z+\log\bar{z})$

$\frac{\partial \log|z|}{\partial z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\bar{z}}\cdot\underbrace{\frac{\partial\bar{z}}{\partial z}}_{=0}$

$\frac{\partial\log|z|}{\partial\bar{z}\partial z}=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial\bar{z}}=0$　（用复变方法计算更快）

$\Rightarrow\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log|z|=0$　$\Rightarrow\log r$ 是调和函数（在 $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上）

$C_n r^{2-n}$. $n>2$ Green函数

初等全纯函数

指数函数　$z=x+iy$. 定义 $e^z=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.　$|e^z|=e^x>0$

$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

$e^{z+2\pi i}=e^z e^{2\pi i}=e^z$　. e^z 以 $2\pi i$ 为周期

性质. e^z 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，且 $(e^z)'=e^z$

证：$e^z=\underbrace{e^x\cos y}_{u}+i\underbrace{e^x\sin y}_{v}$

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{array}\right\}\Rightarrow$ C-R方程在每点满足 $\Rightarrow e^z$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯

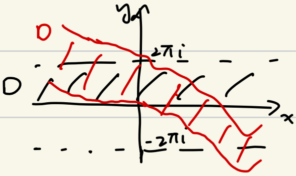
$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^z$

定义：① 若 $z_1 \neq z_2$ 就有 $f(z_1) \neq f(z_2)$，则称 f 为单叶函数；

② 若 f 在区域 Ω 中单叶，则称 Ω 为 f 的单叶域

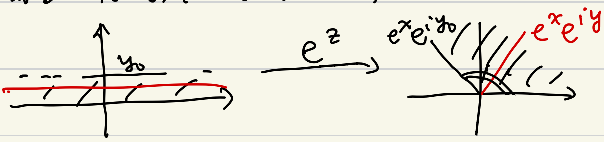
设 $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1 - z_2} = 1 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i$，$k \in \mathbb{Z}$

故若区域 D 中任两点差不为 $2\pi i$ 的整数倍，则 D 为 e^z 的单叶域



$e^z = re^{i\theta} = e^x e^{iy}$，$r = e^x$，$\theta = y + 2k\pi$

若 $D = \{(x,y) \mid 0 < y < y_0 < 2\pi\}$



对数函数　若 $e^{w(z)} = z$，则 $w(z)$ 称为 z 的对数，记为 $w(z) = \log(z)$

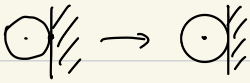
令 $z = re^{i\theta}$，$w(z) = u(z) + iv(z)$

$re^{i\theta} = e^u e^{iv} \Leftrightarrow \begin{cases} r = e^u \\ \theta = v + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \log r = \log|z| \\ v = \theta + 2k\pi = \arg z + 2k\pi \end{cases}$

Lec 5

例. f在$B(0,1)\cup\{1\}$上全纯, 且 $f(B(0,1))\subset B(0,1)$, $f(1)=1$　　证: $f'(1)\geq 0$

f' 把切空间映到切空间. $f'(1)$为旋转+放缩 $\Rightarrow$ 不能旋转



证: f在$z=1$处全纯, 在$z=1$附近有

$f(z)=f(1)+f'(1)(z-1)+o(|z-1|)$

$\because |z|<1$ $\therefore$ $|1+f'(1)(z-1)+o(|z-1|)|<1$

$\Leftrightarrow (1+f'(1)(z-1)+o(|z-1|))(1+\overline{f'(1)(z-1)}+\overline{o(|z-1|)})<1$

$\Leftrightarrow 1+2\mathrm{Re}\{f'(1)(z-1)\}+o(|z-1|)<1$

令 $z-1=re^{i\theta}$, $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(f'(1)\,r e^{i\theta})+o(r)<0$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(f'(1)e^{i\theta})+o(1)<0 \xRightarrow{r\to 0} \mathrm{Re}(f'(1)e^{i\theta})\leq 0$. $\forall\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$

若 $f'(1)=0$ 已证. 设 $f'(1)\neq 0$. 令 $f'(1)=|f'(1)|e^{i\alpha}$. $\alpha=\arg f'(1)$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(|f'(1)|e^{i(\theta+\alpha)})\leq 0 \Rightarrow \theta+\alpha\in[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]$. $\forall\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$

$\Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow f'(1)=|f'(1)|\geq 0$

对数函数.

符号: ① 若$x>0$, 则 $\log x$ 表示正实数的实对数值

② $\log z$ 是多值函数

③ $(\log z)_k$ 表示 $\log z+i(\arg z+2k\pi)$. $\arg z\in[0,2\pi)$

性质: $(\log z)_k$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上不是连续函数

问题: 如何找区域 D, 使$(\log z)_k$为连续函数?

〃　　$\log R(z)$　　〃　, 这里 $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 是有理函数?

定义: ① 设$F(z)$为多值函数, 定义在C上, 初值为$f(z_0)$ 当z_0沿曲线C连续变动到z_1时

$f(z_0)$连续变动到唯一确定的值$f(z_1)$. 则称$F(z)$在C上的改变量为

$\Delta_C F(z)=f(z_1)-f(z_0)$ 且 $\Delta_C(F_1(z)\pm F_2(z))=\Delta_C F_1(z)\pm\Delta_C F_2(z)$

② 若 $\Delta_C F(z)$ 的值仅依赖于 $z_0, z_1, f(z_0)$，不依赖于 C 的选取，则称 $F(z)$ 在 Ω 中有单值分支，

这分支在任何点 z 的值为 $f(z)=f(z_0)+\Delta_C F(z)$. C 为 Ω 中连结 z_0 到 z_1 的曲线

⇝ 要判断 $F(z)$ 在区域 Ω 上是否有单值分支，有

命题. $F(z)$ 在 Ω 上有单值分支 $\Longleftrightarrow$ $\forall\,\Omega$ 中任意简单闭曲线 C 有 $\Delta_C F(z)=0$，此时称 Ω 为 $F(z)$ 的一个单值域

例. $F(z)=\log z$, $\Omega=\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$

注意. Ω 一般不唯一，通常我们要找极大单值域 Ω，即不存在 Ω' 使得 $\Omega\subsetneq\Omega'$，$F(z)$ 在 Ω' 上有单值分支.

③ 寻常点. 设 $z_0\in\Omega$，若存在 z_0 的一个邻域使得多值函数 $F(z)$ 在此邻域中有单值分支，则称该点为寻常点

支点（枝点）设 $F(z)$ 在 z_0 ∞ $\Omega\cap B(0,R)^c$ (R充分大) $\in\Omega$ 的某个充分小去心邻域中有定义，且每点都是寻常点，又以 z_0 为中心的任意小的去心邻域中都存在围绕 z_0 的简单闭曲线 C，使得 $\Delta_C F(z)\neq 0$，则称 z_0 为 $F(z)$ 的支点

例. 求 $\mathrm{Arg}(z-a)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上所有枝点

解：① $z=a$ 是枝点

② $a\neq z\in\mathbb{C}$ 是寻常点

③ $z=\infty$. 作曲线 $C=\{z\mid |z|=R+1\}\subset B(\infty,R)$，则 $\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a)=\pm 2\pi\neq 0$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Arg}(z-a)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上所有枝点为 $z=0,\infty$

说明：① 在枝点定义中，闭曲线要在"充分小邻域中选取，否则在内部包含枝点的闭曲线上，$F(z)$ 的改变量可以为0.

例：$F(z)=\log\frac{z-a}{z-b}$, $a\neq b$

$=\log(z-a)-\log(z-b)$

$\Delta_C F(z)=0$

② 在枝点定义中，不能规定以 z_0 为中心的任意小的空心邻域中围绕 z_0 的所有简单闭曲线，都有

$\Delta_C F(z)=0$

例：$F(z)=\sqrt{z}\sin\frac{1}{z}$，$z=0,\infty$ 枝点 $\sqrt{z}=|z|e^{\frac{i}{2}(\arg z+2k\pi)}$ $\sin\theta \overset{def}{=} \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

$C=\{z \mid |z|=\frac{1}{n\pi}\}$. $\Delta_C F(z)=0$

③ 在枝点的定义中，要规定 z 的充分小的空心邻域中都是"寻常点"

例：$F(z)=\sqrt{\sin\frac{1}{z}}$.

验证 $z=\frac{1}{n\pi}$ 是枝点

但 $z=0$ 不是枝点，它是枝点的极限点.

第一次习题课

例一 设 D 为 $\mathbb{C}$ 中单连通区域，$f(x)\neq 0$ 是 D 中全纯函数且 $f(z)=f(x,y)\in C^2(D)$，

则存在 D 中全纯函数 s.t $e^{g(z)}=f(z)$

证：（避免讨论多值函数 $\mathrm{Ln} f(z)$ ）

由作业题，$u=\ln|f(z)|$ 调和．∴存在 D 上全纯函数 $h(z)$ 使 $h=u+iv$.

$\left|\dfrac{e^{h(z)}}{f(z)}\right|\equiv 1 \overset{\text{作业题}}{\Longrightarrow} \dfrac{e^{h(z)}}{f(z)}=e^{i\theta}$ 常数，令 $g(z)=h(z)-i\theta$ 即可 $\square$

注意：① 单连通区域中，由于 C-R 方程，v 被 u 在相差常数意义下唯一确定

② $f=u+iv$ 的存在性中，定义域 D 单连通这个条件不能去掉．

反例：考虑 $B(0,1)\setminus\{0\}$ 中 $u=\ln|z|$，则不存在全纯函数 f s.t. $\mathrm{Re} f=u$.

反证：若 $\exists v$ s.t $u+iv$ 全纯，则 $\left|\dfrac{e^{f(z)}}{z}\right|=\left|\dfrac{e^{u(z)}}{z}\right|=1 \overset{\text{作业题}}{\Longrightarrow} e^{f(z)}=e^{i\theta}z$ （θ 固定）

∴ $v\in\theta+\mathrm{Arg}\, z$．由于 v 连续．绕一圈后 v 增加 2π．不可能 $\square$

Lec 6

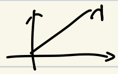
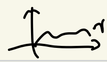
例. 求Log(z-a)在$\overline{\mathbb{C}}$上所有枝点和单值域　　　注: Log 多值函数，log 单值函数(分枝)

解: $\Delta_C \mathrm{Log}(z-a) = \Delta_C(\log|z-a| + i\,\mathrm{Arg}(z-a))$

$= i\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) = \begin{cases} 0, & 若a在C外部 \\ \pm 2\pi i & 若a在C内部 \end{cases}$

$\therefore z = 0, \infty$ 是枝点

$D = \mathbb{C}\setminus[a,+\infty)$ 是单值域

单值域的选取不唯一　如   $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 是单值域

说明: 单值域不是不包含枝点的区域，是不包含改变量不为0的简单闭曲线的区域

例. $F(z) = \mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b}$, $a \neq b$, 求$\mathbb{C}$上所有枝点和一个单值域.

解: $F(z) = \mathrm{Log}(z-a) - \mathrm{Log}(z-b)$　取C是避开a, b的简单闭曲线

$\Delta_C F(z) = i(\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) - \Delta_C \mathrm{Arg}(z-b))$

$\underline{\underline{取C逆时针转}} \begin{cases} 2\pi i, & 若C仅包含a \quad (C_1) \\ -2\pi i, & 若C仅包含b \quad (C_2) \\ 0, & 若C包含a和b \quad (C_3) \\ 0, & 若C不包含a, b \quad (C_4) \end{cases}$

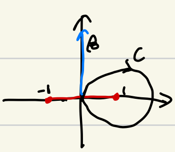
$\Rightarrow$ a, b是所有的枝点

连接a, b并去掉这条线段　则 $D = \mathbb{C}\setminus[a,b]$ 为单值域

例: $F(z) = \mathrm{Log}\frac{z-1}{z+1}$, $D = \mathbb{C}\setminus[-1,1]$, 记$f(z)$为$F(z)$在D中的单值分枝.

已知 $f(0_上) = \pi i$. 求 $f(0_下)$, $f(\infty)$

解:



$f(0_上) = \lim_{\substack{z\to 0 \\ \mathrm{Im} z > 0}} f(z)$

$F(z) = \log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + i(\mathrm{Arg}(z-1) - \mathrm{Arg}(z+1))$

$f(0_下) - f(0_上) = \Delta_C F(z) = \Delta_C F(z)$

$= \Delta_C(\mathrm{Log}\frac{z-1}{z+1}) = i\Delta_C(\mathrm{Arg}(z-1) - \mathrm{Arg}(z+1))$

$= i(-2\pi - 0) = -2\pi i \quad \Rightarrow f(0_下) = -\pi i$

$f(\infty) - f(0_上) = \Delta_\beta F(z) = i\Delta_\beta(\mathrm{Arg}(z-1) - \mathrm{Arg}(z+1))$

$= i(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = -\pi i \quad \Rightarrow f(\infty) = 0$

验算：β 取其他连续到 ∞ 的射线，结果相同

例. $F(z)=\mathrm{Log}\dfrac{z^2(z+1)}{(z-1)^3(z+2)}$ 枝点、单值域

解：0 枝点 $F(z)=2\mathrm{Log}\,z+\mathrm{Log}(z+1)-3\mathrm{Log}(z-1)-\mathrm{Log}(z+2)$

$\Delta_C F(z)=i\{2\Delta_C \mathrm{Arg}\,z+\Delta_C \mathrm{Arg}(z+1)-3\Delta_C \mathrm{Arg}(z-1)-\Delta_C \mathrm{Arg}(z+2)\}$

枝点 $z=-2,-1,0,1,\infty$

单值域（极大）：$D=\mathbb{C}\setminus\{[-2,-1]\cup[0,+\infty)\}$ 是单值域

若 $D'\supsetneq D$，则 $\exists y\in[-2,-1]\cup[0,+\infty)$ s.t. $y\in D'$

$\exists\,\delta$ s.t. $B(y,\delta)\subset D'$（开集），可找到一条曲线 $\cdots$，矛盾

（极大）单值域不唯一，如 $D=\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,-2]\cup[-1,1]\}$ 是极大单值域

例. $F(z)=\mathrm{Log}\,R(z)$，$R(z)=\prod\limits_{k=1}^{m}(z-a_i)^{n_k}$，$k\in\mathbb{Z}$

解：C 为避开 $\{a_k\}$ 的简单闭曲线，定义 $\Lambda=\{k\,|\,a_k$ 在 C 的内部$\}$

$F(z)=\sum\limits_k n_k\mathrm{Log}(z-a_k)\Rightarrow\Delta_C F(z)=\sum\limits_k n_k\Delta_C\mathrm{Log}(z-a_k)=\sum\limits_{k\in\Lambda}n_k 2\pi i=2\pi i\sum\limits_{k\in\Lambda}n_k$

$\Delta_C F(z)=0\Leftrightarrow$ 包含在 C 内部的全 a_k 的指数 n_k 之和为 0

∞ 不是枝点 $\Leftrightarrow$ 对任意充分大的 C，$\Delta_C F(z)=0\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{m}n_k=0$

幂函数 $w=z^\alpha$

① 若 $\alpha=n\in\mathbb{N}$，则 $(z^n)'=nz^{n-1}\Rightarrow z^\alpha$ 是 $\mathbb{C}$ 上全纯函数

② 若 $\alpha=\frac{1}{n}$，$n\in\mathbb{N}$，则 $z^\alpha=w\Leftrightarrow\mathrm{Log}\,w=\alpha\,\mathrm{Log}\,z$

$\Leftrightarrow w=e^{\frac{1}{n}(\log|z|+i\mathrm{Arg}\,z)}$

$=|z|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i}{n}(\arg z+2k\pi)}$，$k=0,1,\cdots,n-1$

故 $w=z^{\frac{1}{n}}$ 有 n 个分枝

③ $\alpha\in\mathbb{C}$，$\alpha=a+bi$，$a,b\in\mathbb{R}$，

$w=(|z|e^{i\mathrm{Arg}\,z})^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Log}\,z}=e^{(a+ib)(\log|z|+i\mathrm{Arg}\,z)}$

$=e^{a\log|z|-b\mathrm{Arg}\,z}\cdot e^{i(b\log|z|+a\mathrm{Arg}\,z)}$

若 $b=0, a=n$, $w=z^\alpha=z^n$ 单值函数

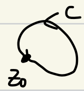
$b=0, a=\frac{p}{q}$ (p,q 互素) $w=|z|^{\frac{p}{q}}e^{i\frac{p}{q}\mathrm{Arg}z}$，故有 q 个分枝

$b=0, a\in\mathbb{Q}^c$, $w=|z|^a e^{ia\arg z}e^{ia2k\pi}$ 有无穷多值

若 $b\neq0$, $|w|=e^{a\log|z|-b(\arg z+2k\pi)}$ $k\in\mathbb{Z}$. 故 $|w|$ 有无穷多值 $\Rightarrow$ w 为无穷多值函数

例. 若 $F(z)=\sqrt[n]{R(z)}=\{R(z)\}^{\frac{1}{n}}$. $R(z)=\prod_{j=1}^{m}(z-a_j)^{n_j}$. 求单值域

解: 取 C 是避开 $\{a_i\}$ 的简单闭曲线



$\Delta_C F(z)=\Delta_C\left(|R(z)|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i}{n}\mathrm{Arg}R(z)}\right)$

$=|R(z_0)|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i}{n}(\mathrm{Arg}R(z_0)+\Delta_C\mathrm{Arg}R(z))}-|R(z_0)|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i}{n}\mathrm{Arg}R(z_0)}$

$=|R(z_0)|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i}{n}\mathrm{Arg}R(z_0)}\left[e^{\frac{i}{n}\Delta_C\mathrm{Arg}R(z)}-1\right]$

$\Delta_C F(z)=0 \iff e^{\frac{i}{n}\Delta_C\mathrm{Arg}R(z)}=1 \iff \frac{i}{n}\Delta_C\mathrm{Arg}R(z)=2k\pi i \iff \Delta_C\mathrm{Arg}R(z)=2nk\pi$

$\Lambda=\{j\mid a_j$ 在 C 内部$\}$ $\quad\Delta_C\mathrm{Arg}R(z)=\sum_{j\in\Lambda}2\pi n_j$

所以 $\Delta_C F(z)=0 \iff \sum_{j\in\Lambda}n_j$ 是 n 的整数倍

∞ 不是枝点 $\iff \sum_{j=1}^{m}n_j$ 是 n 的整数倍

例. $F(z)=\sqrt{z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}$ 枝点、单值域

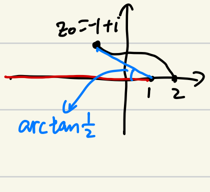
解: 枝点: 0、1、2、3、4、∞

单值域: $D=\mathbb{C}\setminus\{[0,1]\cup[2,3]\cup[4,+\infty)\}$

例. 已知 $f(z)=\sqrt[3]{z-1}$, 求 $f(z)$ 的枝点. 若单值域 $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,1]$, 取点 $z=2$ 取正值的分枝 $f(z)$ 在 $z_0=-1+i$ 的值

解: $F(z)=|z-1|^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i}{3}\mathrm{Arg}(z-1)}$

$f(2)=e^{\frac{i}{3}\mathrm{Arg}(z-1)}>0 \iff \mathrm{Arg}(z-1)|_{z=2}$ 取 6π 的整数倍



C 为连结 2 到 $z_0=-1+i$ 的曲线

$f(z_0)=|z_0-1|^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i}{3}\mathrm{Arg}(z-1)|_{z=z_0}}=|z_0-1|^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i}{3}\left(\mathrm{Arg}(z-1)|_{z=2}+\Delta_C\mathrm{Arg}(z-1)\right)}$

$=5^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i}{3}\Delta_C\mathrm{Arg}(z-1)}=5^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i}{3}(\pi-\arctan\frac{1}{2})}$

三角函数　　θ 实数，$\left.\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$

定义：$\begin{cases} \sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, & z\in\mathbb{C} \\ \cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, & z\in\mathbb{C} \end{cases}$

① $\sin z$, $\cos z$ 以 2π 为周期

② $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

③ $|\sin z|$, $|\cos z|$ 是无界的

$z = iy$, $y>0$, $y\to+\infty$

$\cos z = \dfrac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2} = \dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2} \to \infty$

同理可证 $\sin z$ 无界

Lec7

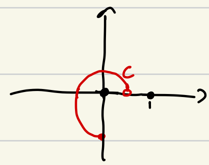
例. 设 $f(z)=\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}\cdot\frac{1}{z+1}$. 试确定 f 在 $[0,1]$ 上岸取正值的单值全纯分支 $f_0(z)$, 并计算 $f_0(-2)$.

解: 令 $\varphi(z)=\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}=\{(1-z)^3z^{-1}\}^{\frac{1}{2}}$, f 的多值性完全由 φ 决定

可能枝点 $z=1,\ 0,\ \infty$

指数 $3,\ -1$ $\qquad (3-1)/2$ 整数

$\therefore D=\mathbb{C}\setminus[0,1]$ 为 φ 的单值域 (自然也是 f 的单值域)



$$\operatorname{Arg}\varphi(z)\big|_{z=-i}=\operatorname{Arg}\varphi(z)\big|_{z=x_0\text{上}}+\Delta_c\operatorname{Arg}\varphi(z)$$

$$=0+\frac{1}{2}\left(\Delta_c\operatorname{Arg}(1-z)^3-\Delta_c\operatorname{Arg}z\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{3}{8}\pi$$

$$\Rightarrow \varphi_0(-i)=|\varphi_0(-i)|e^{-\frac{3}{8}\pi i}=2^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{3}{8}\pi i}$$

$$\Rightarrow f_0(-i)=\sqrt[4]{2}\,e^{-\frac{i}{8}\pi}$$

反三角函数

$\theta=\operatorname{Arcsin}z$ 为 $z=\sin\theta$ 的反函数

$$z=\sin\theta\Rightarrow e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2z\Rightarrow(e^{i\theta})-(2iz)e^{i\theta}-1=0\Rightarrow e^{i\theta}=iz\pm\sqrt{1-z^2}$$

$$\Rightarrow\theta=\frac{1}{i}\operatorname{Log}(iz\pm\sqrt{1-z^2})$$

取 $\operatorname{Arcsin}z=\frac{1}{i}\operatorname{Log}(iz+\sqrt{1-z^2})$. (与 $z=t\in\mathbb{R}^+$ 很小的情况相容)

$\theta=\operatorname{Arccos}z$ 为 $z=\cos\theta$ 的反函数

$$z=\cos\theta\Leftrightarrow\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-z^2\Leftrightarrow\sin\theta=\sqrt{1-z^2}\Leftrightarrow\theta=\frac{1}{i}\operatorname{Log}(z+i\sqrt{1-z^2})$$

$\theta=\operatorname{Arctan}z$ 为 $z=\tan\theta$ 的反函数

$$\theta=\operatorname{Arctan}z\Leftrightarrow\tan\theta=z\Rightarrow1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}=1+z^2$$

$$\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{1}{z^2+1}\Rightarrow\theta=\operatorname{Arccos}\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}=\frac{1}{2i}\operatorname{Log}\frac{i-z}{i+z}$$

分式线性变换

定义 $w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$，$\Delta=ad-bc\neq 0$

若 $ad-bc=0$，则 $f(z)$ 为常数或无意义

特殊情形 ① $w=z+a=\frac{1\cdot z+a}{0\cdot z+1}$ 平移

② $(\theta\in\mathbb{R})$ $w=e^{i\theta}z=bz=\frac{b\cdot z+0}{0\cdot z+1}$ 旋转

③ $(r>0)$ $w=rz$ 伸缩

④ $w=\frac{1}{z}=\frac{0\cdot z+1}{1\cdot z+0}$ 反演

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\Delta=\det A=ad-bc\neq 0$

定理：任一分式线性变换都可以写成上述四种变换的复合

证：① $c=0\Rightarrow a\neq 0, d\neq 0$. $f(z)=\frac{az+b}{d}=a'z+b'$, $a'=\frac{a}{d}$, $b'=\frac{b}{d}$

设 $a'=r_0e^{i\theta_0}$. $z\xrightarrow[\text{伸缩}]{z_1=e^{i\theta_0}z}z_1\xrightarrow[\text{伸缩}]{z_2=r_0z_1}z_2\xrightarrow[\text{平移}]{w=z_2+b'}w=a'z+b'$

② $c\neq 0$. $f(z)=\frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bd-ad}{c^2z+dc}$ ... $\square$

定理：$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ 是从 $\overline{\mathbb{C}}$ 到 $\overline{\mathbb{C}}$ 的双射

证：$w=\frac{az+b}{cz+d}\Leftrightarrow cwz+dw=az+b\Leftrightarrow(cw-a)z=b-dw\Leftrightarrow z=\frac{dw-b}{-cw+a}$

记 $g(w)=\frac{dw-b}{-cw+a}$，则 g 是分式线性变换，且 $f\circ g=id$，$g\circ f=id$ （注意 0 和 ∞）

所以 $g=f^{-1}$. f 是双射 $\square$

不动点

平移	旋转	伸缩	反演
$z\mapsto z+a\ (a\neq 0)$	$z\mapsto e^{i\theta}z\ (\theta\neq 0)$	$z\mapsto rz\ (r\neq 1)$	
∞	$0,\infty$	$0,\infty$	± 1

$\rightsquigarrow$ 有没有 $f(z)$ 分式线性变换有 3 个不动点？

引理：若分式线性变换有 3 个不动点 $(\in\overline{\mathbb{C}})$，则必为恒等映射

证：$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=z\Rightarrow cz^2+(d-a)z+b=0$ 有 3 个不同解 $\Rightarrow c=d-a=b=0\Rightarrow f(z)=\frac{az}{d}=z$

定理：在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上给定互异的三点 z_1, z_2, z_3 以及 w_1, w_2, w_3，则存在唯一的分式线性变换

$w=f(z)$ 使得 $f(z_i)=w_i$，$i=1,2,3$

证：①存在性：构造 $g(z)=\frac{z-z_2}{z-z_3}\Big/\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$

则 $g(z_1)=1$，$g(z_2)=0$，$g(z_3)=\infty$

构造 $h(w)=\frac{w-w_2}{w-w_3}\Big/\frac{w_1-w_2}{w_1-w_2}$ …… $f=h^{-1}g$ 即可

②唯一性：由引理推出 □

第二次习题课

一般来说 $(z^s)^t \neq z^{st}$，但在一些特殊条件下，我们仍有

例1. ① 设 $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$s\in\mathbb{C}$. 当 $t\in\mathbb{Z}$ 时成立 $(z^s)^t = z^{st}$

② 设 $p,q\in\mathbb{Z}^+$，当 $(p,q)=1$ 时成立 $(\sqrt[q]{z})^p = \sqrt[q]{z^p}$

证：① $(z^s)^t = e^{t\operatorname{Log}(z^s)} = e^{t\operatorname{Log}(e^{s\operatorname{Log} z})} = e^{t\operatorname{Log}(e^{\mathrm{Re}(s\operatorname{Log} z)+\mathrm{Im}(s\operatorname{Log} z)+2ks\pi i})}$

$= e^{t(\mathrm{Re}(s\operatorname{Log} z+\mathrm{Im}(s\operatorname{Log} z)+2ks\pi i+2m\pi i)}$

$= e^{\mathrm{Re}(st\operatorname{Log} z)+\mathrm{Im}(st\operatorname{Log} z)+2k(st)\pi i}$

$= z^{st}$

② 记 $z=re^{i\theta}$，则 $(\sqrt[q]{z})^p = r^{\frac{p}{q}}\left(e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{q}}\right)^p = r^{\frac{p}{q}} e^{i\frac{p}{q}(\theta+2k\pi)}$，$k=0,1,\cdots,q-1$

$\sqrt[q]{z^p} = r^{\frac{p}{q}} e^{\frac{i(p\theta+2k\pi)}{q}}$，$k=0,1,\cdots,q-1$

二者辐角集合在 mod 2π 意义下相同 □

单叶映射面积

设全纯函数 $f(z): D\to G$ 为一一映射，即 $f(D)=G$，则 $|G| = \int_D \begin{vmatrix} u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix} dxdy \overset{C-R}{=\!=} \int_D |f'(z)|^2 dxdy$.

研究全纯函数的面积是理解其性质，尤其是展开级数性质的方法之一.

我们称全纯函数 $f: D\to G$ 保持面积，若 $\forall B(z,r)\subset D$ 有 $|f(B(z,r))| = |B(z,r)|$.

例：若 f 保面积，则 $f(z)=e^{i\theta}z+c$，即 f 只能为旋转＋平移.

证：Claim: f 全纯，则 f' 也全纯（后续课程中会证明），从而只需证 $|f'(z)|\equiv 1$.

特别地，$|f'(z)|$ 连续. 若 $|f'(z_0)|\neq 1$，取 z_0 的小邻域 $B(z_0,r)$，$|f'(z)|$ 在其上大于1或小于1

$\Rightarrow \int_{B(z_0,r)}|f'(z)|^2dxdy \neq |B(z_0,r)|$，矛盾 □

例：令 $f(z)=e^z$，求 $|f(B(0,1))|$.

解：$|f(B(0,1))| = \int_{B(0,1)}|f'(z)|^2dxdy = \int_{B(0,1)}|e^z|^2dxdy$

$\overset{z=re^{i\theta}}{=\!=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\, e^z\overline{e^z}\, dr\, d\theta$

$\overset{e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\text{（以后会证）}}{=\!=\!=} \int_0^1 r\,dr\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n e^{in\theta}}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{r^m e^{im\theta}}{m!}\right)d\theta$

$= \int_0^1 r\,dr\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{(n!)^2}d\theta$

$= 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\int_0^1 r^{2n+1}dr$

$= \pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$

Lec 8

$w = h^{-1}(g(z)) = f(z)$ $h(w) = g(z)$

$$\frac{w-w_2}{w-w_3} \Big/ \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} \Big/ \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

定义：交比 $(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0-z_2}{z_0-z_3} \Big/ \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$

$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$

$(f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = (z, z_1, z_2, z_3)$ 分式线性变换下交比不变

引理：分式线性变换将圆周(圆和直线)映为圆周.

证：只需验证反演满足此性质.

设 γ 为一圆周. 满足方程 $Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$, $A, C \in \mathbb{R}$, $|B|^2 - AC > 0$

$w = \frac{1}{z}$. $A\frac{1}{w\bar{w}} + \bar{B}\frac{1}{w} + B\cdot\frac{1}{\bar{w}} + C = 0$

$A + \bar{B}\bar{w} + Bw + Cw\bar{w} = 0$ 还是圆周(我们忽略了一些特殊情况) □

定理 四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆(广义圆周) $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$ i.e. 交比是实数

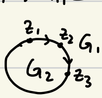
证：$f(z) := (z, z_2, z_3, z_4)$

$f(z_2) = 1$. $f(z_3) = 0$. $f(z_4) = \infty$, 又 f 把 z_2, z_3, z_4 确定的圆周映为圆周. $\therefore$ 映为实轴

由 f 为双射. $f(z_1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1$ 在 z_2, z_3, z_4 确定的圆周上 □

问题 如何确定 $\mathrm{Im}(z, z_2, z_3, z_4)$ 在圆内外的符号?

例.



$z_1 \to z_2 \to z_3$, 称 G_1 为左边, G_2 为右边

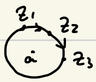
$z_3 \to z_2 \to z_1$. 称 G_2 为左边, G_1 为右边

定理. 设 z_1, z_2, z_3 为 $\bar{\mathbb{C}}$ 上圆周 γ 的有序三点. 则

$z_1 \to z_2 \to z_3$ 右边的点有 $\mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0$

$z_1 \to z_2 \to z_3$ 左边的点有 $\mathrm{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0$

证：



考虑 $(\overset{\text{圆心}}{a}, z_1, z_2, z_3)$. $\mathrm{Arg}((a, z_1, z_2, z_3)) = \mathrm{Arg}\left(\frac{a-z_2}{a-z_3}\right) - \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right)$

$= \theta_1 - \theta_2 = \theta_1 - \frac{\theta_1}{2} = \frac{\theta_1}{2} \in (0, \pi) \Rightarrow \mathrm{Im}(a, z_1, z_2, z_3) > 0$

$\therefore$ 圆内部 $\mathrm{Im} > 0 \Rightarrow$ 圆外部 $\mathrm{Im} < 0$, 直线容易 □

推论：若 $f: z_i \to w_i$，$i=1,2,3$ 是分式线性变换，则 f 将 $z_1 \to z_2 \to z_3$ 的左（右）侧分别映为 $w_1 \to w_2 \to w_3$ 的左（右）侧 $\square$

对称点

定义：称 z_1, z_2 关于圆周 $|z-a|=2$ 对称，若 $(z_2-a)\overline{(z_1-a)}=R^2$

定理：① z_1, z_2 关于 $Az\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+C=0$ 对称 $\Leftrightarrow$ $Az_1\bar{z_2}+B\bar{z_2}+\bar{B}z_1+C=0$

② 若分式线性变换将圆 γ_1 映为 γ_2，则该变换将 γ_1 的对称点映为 γ_2 的对称点、

证：① $A\neq 0$，z_1, z_2 关于圆对称 $\Leftrightarrow (z_2-a)(\bar{z_1}-\bar{a})=R^2 \Leftrightarrow z_2\bar{z_1}-z_2\bar{a}-a\bar{z_1}+|a|^2-R^2=0$

(*) 命题：设直线 L 的方程为 $\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$ $(B\neq 0, C\in\mathbb{R})$，则 z_1, z_2 关于 L 对称 $\Leftrightarrow$ $\bar{B}z_1+B\bar{z_2}+C=0$ (验证)；

② 只需考虑反演（想出这条定理的动机）

$w=\frac{1}{z}$，z_1, z_2 满足 $Az_1\bar{z_2}+B\bar{z_2}+\bar{B}z_1+C=0$

$\Leftrightarrow A\frac{1}{w_1}\frac{1}{\bar{w_2}}+B\frac{1}{\bar{w_2}}+\bar{B}\frac{1}{w_1}+C=0$

$\Leftrightarrow A+Bw_1+\bar{B}\bar{w_2}+Cw_1\bar{w_2}=0$

$\Leftrightarrow w_1, w_2$ 关于 γ_2：$Cw\bar{w}+Bw+\bar{B}\bar{w}+A=0$ 对称 $\square$

例. 求将上半平面 H 映为单位圆 D 的分式线性变换

解：设 f 把 z_0 映到 0，$\bar{z_0}$ 映到 ∞，令 $f(a)=b$，a, b 待定，则 $(a, z_0, \bar{z_0}) \longmapsto (b, 0, \infty)$

$\frac{z-z_0}{z-\bar{z_0}} \Big/ \frac{a-z_0}{a-\bar{z_0}} = \frac{w-0}{w-\infty} \Big/ \frac{b-0}{b-\infty} = \frac{w}{b} \Rightarrow w=\left(b\frac{a-\bar{z_0}}{a-z_0}\right)\frac{z-z_0}{z-\bar{z_0}}$

由于 f 把实轴映到单位圆，令 $z=x\in\mathbb{R}$，则 $\left|k\frac{x-z_0}{x-\bar{z_0}}\right|=1 \Rightarrow k=e^{i\theta}$

模为1

故 $w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z_0}}$，$\theta\in\mathbb{R}$，$z_0\in H$

取 $z_0=i$，$\theta=0$，$w=\frac{z-i}{z+i}$（Cayley 变换，泛函分析）

例. 求将单位圆映到单位圆，z_0 映到 0 的分式线性变换

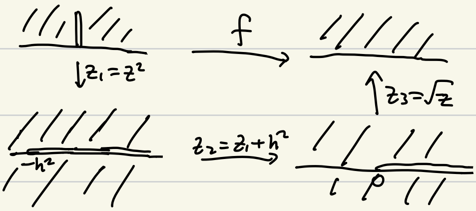
解：$(a, z_0, \frac{1}{\bar{z_0}}) \longmapsto (b, 0, \infty) \Rightarrow w=k\frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\bar{z_0}}}=k'\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}$

当 $|z|=1$ 时 $|w|=|k'|\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}\right|=|k'|\frac{|z-z_0|}{|z\bar{z}-\bar{z_0}z|}=|k'|=1 \Rightarrow w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}$.

Lec 9

例：求把 $D = \mathbb{H} \setminus [ih, 0]$ $(h>0)$ 映为 $\mathbb{H}$ 的变换

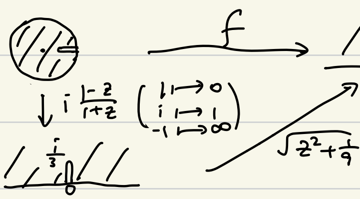
解：



$f = \sqrt{z^2 + h^2}$

例. 求将 $|z|<1$ 去掉 $[\frac{1}{3}, 1)$ 的区域映为上半平面的变换

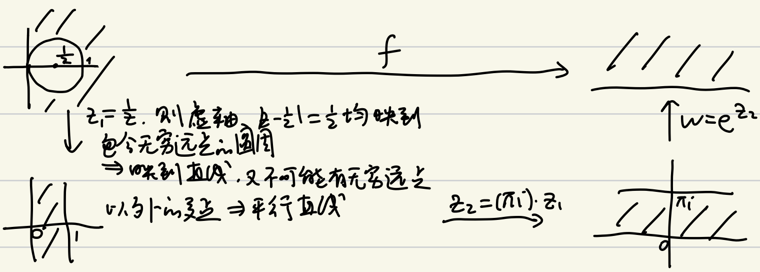
解：



$f = \sqrt{-\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2 + \frac{1}{9}}$

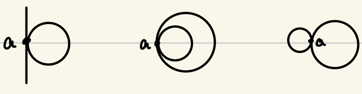
例：设 Ω 是 $|z-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ 与虚轴围成的无界区域，求 $\Omega \to \mathbb{H}$ 的映射

解：



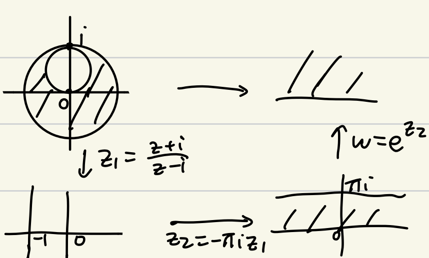
$f = e^{\frac{\pi i}{z}}$

说明. 若两圆相切，如



令 $w = \frac{cz+d}{z-a}$，则它将 a 变为 ∞，则把两圆变成两条平行直线.

例：变换如下区域到上半平面

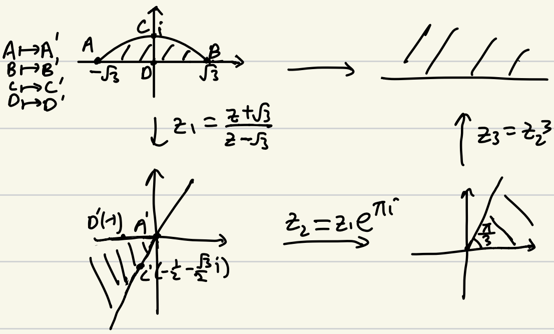


两圆相交

$w = c\,\dfrac{z-a}{z-b}$ 把包围区域映为扇形

$a \mapsto 0 \quad b \mapsto \infty$

例. 把如下区域变换到 $\mathbb{H}$



我们构造出来的映射都是同胚，把单连通区域映为上半平面

⇝ 是否所有单连通区域都可同胚到上半平面？（后面会证这是对的）

Rokovsky 函数 $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

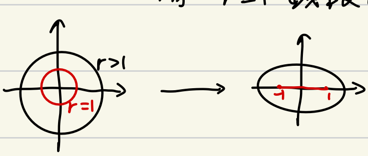
Ω 为单叶域 $\Leftrightarrow$ Ω 中不包含 $z_1 z_2 = 1$ 的两点 z_1, z_2

例：$\mathbb{D}$（单位开圆盘），$\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$，$\mathbb{H}$

映射性质 设 $z = re^{i\theta}$，$w = u + iv$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta = a\cos\theta \\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = b\sin\theta \end{cases}$$

圆周 $|z| = r$ 的像 $r \neq 1$ 椭圆；$r = 1$ 线段 $[-1,1]$



$\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1,1]$

$\mathbb{D} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1,1]$

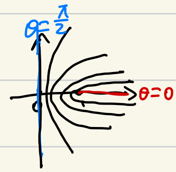
$\mathbb{D} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]$

$r > 1$：上半圆周映到上半椭圆；下半 → 下半

$r < 1$：上半圆周映到下半椭圆；下半 → 上半

射线 $\arg z=\theta$ 的像 ($\theta\notin\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi\}$，即 $\cos\theta\neq0$，$\sin\theta\neq0$)

$$\begin{cases}\dfrac{u}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\\[2mm] \dfrac{v}{\sin\theta}=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\end{cases}\Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2\theta}-\frac{v^2}{\sin^2\theta}=1$$ 双曲线



若 $\theta=0$，$\sin\theta=0\Rightarrow v=0$，$u=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\geq1$

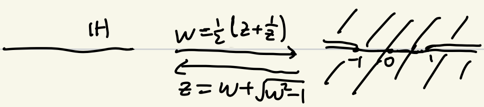
若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$u>0$，像为双曲线的右半支

若 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0\Rightarrow u=0$，$v=\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})$，像为虚轴

若 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$u<0$，像为双曲线的左半支

若 $\theta=\pi$，$v=0$，$u=-\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\leq-1$

故 Rokovsky 映射将 $\mathbb{H}$ 映为 $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\}$



余弦映射 $w=\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

单叶域 z_1,z_2 $\quad\cos z_1=\cos z_2$

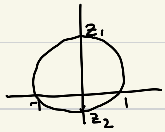
$$2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2}=0$$

故 $z_1-z_2=2k\pi$ 或 $z_1+z_2=2k\pi$

所以 $\{0<\mathrm{Re}\,z<\pi\}$ 为单叶域

第三次习题课

例：Γ 是经过 $-1, 1$ 的圆周，$z, w \notin \Gamma$，若 $zw=1$，则 z, w 在 Γ 两侧。

证：

$z_1 z_2 = 1$. $L(z)=\frac{1}{z}$，$-1\to z_1\to 1$ 映为 $-1\to z_2\to 1$

$L(z)$ 保持圆周左右两侧符号 □

例：若 z_1, z_2, z_3, z_4 依次位于圆周上，则 $(z_1, z_2, z_3, z_4) > 1$.

证：令分式线性变换 L，$L(z_1)=0$，$L(z_2)=1$，$L(z_4)=\infty$

分式线性变换保三点顺序（化归到反演），$L(z_3)>1$

$\therefore (z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{-L(z_3)}{1-L(z_3)} > 1$ □

例：求 $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\} \to \begin{cases}\mathrm{Im}<0\\ \mathrm{Im}>0\end{cases}$ 的分式线性变换

解：由 Rokovsky 函数单叶域的结论，$\varphi^{-1}(z)=z+\sqrt{z^2-1}$ 的两个分支满足要求

或考虑分式线性变换 L：$L(-1)=0$，$L(0)=1$，$L(1)=\infty$，即 $L(z)=\frac{z+1}{-z+1}$，

不难看出 $L(\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\}) = \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

则 $\sqrt{-L(z)}$ 满足要求

例. 具有不动点的分式线性变换的标准型

① 不动点 $p\neq q$ 的标准型：$\frac{w-p}{w-q} = k\cdot\frac{z-p}{z-q}$，$k\in\mathbb{C}$，$k\neq 0$

② 不动点 $p=q$ 的标准型：$\frac{1}{w-p} = \frac{1}{z-p}+k$，$k\in\mathbb{C}$，$k\neq 0$

设此分式线性变换为 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$（不考虑 $c=0$ 的平凡情形）. 令 $w=z$，

则有 $cz^2-(a-d)z-b=0$，两根 p, q . 则 $\begin{cases}cp^2-(a-d)p-b=0\\ cq^2-(a-d)q-b=0\end{cases}$

于是 $w-p=\frac{(a-pc)z+b-pd}{cz+d}=\frac{(a-pc)(z-p)}{cz+d}$，同理 $w-q=\frac{(a-qc)(z-q)}{(cz+d)}$

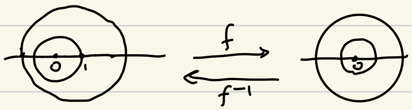
当 $p\neq q$，则 $\frac{w-p}{w-q}=k\cdot\frac{z-p}{z-q}$. $k=\frac{a-pc}{a-qc}$.

当 $p=q$，则 $p=q=\frac{a-d}{2c}$. $\frac{1}{w-p}=\frac{c(z-p)+d+pc}{\left(\frac{a+d}{2}\right)(z-p)}=\frac{1}{z-p}+k$，$k=\frac{2c}{a+d}$.

Lec 10

例：将 $|z|=1$ 与 $|z-1|=\frac{5}{2}$ 所围区域 Ω 共形映射为同心圆环 $\{1<|w|<R\}$
(全纯，保角)

解：



$0,\infty$ 是两圆的共同对称点

$f^{-1}(0), f^{-1}(\infty)$ 是 $\begin{cases}|z|=1\\|z-1|=\frac{5}{2}\end{cases}$ 的共同对称点

不难看出它们落在实轴上，$x_1=-\frac{1}{4}$，$x_2=-4$

$w_1=\frac{z+\frac{1}{4}}{z+4}$，$\begin{cases}w_1(-\frac{1}{4})=0\\w_1(-4)=\infty\end{cases}$，映到共同圆心 0

$\left.\begin{array}{l}\text{当 } z=1 \text{ 时 } w_1=\frac{1}{4}\\ z=\frac{7}{2} \text{ 时，} w_1=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4}<|w_1|<\frac{1}{2}$

令 $w=4w_1=\frac{4z+1}{z+4}$，则 $w=w(z)$ 将 Ω 映为 $\{1<|w|<2\}$，$R=2$ 是一个不变量（待讨论）

积分

闭曲线 .

反向曲线：$\gamma^{-}(t)=\gamma(-t)$，$t\in[-\beta,-\alpha]$

分段光滑

可求长曲线. $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$

对区间 $[\alpha,\beta]$ 作分割 Δ：$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$

$L=\sup\limits_{\Delta}\sum_{i=1}^{n}|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|<+\infty$，则 L 为长度

定义(复积分)：$f(t)=x(t)+iy(t)$ 为 $[\alpha,\beta]$ 上的复值函数

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt=\int_\alpha^\beta x(t)\,dt+i\int_\alpha^\beta y(t)\,dt$$

则有性质：① $\mathrm{Re}\left(\int_\alpha^\beta f(t)dt\right)=\int_\alpha^\beta x(t)dt=\int_\alpha^\beta \mathrm{Re}f(t)dt$

$\mathrm{Im}\left(\int_\alpha^\beta f(t)dt\right)=\int_\alpha^\beta y(t)dt=\int_\alpha^\beta \mathrm{Im}f(t)dt$

② $\forall c\in\mathbb{C}$，$c\int_\alpha^\beta f(t)dt=\int_\alpha^\beta cf(t)dt$

③ $\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt\right|\le\int_\alpha^\beta|f(t)|dt$

(证③：设 $\int_\alpha^\beta f(t)dt = e^{i\theta}\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt\right|$，故 $\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt\right| = e^{-i\theta}\int_\alpha^\beta f(t)dt \overset{②}{=} \int_\alpha^\beta e^{-i\theta}f(t)dt$

$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt\right| = Re\int_\alpha^\beta e^{-i\theta}f(t)dt \overset{①}{=} \int_\alpha^\beta Re\{e^{-i\theta}f(t)\}dt \le \int_\alpha^\beta |e^{-i\theta}f(t)|dt = \int_\alpha^\beta |f(t)|dt$)

定义：设 $\gamma: [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ 为光滑曲线，f 在 γ 上连续，则定义 $\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

若 γ 分段光滑，则 $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=0}^{n}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

对一般可求长曲线，通过分段光滑曲线的逼近和极限来定义积分

说明：$f(z)=u+iv$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta \{u(\gamma(t))+iv(\gamma(t))\}\{x'(t)+iy'(t)\}dt$$

$$= \int_\alpha^\beta (ux'-vy')dt + i\int_\alpha^\beta (vx'+uy')dt$$

$$= \int_\gamma (udx-vdy) + i\int_\gamma (vdx+udy)$$

$$= \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma f(z)dz$$

例：设 $\gamma(t)$ $(t\in[a,b])$ 为(分段)光滑曲线，求 $\int_\gamma dz$，$\int_\gamma z dz$

解：$\int_\gamma dz = \int_a^b \gamma'(t)dt = \gamma(b)-\gamma(a)$

$\int_\gamma z dz = \int_a^b \gamma(t)\gamma'(t)dt = \frac{1}{2}(\gamma^2(b)-\gamma^2(a))$

上两式对分段光滑曲线也成立

如果 γ 是分段光滑闭曲线，则 $\int_\gamma dz = 0$，$\int_\gamma z\, dz = 0$，类似也有 $\int_\gamma z^n dz = 0$

$\Rightarrow$ 收敛幂级数沿分段光滑闭曲线积分应该也为 $0 \Rightarrow$ 全纯函数沿分段光滑闭曲线积分为0？

全纯且 $f'(z)$ 连续 (1825)

$$\int_\gamma \underset{\uparrow}{f(z)}dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma (udx-vdy) + i(vdx+udy)$$

$$\overset{Green}{=\!=} \int_{\Omega'}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy + i\int_{\Omega'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

如何把"$f'(z)$连续"去掉？

Cauchy定理(1900)：设 f 在单连通域 D 中全纯，且 $\gamma \subset D$ 是 D 中分段光滑闭曲线，则 $\int_\gamma f(z)dz = 0$

证明：① 若 $T\subset D$ 是包含在 D 中的三角形，则 $\int_T f(z)dz = 0$

② 若 $P\subset D$ $\cdot$ 多边形，则 $\int_P f(z)dz = 0$

③ 对于曲线 $\gamma \subset D$，$\forall \varepsilon>0$，存在折线 $P\subset D$ s.t.

i) P 与 γ 有相同的起点与终点，且 P 的顶点在 γ 上

ii) $\left|\int_\alpha^\beta f(z)dz-\int_P f(z)dz\right|<\varepsilon$

综合①、②、③，则定理成立

①  $T=T^{(0)}$ $\quad M=\int_{T^{(0)}}f(z)dz=\left(\int_{T_1^{(1)}}+\int_{T_2^{(1)}}+\int_{T_3^{(1)}}+\int_{T_4^{(1)}}\right)f(z)dz$

$|M|\le 4\left|\int_{T_j^{(1)}}f(z)dz\right|$，其中 $\int_{T_j^{(1)}}f(z)dz=\max\limits_{1\le j\le 4}\left|\int_{T_j^{(1)}}f(z)dz\right|$

注意 $T_j^{(1)}$ 直径：$d^{(1)}=\frac{1}{2}d^{(0)}$，周长：$p^{(1)}=\frac{1}{2}p^{(0)}$

$$\left|\int_{T_j^{(1)}}f(z)dz\right|\ge\frac{1}{4}|M|$$

对 $T_j^{(1)}$ 割分，$\left|\int_{T_j^{(2)}}f(z)dz\right|\ge\frac{1}{4}\left|\int_{T_j^{(1)}}f(z)dz\right|$

将此过程一直进行下去（略去 j）

得到 $T^{(1)},T^{(2)},\cdots$

$|M|\le 4^n\left|\int_{T^{(n)}}f(z)dz\right|$，$T^{(n)}$ 的周长 $p^{(n)}=2^{-n}p^{(0)}$，直径 $d^{(n)}=2^{-n}d^{(0)}$

设 $F^{(n)}$ 为 $T^{(n)}$ 所围成的闭集，则 $F^{(0)}\supset F^{(1)}\supset\cdots$

∴存在点 $z_0\in F^{(n)}$ s.t. $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F^{(n)}=z_0$

f 在 z_0 附近全纯，$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\psi(z)(z-z_0)$，$\left(\psi(z)\xrightarrow{z\to z_0}0\right)$

n 充分大，$\int_{T^{(n)}}f(z)dz=\int_{T^{(n)}}\{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\psi(z)(z-z_0)\}dz$

$$=\cancel{f(z_0)\int_{T^{(n)}}dz}+\cancel{f'(z_0)\int_{T^{(n)}}(z-z_0)dz}+\int_{T^{(n)}}\psi(z)(z-z_0)dz$$

记 $\varepsilon_n=\sup\limits_{T^{(n)}}|\psi(z)|\to 0$，$|z-z_0|\le d^{(n)}=2^{-n}d^{(0)}$

$$\left|\int_{T^{(n)}}f(z)dz\right|=\left|\int_{T^{(n)}}\psi(z)(z-z_0)dz\right|\le\int_{T^{(n)}}|\psi(z)||z-z_0|ds$$

$$\le\varepsilon_n p^{(n)}\cdot d^{(n)}=\varepsilon_n p^{(0)}d^{(0)}4^{-n}$$

$\Rightarrow |M|\le p^{(0)}d^{(0)}\varepsilon_n \Rightarrow M=0$

② 三角割分

③ 取分点 $z_0,z_1,z_2,\cdots,z_n$，$|z_i-z_{i-1}|<\varepsilon$

$$\left|\int_\gamma f(z)dz-\int_P f(z)dz\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k}f(z)dz-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{[z_k,z_{k+1}]}f(z)dz\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k}(f(z)-f(z_k))dz-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{[z_k,z_{k+1}]}(f(z)-f(z_k))dz\right|$$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k}|f(z)-f(z_k)|dz+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{[z_k,z_{k+1}]}|f(z)-f(z_k)|dz$$

$$\overset{f\text{一致连续}}{<}\varepsilon L+(2L)\varepsilon<3L\varepsilon$$

□

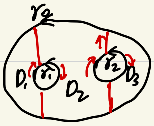
推论：若 D 是简单闭曲线 γ 的内部，若 f 在 D 上全纯，在 $\bar{D}$ 上连续，则 $\int_\gamma f(z)dz=0$

证明：$\left|\int_\gamma f(z)dz-\int_{\gamma_i} f(z)dz\right|<\varepsilon(i)\to 0$ □

定理：设 D 为 $(n+1)$ 条简单闭曲线 $\gamma_0,\cdots,\gamma_n$ 围成的区域，若 f 在 D 上全纯，在 $\bar{D}$ 上连续，则

$\int_{\partial D} f(z)dz=0$，$\partial D=\gamma_0\cup\gamma_1^-\cup\cdots\cup\gamma_n^-$

证：可以把 D 切成若干单连通区域

如 

$\int_{\partial D_1} f(z)dz=\int_{\partial D_2} f(z)dz=\int_{\partial D_3} f(z)dz=0$，三式相加 □

⇝ 高维时怎么切开，怎么粘连？和同调论有关

怎么严谨说明？曲线收缩流.

Lec 11

$\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz \overset{\gamma(z)=a+re^{i\theta}}{=\!=} \int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{i\theta}}\cdot re^{i\theta}\cdot i\,d\theta=2\pi i$

① $\int_{\gamma^-}f(z)dz=-\int_\gamma f(z)dz$

② $\int_\gamma (f+g)dz=\int_\gamma f\,dz+\int_\gamma g\,dz$

③ $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le\int_\gamma|f(z)||dz|\le\underbrace{\left(\sup_\gamma|f(z)|\right)}_{M}\underbrace{\int_\gamma ds}_{L}=ML$ 长大不等式

原函数：给定区域Ω上函数$f(z)$，若$F(z)$为Ω上全纯函数且$F'(z)=f(z)$，$\forall z\in\Omega$，则称 $F(z)$为f的原函数

定理：若在区域Ω上连续函数$f(z)$有原函数$F(z)$，且$\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$分段光滑，则 $\int_\gamma f(z)dz=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$ □

推论：f连续，且在区域Ω上有原函数，γ为Ω中简单闭曲线，则$\int_\gamma f(z)dz=0$.
反之，若$\int_\gamma f(z)dz\ne0$，则$f(z)$在Ω上没有原函数 □

推论：若f在区域Ω上全纯，且$f'=0$，则f为常数

证：Ω中两点w_0、w，用γ连接w_0和w，$f(w)-f(w_0)=\int_\gamma f'(z)dz=0$ □

注：实分析中若在一个零测集上$f'\ne0$，其他点处$f'=0$，则f不一定为常数

原函数的构造

定理：设D为单连通区域，$f(z)$在D中全纯，则$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(w)dw$为$f(z)$的原函数，即$F'(z)=f(z)$

证：良定性由Cauchy定理推出；

定义$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(w)dw$ 任取$z_1\in\Omega$，要证F在z_1处可导

$F(z)-F(z_1)=\int_{z_0}^{z}f(w)dw-\int_{z_0}^{z_1}f(w)dw=\int_{z_1}^{z}f(w)dw$（$\Omega$开集，$z$足够接近$z_1$时$z_1$到$z$可取直线）

$\left|\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1}-f(z_1)\right|=\left|\frac{1}{z-z_1}\int_{z_1}^{z}f(w)dw-\frac{1}{z-z_1}\int_{z_1}^{z}f(z_1)dw\right|=\left|\frac{1}{z-z_1}\int_{z_1}^{z}(f(w)-f(z_1))dw\right|$

$\overset{\text{长大不等式}}{\le}\frac{1}{|z-z_1|}|z-z_1|\sup_\gamma|f(z)-f(z_1)|\to0$

$\Rightarrow F$在z_1可导，由z_1任意性，F在Ω中全纯 □

多连通区域情形：设 $f(z)$ 在 D 中全纯在 $\bar{D}$ 连续．定义 $K_i = \int_{\gamma} f(z)dz$．

定理：$f(z)$ 有原函数 $F(z) \Leftrightarrow \forall i=1,2,\cdots,n$．$K_i=0$

证："$\Rightarrow$" 显然

"$\Leftarrow$" 则对任意简单闭曲线 γ，考虑 γ 围成的区域和 D 的交，记为 Ω，$\partial\Omega = \gamma \cup \{\bigcup_{j\in\Lambda}\gamma_j^{\pm}\}$

在 Ω 上用 Cauchy 定理，$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} n_i \int_{\gamma_i} f(z)dz = 0 \quad (n_i = 0, \pm 1)$

故 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)dw$ 积分与路径无关，且 $F'(z)=f(z)$，即 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的原函数 $\square$

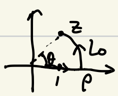
若 $K_i \neq 0$，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，则 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)dw$ 为多值函数

设 $D_1 \subset D$，且 D_1 单连通，则 $F(z)$ 在 D_1 上有一单值分支，记为 $F_1(z)$，设 $F_2(z)$ 为 $F(z)$ 在 D_1 上另一单值分支，

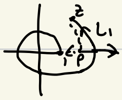
则 $F_2'(z)-F_1'(z)=0 \Rightarrow F_2(z)-F_1(z)$ 在 D_1 上为常数

例．设 $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$\frac{1}{z}$ 在 D 中全纯，求 $F(z)=\int_1^z \frac{1}{w}dw$

解：$\forall z\in D$，$z=|z|e^{i\arg z}=\rho e^{i\beta}$

① 

$$\int_{L_0}\frac{1}{w}dw = \int_1^{\rho}\frac{dx}{x} + \int_0^{\beta}\frac{i\rho e^{i\theta}d\theta}{\rho e^{i\theta}} = \operatorname{Log}\rho + i\beta$$

② 

$$\int_{L_1}\frac{1}{w}dw = \int_{L_0}\frac{1}{w}dw + \int_{L_1+L_0^-}\frac{dw}{w}$$

$$= \operatorname{Log}\rho + i\beta + 2\pi i$$

③ ...

Lec 12

Cauchy公式

定理. 设D为简单闭曲线γ围成的区域, f在D上全纯, $\overline{D}$上连续, $z\in D$, 则 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$

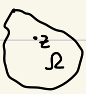
证: $\alpha(t)=z+\varepsilon e^{it},\ 0\le t\le 2\pi$

$\frac{f(w)}{w-z}$ 是 $\tilde{D}$ (γ和α围成的区域) 上的全纯函数 (关于变量z) 且在 $\overline{\tilde{D}}$ 上连续.

由Cauchy定理, $\int_{\gamma-\alpha}\frac{f(w)}{w-z}dw=0 \Rightarrow \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw=\int_\alpha\frac{f(w)}{w-z}dw=\int_\alpha\frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw+\int_\alpha\frac{f(z)}{w-z}dw$

$$=\int_\alpha \left(f'(z)+o(|w-z|)\right)dw+2\pi i f(z)$$

对 $\int_\alpha(f'(z)+o(|w-z|))dw$ 用长大不等式并令 $\varepsilon\to 0$ 即可 □

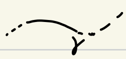
☆ 

$\left.\begin{array}{l} f|_{\partial\Omega} \text{ 确定} \\ f|_\Omega \text{ 全纯}, f|_{\overline{\Omega}} \text{ 连续} \end{array}\right\} \Rightarrow$ f在Ω中的值完全由边界决定

定理: 设$\gamma\subset\mathbb{C}$是一条曲线(不一定闭, 但可求长), $\varphi(\xi)$在γ上连续, 则

$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\xi)}{\xi-z}d\xi$ 在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 上全纯, 且 $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\gamma$, 有

$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi,\ n\in\mathbb{N}$

(☆ $\sum_{i=1}^{k}\frac{a}{z-\xi_i}$ 是 $\mathbb{C}\setminus\{\xi_1,\cdots,\xi_k\}$ 上的全纯函数 $\rightsquigarrow$ 

$\int_\gamma\frac{\varphi(\xi)}{z-\xi}d\xi$ 是 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 上的⋯)

证明: (1) 先证明 $F(z)$ 在 $z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma$ 处连续

记 $10\delta=d(z_0,\gamma)>0 \Rightarrow \forall z\in B(z_0,\delta)$ 有 $|\xi-z|\ge\delta,\ \forall\xi\in\gamma$

$F(z)-F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{1}{\xi-z}-\frac{1}{\xi-z_0}\right)\varphi(\xi)d\xi$

$=\frac{z-z_0}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{(\xi-z)(\xi-z_0)}\varphi(\xi)d\xi$

$|F(z)-F(z_0)|\le C|z-z_0|\cdot\delta^{-2}\cdot C\to 0\Rightarrow F$在$z_0$处连续

(2) 证明$F(z)$在$z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma$处可微

$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{(\xi-z)(\xi-z_0)}\varphi(\xi)d\xi$

$\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{(\xi-z_0)^2}\varphi(\xi)d\xi$ (自行验证)

(3) 归纳可得 $\lim_{z\to z_0}\frac{F^{(n-1)}(z)-F^{(n-1)}(z_0)}{z-z_0}$ 存在且为 $\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}$

(最后化为证明 $z\to z_0$时对γ上的ξ, $\frac{(\xi-z_0)(\xi-z_0)^n-(\xi-z)^n}{z-z_0}-n(\xi-z)^n$ 一致趋于0.

$\Longleftrightarrow\frac{(\xi-z_0)(\xi-z_0)^n-(\xi-z)^n}{z-z_0}-n(\xi-z_0)^n$ 一致趋于0 $\Longleftrightarrow\frac{[(\xi-z)+(z-z_0)]^n-(\xi-z)^n}{z-z_0}$ 一致趋于 $n(\xi-z_0)^{n-1}$) □

定理 设D为闭曲线γ所围区域，f在D上全纯，在$\bar{D}$上连续，则f(z)在D中有各阶导数，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}$$

证明：由定理1，$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$，再用定理2 □

$\left.\begin{array}{l} f\text{在}B(z_0,R)\text{上全纯} \\ \text{在}\overline{B(z_0,R)}\text{上连续}\end{array}\right\} \Rightarrow$ 在$\overline{B(z_0,R)}$上$|f|\le M$

$$|f'(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,R)}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^2}\right|\le\frac{1}{2\pi}\frac{M\cdot 2\pi R}{R^2}=\frac{M}{R}$$

$\cdots |f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!\cdot M}{R^n}$

$\leadsto$ Liouville 定理：若f在$\mathbb{C}$上全纯(整函数)且有界，则 R任意 $\Rightarrow f'(z_0)=0$，z_0任意 $\Rightarrow f=C$

代数基本定理. $\mathbb{C}$上任何复系数多项式至少有一个根.

证明：设 $p(z)=a_n z^n+\cdots+a_1z+a_0$，$a_0\neq 0$

反证，若$p(z)$无根，则$\frac{1}{p(z)}$是$\mathbb{C}$上全纯函数

$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{1}{p(z)}\right|=0 \xrightarrow{\frac{1}{p(z)}\text{在紧集上有界}} \frac{1}{p(z)}$在$\mathbb{C}$上有界

由 Liouville 定理，$\frac{1}{p(z)}=c$ $\cdots$ 不可能 □

推论：$\mathbb{C}$上任何复系数多项式恰有n个根 □

Morera定理：设f(z)是区域D中连续函数，若对D中任何简单闭曲线有$\int_\gamma f(z)dz=0$，则f(z)全纯.

证明：固定z_0，令$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)dz$ (良定).

$F'(z)=f(z)$，故F(z)全纯 $\Rightarrow$ F无穷次可微 $\Rightarrow$ f无穷次可微 □

第四次习题课

平均值性质

例. 设 $0<r<R$, $f\in H(B(0,R))$, 证明: (i) $f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})d\theta$ (ii) $f(0)=\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z|<r}f(z)dxdy$

证: (i) $RHS=\frac{1}{i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz=LHS$ (ii) 利用(i) □

例. 令 u 是 $B(0,R)$ 中的调和函数, $0<r<R$, 则 $u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta$

证: 由于 $B(0,R)$ 单连通, $\exists f\in H(B(0,R))$ s.t. $u=\mathrm{Re}f$, 利用上例 □

此结论可用于证明

例. 设 $0<r<1$, 则 $\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=0$

证: 由于 $(z-1)^2$ 在 $B(0,1)$ 上全纯, 故 $u(z)=\ln|z-1|^2$ 在 $B(0,1)$ 上调和 (作业题 2.2.11), 利用上例. □

例. 设 f 是域 D (不必单连通) 上的连续函数, 若 f 有原函数 F, 则对 D 中任意可求长(简单)闭曲线 γ,

均有 $\int_\gamma f(z)dz=0$

实际上有更一般的结论: 设 $f\in C^1(D)$, 可求长曲线在域 D 中起点为 a, 终点为 b, 则

$\int_\gamma\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z\right)=f(b)-f(a)$

证: $$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ dz=dx+idy\\ \frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ d\bar z=dx-idy\end{array}\right\}\Rightarrow LHS=\int_\gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)=f(b)-f(a)$$ □

原函数存在问题

一般而言, 非单连通区域中全纯函数一定存在原函数, 但满足一定条件时仍具有原函数

例. 设 $f(z)$ 在单连通区域中除 z_0 外全纯, 若 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域中有界, 则对 D 中任意简单闭曲线

γ, 均有 $\int_\gamma f(z)dz=0$ □

注: 这样的点 z_0 称为可去奇点, 在第5章中将进一步讨论

例：之前我们利用共轭调和函数的存在性证明过：在单连通区域 D 上，若全纯函数 $f(z)$ 无零点，

则存在 D 上全纯函数 $h(z)$ 使得 $e^{h}=f$，现在利用全纯函数的性质给出更简单的证明：

证：令 h_1 为 $\frac{f'}{f}$ 的原函数，考虑 $g(z)=e^{-h_1(z)}f(z)$. $g'(z)=-h_1'(z)e^{-h_1(z)}f(z)+e^{-h_1(z)}f'(z)=0$

$\Rightarrow g\equiv c$. 令 $h(z)=h_1(z)-z_0$（其中 $e^{z_0}=c$）即可 □

一个常用结论：设 $f\in C^n(\mathbb{C})\cap H(\mathbb{C})$，且 $f^{(n)}(z)\equiv 0$，则 f 为 $\deg\leq n-1$ 的多项式 □

例：设 f 是凸域 D 上的全纯函数，且 $\operatorname{Re}f'(z)>0$，则 f 是 D 上的单叶函数.

证：首先注意到 D 一定是单连通的. 则当 $z_1\neq z_2\in D$,

$$f(z_2)-f(z_1)=\int_{z_1}^{z_2}f'(z)dz=(z_2-z_1)\int_0^1 f'(z_1+s(z_2-z_1))ds\neq 0$$ □

一般而言，复积分不成立类似实积分的积分中值定理，但仍有类似结论.

例：设 f 在 D 中全纯，γ 为 D 中从 a 到 b 的直线段，则存在 $\lambda\in\mathbb{C}$，$|\lambda|\leq 1$，$\sigma\in[a,b]$ 使得

$$f(b)-f(a)=\lambda(b-a)f'(\sigma)$$

证：$|f(b)-f(a)|=\left|\int_a^b f'(z)dz\right|\leq\int_a^b|f'(z)||dz|\leq\max_{[a,b]}|f'(z)|\cdot|b-a|=|f'(\sigma)||b-a|$ □

Lec 13

定理：设简单闭曲线 $\gamma=\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_n$ 围成无界区域 D，$f(z)$ 在 $D\setminus\{\infty\}$ 上全纯，满足 $\lim_{z\to\infty}z^2f(z)=a\in\mathbb{C}$，

且 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上连续，则 $\int_\gamma f(z)dz=0$ □

例. 求积分 $I=\int_C\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$，其中 C 为圆周，$|z|=r$，$r\neq1,2$

解：只需考虑三种情况：① $0<r<1$ ② $1<r<2$ ③ $r>2$

① $I=\int_C\frac{\frac{1}{(z+1)(z-2)}dz}{(z-0)^3}=\left[\frac{1}{(z+1)(z-2)}\right]''(0)\cdot\frac{2\pi i}{2!}=-\frac{3}{4}\pi i$

② $\frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}$ 在 C 内部有两个奇点 $0,-1$. 作 $C_1:|z+1|<\varepsilon$，$C_2:|z|<\varepsilon$（充分小）

则由多连通域的 Cauchy 定理，

$I=\int_{C_1}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}+\int_{C_2}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$

$\int_{C_1}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}=\int_{C_1}\frac{\frac{1}{z^3(z-2)}dz}{z+1}=2\pi i\left[\frac{1}{z^3(z-2)}\right]\Big|_{z=-1}=\frac{2\pi i}{3}$，$\int_{C_2}\frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}=-\frac{3}{4}\pi i$

$\Rightarrow I=-\frac{1}{12}\pi i$

③ 令 $F(z)=\frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}$. $\lim_{z\to\infty}z^2F(z)=0$.

由定理知 $I=0$

无界区域的积分公式

定理：设简单闭曲线族 $\gamma=\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_n$ 围成的无界区域为 D，且 $f(z)$ 在 D 中全纯，在 $\overline{D}$ 上连续，则

$\forall z\in D$，有 $f(z)=f(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$ ， $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$

证明：$\forall z_0\in D$，取充分大的圆 $|z|=R$ 包含 z_0 与所有 γ_i，则由多连通域的 Cauchy 公式，有

$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi\ \xlongequal{R\to\infty}\ f(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi$ □

例. $I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z^4-1)(z-3)^2}$

解： 法一：小圆周

法二：$f(z)=\frac{1}{z^4-1}$ 在 $|z|>2$ 中全纯，$f(\infty)=0$

$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{\frac{1}{\xi^4-1}d\xi}{(\xi-3)^2}d\xi$

若取逆时针定向，$I=-f'(3)=\frac{27}{1600}$

例：若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\leq r$ 上全纯，且 $|\mathrm{Re}\,f(z)|\leq M$，则 $|f'(z_0)|\leq\frac{2M}{r}$

证：$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\ \xlongequal{z=z_0+re^{i\theta}}\ \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta$ ①

比较 $0=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz \Rightarrow 0=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$

取共轭, $0=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\overline{f(z_0+re^{i\theta})}e^{-i\theta}d\theta$ ②

①+②, $f'(z_0)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\{\mathrm{Re}f(z_0+re^{i\theta})\}e^{-i\theta}d\theta$, 代入条件即可 □

注：条件换成 $|\mathrm{Im}f(z)|\le M$ 同样成立

例：若 $f(z)$ 在区域 G 中连续，在 $G\setminus\gamma$ 中全纯，其中 γ 为 G 中分段光滑曲线，则 f 在 G 中全纯

证：α 与 γ 无交时 $\int_\alpha f(z)dz=0$.

α 与 γ 有交时以右图为例. $\int_\alpha f(z)dz=\int_{\alpha_1}f(z)dz+\int_{\alpha_2}f(z)dz=0+0=0$

由Morera定理即得 f 在 G 中全纯 □

级数

数项级数. 称 $\sum z_n$ 收敛，若部分和 $S_n=\sum_{k=0}^{n} z_n$ 收敛到 S

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\, z_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Im}\, z_n$ 都收敛

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0, \forall n\ge N, p\ge 1$ 有 $|z_{n+1}+\cdots+z_{n+p}|<\varepsilon$

称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛，若 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛

函数项级数. 给定集合 $E\subset\mathbb{C}$

函数列 $\{f_n(z)\}$ 收敛：若对 $\forall z\in E$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 收敛，则称函数项级数 $\sum f_n(z)$ 在 E 上收敛，

记和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$

一致收敛：在集合 E 上，称 $\sum f_n(z)$ 一致收敛到 $f(z)$，若 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N$,

$|S_n(z)-S(z)|<\varepsilon, \forall z\in E$，其中 $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} f_n(z)$

内闭一致收敛：若 $\sum f(z)$ 在区域 Ω 中的任意一个紧集上一致收敛，则称 $\sum f_n(z)$ 内闭一致收敛

判别法：① $\sum f_n(z)$ 在 E 上一致收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N>0, \forall n\ge N, \forall p\ge 1$. 有 $|f_{n+1}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon\ (\forall z\in E)$

② 若在 E 上 $|f_n(z)|\le M_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n<+\infty$, 则 $\sum f_n(z)$ 在 E 上一致收敛

③ 若 $f_n(z)\ (n=1,2,\cdots)$ 在集合 E 上连续，且 $\sum f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 E 上连续 □

考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

定理：令 $R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}}$，则当 $|z|<R$ 时 $\sum a_n z^n$ 绝对，内闭一致收敛，当 $|z|>R$ 时 $\sum a_n z^n$ 发散

证明：① $R=0$，$B(0,R)=\phi$，只需证第二部分

取 $z_0\neq 0$，由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}=\infty$，$\exists\, n_k\to\infty$ s.t. $|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}>\frac{1}{z_0}\Rightarrow |a_{n_k}||z_0|^{n_k}>1\Rightarrow$ 发散；

② $R=\infty$，取 $z_0\neq 0$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}=0<\frac{1}{2|z_0|}\xRightarrow{n充分大}|a_n|^{\frac{1}{n}}<\frac{1}{2|z_0|}\Rightarrow |a_n||z_0|^n<\frac{1}{2^n}\Rightarrow$ 绝对收敛，

在 $\overline{B(0,\rho)}$ 上是一致的。

③ $0<R<\infty$，当 $0<|z_0|<R$，取 ρ，$|z_0|<\rho<R$

$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}<\frac{1}{\rho}$，当 $n>N$ 时 $\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{\rho}$，$|a_n|\rho^n<1$

$|a_n||z_0|^n=|a_n|\rho^n\cdot\left|\frac{z_0}{\rho}\right|^n\Rightarrow$ 绝对，内闭一致收敛；

当 $|z_0|>R$，取 ρ，$|z_0|>\rho>R$，$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}>\frac{1}{\rho}$，存在 $n_k\to\infty$，$|a_{n_k}|>\frac{1}{\rho^{n_k}}$

从而 $|a_{n_k}||z_0|^{n_k}>|a_{n_k}|\rho^{n_k}>1$，发散 $\square$

Lec 14

例1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $R=+\infty$, 在 $\mathbb{C}$ 上收敛

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$, $R=1$, 在 $|z|<1$ 上收敛

定理：设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, 收敛半径 $R>0$

① $f(z)$ 是 $|z|<R$ 全纯函数

② $|z|<R$ 时 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}$

③ $f'(z)$ 在 $|z|<R$ 上全纯

证：令 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n z^{n-1}$. 设 $0<|z_0|<R$, 要证 $\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=g(z_0)$

令 $f(z)=S_N(z)+E_N(z)$. $S_N(z)=\sum_{k=0}^{N}a_n z^k$

则 $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-g(z_0)=\left(\frac{S_N(z_0+h)-S_N(z_0)}{h}-S_N'(z_0)\right)+\frac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}+S_N'(z_0)-g(z_0)$

$\left|\frac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}\right|\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|a_n\frac{(z_0+h)^n-z_0^n}{h}\right|$ $(*)$ 取 $|z_0|<r$, $|z_0+h|<r$, $r<R$

$|(z_0+h)^n-z_0^n|=|h|\,|((z_0+h)^{n-1}+(z_0+h)^{n-2}h+\cdots+z_0^{n-1})|\le n|h|r^{n-1}$, $(*)\le\sum_{n=N+1}^{\infty}n|a_n|r^{n-1}$

由于 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n z^{n-1}$ 收敛半径为 R, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, $\sum_{n=N+1}^{\infty}n|a_n|r^{n-1}<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$. 可取 N 足够大使 $|S_N'(z_0)-g(z_0)|<\varepsilon$, 且 $\sum_{n=N+1}^{\infty}n|a_n|r^{n-1}<\varepsilon$,

固定 N, 取 $|h|$ 充分小使 $\left|\frac{S_N(z_0+h)-S_N(z_0)}{h}-S_N'(z)\right|<\varepsilon$, 故 $\left|\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-g(z_0)\right|<3\varepsilon$

故 f 在 z_0 处可导, 且 $f'(z_0)=g(z_0)$ □

推论：幂级数 $\sum a_n z^n$ 在收敛域内无穷次可导 □

定义：在区域 D 上, 若 f 在 $z_0\in D$ 处可展开, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, $\forall|z-z_0|<\varepsilon$, 则称 f 在 z_0 处解析.

若 f 在 D 上处处解析, 则称 f 在 D 上解析

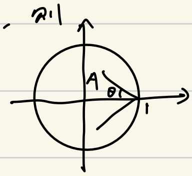
推论：若 f 在 D 上解析, 则 f 在 D 上全纯 □

例1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ 在 $|z|<1$ 内全纯

问题: $\sum a_n z^n$ 在 $|z|=R$ 上收敛？

定理(Abel) 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $R=1$. 且在 $z=1$ 处收敛到 S，则



① 级数在区域A上一致收敛

② $\lim\limits_{\substack{z\in A\\ z\to 1}} f(z)=S$

证: ① 令 $\sigma_{np}=a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}$. $\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, $\forall n>N$, $\forall p$. $|\sigma_{np}|<\varepsilon$ $\sigma_{n1}=a_{n+1}$

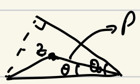
$$a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}=\sigma_{n1}z^{n+1}+(\sigma_{n2}-\sigma_{n1})z^{n+2}+\cdots+(\sigma_{np}-\sigma_{n,p-1})z^{n+p}$$

$$=\sigma_{n1}(z^{n+1}-z^{n+2})+\sigma_{n2}(z^{n+2}-z^{n+3})+\cdots+\sigma_{n,p-1}(z^{n+p-1}-z^{n+p})+\sigma_{np}z^{n+p}$$

$$=z^{n+1}(1-z)\left[\sigma_{n1}+\sigma_{n2}z+\cdots+\sigma_{n,p-1}z^{n+p-2}\right]+\sigma_{np}z^{n+p}$$

$$|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}|\le|z|^{n+1}|1-z|\varepsilon(1+|z|+\cdots+\ )+\varepsilon|z|^{n+p}$$

$$\le\varepsilon\cdot\frac{|1-z|}{1-|z|}+\varepsilon$$



令 $r=|z|$, $\rho=|1-z|$ $r^2=1+\rho^2-2\rho\cos\theta$

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}=\frac{\rho}{1-r}=\frac{\rho(1+r)}{1-r^2}=\frac{1+r}{2\cos\theta-\rho}\le\frac{2}{\cos\theta}\le\frac{2}{\cos\theta_0}\quad(\rho\le\cos\theta,\ \theta\le\theta_0,\ \theta_0<\tfrac{\pi}{2})$$

② 令 $E=A\cup\{1\}$, 则级数在E上一致收敛，故和函数在E上连续，故 $\lim\limits_{\substack{z\in A\\ z\to 1}} f(z)=f(1)=S$ □

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ $R=1$

① 当 $|z|<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 收敛

当 $z=1$ 时发散

当 $z=e^{i\theta}$ ($\theta\in(0,2\pi)$) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$ 收敛 (Dirichlet 判别法)

② 求和函数.

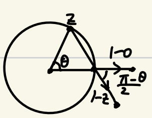
当 $|z|<1$ 时 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z}$, $f(0)=0$

$$f(z)-f(0)=\int_0^z f'(w)\,dw=\int_0^z\frac{1}{1-w}dw=-\mathrm{Log}(1-w)\Big|_0^z=-\log(1-z)\ (\text{取}\log 1=0\text{的分支})$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\log(1-z)$ $(|z|<1)$

当 $z=e^{i\theta}$ ($\theta\in(0,2\pi)$) 时 $f(z)=\lim\limits_{\substack{z=te^{i\theta}\\ t\to 1^-}}f(z)=\lim\limits_{t\to 1^-}(-\log(1-te^{i\theta}))=-\log(1-e^{i\theta})$

$\log z=\ln|z|+i\arg z$, $\arg z\in(-\pi,\pi)$ $=-(\ln|1-e^{i\theta}|-i\frac{\pi-\theta}{2})$

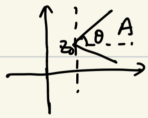


故 $\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=-\log|1-e^{i\theta}|=-\log(2\sin\frac{\theta}{2})\\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}\end{cases}$

(习题) 级数 $\sum \frac{a_n}{n^z}$

定理：设 $\sum \frac{a_n}{n^z}$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 收敛，则

① 它在 $\mathrm{Re}\, z > x_0$ 中收敛（发散 $\Rightarrow$ 左边发散）



② 级数在区域A的闭包上一致收敛

定理：$\sum \frac{a_n}{n^z}$ 存在直线（称为收敛直线）$\mathrm{Re}\, z = C$，满足

① 级数在直线左半平面发散，在直线右半平面收敛

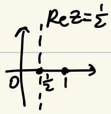
② 若在直线上一点 z_0 收敛，则在角状区域中一致收敛

③ 级数在 $\mathrm{Re}\, z = C$ 右半平面中内闭一致收敛.

例. $f = \sum \frac{1}{n^z}$ 当 $z=1$ 发散，当 $z=x>1$ 时收敛，故收敛直线 $L: \mathrm{Re}\, z = 1$

$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ 可全纯开拓到 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ 上. $z=-2m\ (m=1,2,\cdots)$ 为零点

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 可全纯开拓到 $F(z)=\frac{1}{1-z}$



Riemann猜想：$\zeta(z)$ 的其他零点均在 $\mathrm{Re}\, z=\frac{1}{2}$ 上.

并非直接代入数，而是类似 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ 一样慢慢开拓

第五次习题课

例1. 设 D 是由有限条可求长简单闭曲线围成的区域, $z_1,\cdots,z_n$ 是 D 中不同的 n 个点, 若 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$,

证明: $P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{w_n(\zeta)}\cdot\frac{w_n(\zeta)-w_n(z)}{\zeta-z}d\zeta$ 是 $\deg\le n-1$ 的多项式, 且 $P(z_k)=f(z_k)$, $k=1,2,\cdots,n$

其中 $w_n(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n)$. ($P(z)$ 称为 Lagrange 插值多项式).

证: 对 $z\notin\{z_1,\cdots,z_n\}$ 容易证明 $P(z)=\frac{w_n(z)f(z_1)}{(z-z_1)(z_1-z_2)\cdots(z_1-z_n)}+\cdots+\frac{w_n(z)f(z_n)}{(z-z_n)(z_n-z_1)\cdots(z_n-z_{n-1})}$

$z=z_i$ 时同样成立. 故 $P(z)$ 为 $\le n-1$ 次多项式的和, 也为 $\le n-1$ 次多项式 $\cdots$ □

例. 设 $f\in H(B(0,R))\cap C(\overline{B(0,R)})$, 则 ① $\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=2f(0)+f'(0)$

② $\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta=2f(0)-f'(0)$

用类似方法可证:

设 $f\in H(B(0,R))\cap C(\overline{B(0,R)})$, 则对任意 $0<r\le R$ 有 $f'(0)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}f(re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta$ □

应用①②, 设 $f\in H(B(0,R))\cap C(\overline{B(0,R)})$, 且 $f(0)=1$, $\operatorname{Re}f\ge 0$, 则 $|\operatorname{Re}f'(0)|\le 2$

例. 设 f 是全纯函数, $f(z)=O(|z|^\alpha)(z\to\infty)$, $\alpha\ge 0$, 则 f 是 $\deg\le[\alpha]$ 的多项式

证: 令 $n=[\alpha]+1$, $|f^{(n)}(z)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|\le\frac{n!}{2\pi}\int_{|\zeta-z|=r}\frac{A|\zeta|^\alpha}{r^{n+1}}|d\zeta|=\frac{n!A}{r^n}(r+|z|)^\alpha\xrightarrow{r\to\infty}0$

由上次习题课的常用结论, f 是 $\deg\le[\alpha]$ 的多项式 □

Lec 15

设$\{f_n(z)\}$在γ上连续，设$\sum f_n(z)$在D上一致收敛到$f(z)$，则$\int_\gamma f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz$

($f(z)$在γ上连续，故$\int_\gamma f(z)dz$有定义，$\forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall n\geq N, \forall z\in\gamma$. $|S_n(z)-f(z)|\leq\varepsilon$

故 $|\int_\gamma S_n(z)-\int_\gamma f(z)|\leq\int_\gamma|S_n(z)-f(z)|\leq\varepsilon\, l(\gamma)$)

Weierstrass 定理：若$\{f_n(z)\}$在D中全纯，且$\sum f_n$在D中内闭一致收敛到$f(z)$，则

① $f(z)$在D中全纯

② $\sum f_n^{(k)}(z)$在D中内闭一致收敛到$f^{(k)}(z)$

证：① f_n连续+一致收敛 $\Rightarrow f$连续．设$\gamma\subset D$简单闭曲线，内部包含在D中

$\int_\gamma f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)=0$　由Morera定理，$f(z)$全纯

② 由于$S_n(z)\rightrightarrows f(z)$，令$F_n(z)=S_n(z)-f(z)$．故$F_n(z)$内闭一致趋于0

$|F_n^{(k)}(z)|\leq C\max\limits_{B_R(z)}|F_n(z)|$　$(B_R(z)\subset D)$，故 $F_n^{(k)}(z)$内闭一致收敛于0　$(n\to\infty)$　□

定理：设$F(z,s)$. $\Omega\times[0,1]\to\mathbb{C}$满足

① $\forall s\in[0,1]$，$F(z,s)$关于z全纯

② $F(z,s)$在$\Omega\times[0,1]$上连续

则 $f(z)=\int_0^1 F(z,s)ds$在Ω上全纯

证：令$f_n(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F(z,\frac{k}{n})$在$\Omega$上全纯

$|f_n(z)-f(z)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(F(z,\frac{k}{n})-F(z,s))ds\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|F(z,\frac{k}{n})-F(z,s)|ds \underset{F在K\times[0,1]上一致连续}{\overset{固定K\subset\Omega紧}{\leq}}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon\cdot\frac{1}{n}=\varepsilon, \forall z\in K$

故$f_n(z)$内闭一致收敛到$f(z)$，故$f(z)$全纯　□

例．设$f(t)$在$t\geq0$时连续有界，则$g(z)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-zt}dt$　在$\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}z>0\}$上有定义且全纯．

证：令$g_n(z)=\int_0^n f(t)e^{-z(t)}dt$，由于$F(z,t)=f(t)e^{-zt}$满足上述定理条件

故$g_n(z)=\int_0^n F(z,t)dt$在$\mathbb{C}$上全纯

$|g_n(z)-g(z)|=\left|\int_n^{+\infty}f(t)e^{-zt}dt\right|\leq M\int_n^{+\infty}|e^{-zt}|dt=M\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt\overset{设\mathrm{Re}z\geq\delta>0}{\leq}M\int_0^{+\infty}e^{-\delta t}dt=\frac{M}{\delta}e^{-\delta n}\to0$ $(n\to+\infty)$

故在$\mathrm{Re}z\geq\delta$上，$g_n(z)$一致收敛到$g(z)$，故$g(z)$在$\mathrm{Re}z>0$上全纯　□

全纯函数展开

定理：设 $f(z)$ 在区域 D 中全纯，$\overline{B(z_0,R)}\subset D$，则 f 在 z_0 处可展开

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$，$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$，$\forall z\in B(z_0,R)$．且展式唯一．

证：$\forall z\in B(z_0,R)$，$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$

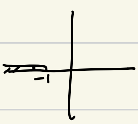
$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{(\xi-z_0)(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0})}=\frac{1}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n,\quad \left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi}_{=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)}\cdot(z-z_0)^n$$

唯一性，即 $f(z)=\sum a_n z^n=\sum a_n' z^n$．要证 $a_n=a_n'$

$$\int_{|z|=R}\frac{f(\xi)}{z^{m+1}}=\sum a_n\int_{|z|=R}z^{n-m-1}=2\pi i\,a_m$$ □

例：$\mathrm{Log}(1+z)$ 在 $z=0$ 展开



令 $\Omega=\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$，则 $\mathrm{Log}(1+z)$ 在 Ω 上有单值分支

$\log_0(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{3}z^3+\cdots+(-1)^n\frac{z^n}{n}+\cdots\quad(|z|<1)$

故 $(\mathrm{Log}(1+z))_k=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}+2k\pi i$，$(|z|<1,\ k\in\mathbb{Z})$

推论：f 在 z_0 处全纯 $\Leftrightarrow$ f 在 z_0 处解析 □

定义　$f(z)$ 在 z_0 点全纯，$f(z_0)=0$，则 z_0 称为 $f(z)$ 的零点

$f(z)=f'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2+\cdots$，$|z-z_0|<\delta$

① 若 $f^{(n)}(z_0)=0$，$\forall n\geq 1$，则 $f(z)$ 在 $B_\delta(z_0)$ 中恒为 0．

② 若 $f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(n-1)}(z_0)=0$ 但 $f^{(n)}(z_0)\neq 0$，$(n\in\mathbb{N})$，称 z_0 为 f 的 n 重零点．

$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，$g(z_0)\neq 0$，$g(z)$ 在 $B_\delta(z_0)$ 中全纯

$\rightsquigarrow$ 命题．z_0 是 $f(z)$ 的 m 重零点 $\Leftrightarrow$ $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，$\forall z\in B_\delta(z_0)$，其中 $g(z_0)\neq 0$，$g(z)$ 在 $B_\delta(z_0)$ 全纯．□

定理：若 $f(z)$ 在区域 Ω 上不恒为0且全纯，则 f 在 Ω 中零点是孤立的．即若 $z_k\to z_0$，$f(z_k)=0$，$z_0\in\Omega$

且 $z_k\in\Omega$，$z_k\neq z_0$ 则 f 在 Ω 中恒为 0

例．$\sin\frac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 全纯，$z_k=1-\frac{1}{\pi k}\to z_0=1\notin\Omega$．

证：① 设 f 在 $B(z_0,\delta)$ 中不恒为0，$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，$g(z)\neq 0$，$\forall z\in B_\delta(z_0)$

故 $f(z_k)=(z_k-z_0)^m g(z_k)\neq 0$，矛盾，故 f 在 $B(z_0,\delta)$ 中恒为0

② 下证 f 在 Ω 上恒为0．$E=\{z\in\Omega \mid f(z)=0\}$

故 E 闭，非空，设 $U=E^\circ$，且 U 非空，开．下证 U 闭

即证 $z_n\in U$，$z_n\to z_0\in\Omega$，则 $z_0\in U$（由①）

故 U 既开又闭，故 $U=\Omega$（由连通性） $\square$

推论：若 f_1，f_2 在 Ω 中全纯，且 $f_1(z_n)=f_2(z_n)$，$z_n\to z_0$，$z_0\in\Omega$，$z_n\neq z_0$，

则 $f_1(z)=f_2(z)$，$\forall z\in\Omega$ $\square$

推论：三角恒等式对复数 z 都成立 $\square$

例．求 e^z 的幂级数展开式

因为 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$F(z)=e^z$，$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$．$F(x)=G(x)$，$\forall x\in\mathbb{R}$．故 $F(z)=G(z)$，$\forall z\in\mathbb{C}$

即 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$，$\forall z\in\mathbb{C}$

$f(z)=\frac{1}{z}$ 在 $0<|z|<1$ 上全纯，怎么展开？

$\rightsquigarrow$ Laurent 展开

定义 $\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n}_{(a)}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{(b)}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n}_{(c)}$

称 (a) 收敛，若 (b)(c) 都收敛；称 (a) 发散，若 (b)(c) 有一个发散

求 (a) 的收敛域

① (c) 的收敛半径为 R，则 (c) 在 $|z-z_0|<R$ 收敛

② 令 $w=(z-z_0)^{-1}$，(b) $=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}w^n$，设收敛半径为 ρ，则 (b) 在 $|w|<\rho$ 上收敛

故 $|z-z_0|^{-1}<\rho$，即 $|z-z_0|>\frac{1}{\rho}$ 时 (b) 收敛

③ 若 $\frac{1}{\rho}<R$，则 w 在 $\frac{1}{\rho}<|z-z_0|<R$ 中收敛，

若 $\frac{1}{\rho}>R$，则 (a) 处处发散

(a) 在收敛域中内闭一致收敛到全纯函数

定理：设 $f(z)$ 在 $r<|z-a|<R$ 全纯．$(0\le r<R<+\infty)$

则 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$, $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$ $(r<\rho<R)$

且展式唯一

证：① c_n 与 ρ 的选取无关

② 取 ρ_1,ρ_2 使 $r<\rho_1<|z_0-a|<\rho_2<R$

$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta$

当 $\zeta\in\gamma_2$ 时 $\frac{1}{\zeta-z_0}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z_0-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-a}{\zeta-a}\right)^n$, ···

③ 唯一性：$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$

$\int_{|z|=\rho}f(z)z^{-m-1}dz=\int_{|z|=\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^{n-m-1}dz=2\pi ic_m$ ···

$\square$

例．$f(z)=\frac{1}{z}$ 在 $0<|z|<1$ 上全纯

$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z}+(\ \ )z+(\ \ )z^3+\cdots$

定义．若 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 上全纯，在 z_0 处无定义，则称 z_0 为 f 的孤立奇点

例：$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$，$z=0$ 不是孤立奇点

$f(z)$ 在孤立奇点展开

$f(z)=\underbrace{\sum_{-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n}_{\text{主要部分}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n}_{\text{全纯部分}}$

定理：设 z_0 是 f 的孤立奇点，则下列等价：

① $\lim_{z\to z_0}f(z)$ 存在且有限

② $f(z)$ 在 z_0 的某空心邻域中有界

③ $f(z)$ 的 Laurent 展开中负幂次项系数为 0

满足上述条件之一，称为可去奇点，补充定义后 f 在 z_0 处全纯．

证：(1) $\Rightarrow$ (2) 显然

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $n>0$, $|c_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}d\zeta\right|\le\frac{1}{2\pi}M\int_{|\zeta-z_0|=\rho}|\zeta-z_0|^{n-1}|d\zeta|\le M\rho^n\to0\ (\rho\to0)$

(3)⇒(1) 设f的全纯部分为$g(z)$，$g(z)$在$B(z_0,\delta)$有定义，$\lim_{z\to z_0} f(z)=g(z_0)$

定义$f(z_0)=g(z_0)$即可 $\square$

奇点
- 孤立奇点
  - 可去
  - z^n 极点（有限项负幂次项）
  - 本性（无限项负幂次项）
- 非孤立奇点

Lec16

定理：设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则下列等价：

① $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$

② $\exists\, m\in\mathbb{Z}^+$，$g(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中全纯，恒不为0，$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$

③ $f(z)$ 的展式中只有有限负幂次项不为0，即 $f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$，$m\geq 1$

④ $\exists\, m\in\mathbb{Z}^+$，$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ 存在且不为0

⑤ $\exists\, m\in\mathbb{Z}^+$，$g=\frac{1}{f}$ 以 z_0 为m阶零点．

满足上述条件之一，称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点．

证：①⇒② 设 $z_0=0$，$\exists\,\delta>0$．$f(z)$ 在 $0<|z|<\delta$ 中恒不为0

令 $g(z)=\begin{cases}\frac{1}{f(z)}, & 0<|z|<\delta\\ 0, & z=0\end{cases}$．故 $g(z)$ 在 $|z|<\delta$ 全纯，且 $z=0$ 是零点

可设 $g(z)=z^m h(z)$，$h(0)\neq 0$，$h(z)$ 在 $B(0,\delta)$ 中全纯且恒不为0

故 $f(z)=\frac{1}{z^m}\frac{1}{h(z)}$，$\forall\, 0<|z|<\delta$ □

定理：设 z_0 为孤立奇点，则下列等价：

① f 的展式中有无限负幂次项

② 对任意 $A\in\overline{\mathbb{C}}$，$z_0$ 的空心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 中存在一列互异 $z_n\to z_0$，且 $f(z_n)\to A$

③ $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 不存在

证：①⇒② 若 $A=\infty$，由于 z_0 不是可去奇点，则 f 在 z_0 附近无界，可找 $z_n\to z_0$ 使 $f(z_n)\to A=\infty$

若 $A\in\mathbb{C}$，(a) 若 z_0 的任何空心邻域中都存在 $f(z)-A$ 的零点，则②成立

(b) 若(a)不成立，则存在某邻域中 $f(z)-A$ 无零点，

$g(z)=\frac{1}{f(z)-A}$ 在 $B(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$ 中全纯，恒不为0

(b1) 若 $g(z)$ 在 $B(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$ 中有界，则 z_0 是 g 的可去奇点．

$\lim_{z\to z_0} g(z)=\lambda\in\mathbb{C}$，则 $\lim_{z\to z_0} f(z)=\begin{cases}A+\frac{1}{\lambda}, & \lambda\neq 0\\ \infty, & \lambda=0\end{cases}$

故 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点或极点，与①矛盾．

(b2) $g(z)$ 在 $B(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$ 中无界，故存在一列互异 $z_n\to z_0$ 使 $\lim_{n\to\infty} g(z_n)=\infty$，

故 $\lim_{z\to z_0} f(z_n)=A$． □

无穷远奇点

定义：① 若 $f(z)$ 在 $|z|>R$ 上全纯，则 ∞ 称为 $f(z)$ 的孤立奇点

② 称 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点/极点/本性奇点，若 $w=0$ 是 $f(\frac{1}{w})$ 的可去奇点/极点/本性奇点

例. $z=\infty$ 是 $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_dz^d$ $(a_d\neq 0)$ 的 d 阶极点：$z=\frac{1}{w}$. $p(\frac{1}{w})=a_0+\frac{a_1}{w}+\cdots+\frac{a_d}{w^d}$

$z=\infty$ 不是 $\frac{1}{\sin z}$ 的孤立奇点

定义. 整(entire)函数. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$. $\forall z\in\mathbb{C}$. $R=\infty$

问题：整函数零点分布？（见最后两节）

定理：若 f 是整函数

① ∞ 为可去奇点 $\Leftrightarrow$ f 为常数.

② ∞ 为极点 $\Leftrightarrow$ f 为非零多项式.

③ ∞ 为本性极点 $\Leftrightarrow$ $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 中有无穷多 $a_n\neq 0$

证：$w=\frac{1}{z}$，$f(\frac{1}{w})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{w^n}=\sum_{m=-\infty}^{0}a_{-m}w^m$ $\square$

推论：有界整函数为常数

证：f 有界 $\Rightarrow$ ∞ 可去 $\Rightarrow$ f 为常数 $\square$

亚纯函数. 设 $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$，设 f 在 Ω 上除极点外处处全纯，则称 f 在 Ω 上亚纯.

（即 f 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上仅有全纯或极点，无本性奇点或非孤立奇点）

定理：若 f 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上亚纯，则 f 为有理函数.

例：$\frac{1}{\sin z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上亚纯，不是 $\overline{\mathbb{C}}$ 上亚纯函数

证：① $f(z)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上只能有限多极点，否则存在极限点 $z_0\in\overline{\mathbb{C}}$ 不是孤立奇点.

② 设 $f(z)$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上极点为 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$

相应的 Laurent 展开主要部分

$\psi_j(z)=\frac{C_{-1}^j}{z-z_j}+\cdots+\frac{C_{-m_j}^j}{(z-z_j)^{m_j}}$，$C_{-m_j}^j\neq 0$，$m_j\geq 1$

$\vdots$

$\psi(z)=C_0+C_1z+\cdots+C_mz^m$

全纯部分 $\varphi_j(z)$ 与 $\varphi(z)$

则在 z_j 附近，$f(z)=\psi_j(z)+\varphi_j(z)$，在 ∞ 附近，$f(z)=\psi(z)+\varphi(z)$

令 $F(z)=f(z)-\psi(z)-\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z)$

则 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上全纯

在 z_j 处 $\lim_{z\to z_j}F(z)=\lim_{z\to z_j}\left(\underline{f(z)-\psi_j(z)}-\psi(z)-\sum_{p\neq j}\psi_p(z)\right)=\varphi_j(z_j)-\psi(z_j)-\sum_{p\neq j}\psi_p(z_j)\in\mathbb{C}$

在 ∞ 处 $\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\left(\underline{f(z)-\psi(z)}-\sum_{j=1}^{k}\psi_j(z)\right)=\varphi(\infty)=0$

故 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上为有界整函数，恒等于零，故 $f(z)=\psi(z)+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z)$ 有理函数 □

定理：设 f 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上亚纯，单射，则 f 是分式线性变换。

证：设 $f=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$，设 P_n,Q_m 无公共根

① 若 $n>m$，则 $f(\infty)=\infty$，故 $Q_m(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上无零点，故 Q_m 常数。

故 $f=P_n(z)$ 为多项式，故 $P_n(z)$ 只有一个零点，设为 z_0，$P_n(z)=c(z-z_0)^n$ $(c\neq0)$

由于 $c\neq0$，$(z-z_0)^n=\frac{1}{c}$ 有 n 个不同的零点 $\Rightarrow n=1$，故 f 为分式线性变换

② 若 $n<m$，则 $f(\infty)=0$，故 $P_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上无零点，故为常数，$f=\frac{1}{Q_m}$，

$\forall A\in\mathbb{C}$，$Q_m(z)=\frac{1}{A}$ 只有一个解，故 $m=1$，…

③ 若 $n=m$，$f(z)=0$ 只有一根 z_0，则 $P_n(z)=a(z-z_0)^n$，$f(z)=\infty$ 只有一根 z_1，则 $Q_n(z)=b(z-z_1)^n$

故 $f(z)=\frac{a}{b}\left(\frac{z-z_0}{z-z_1}\right)^n$ $(\frac{a}{b}\neq0)$，$f(z)=c\neq0$ 只有一解，故 $n=1$，… □

例. 若 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 全纯，且 $f^{-1}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 全纯，则 $f(z)=az+b$ $(a\neq0)$

$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})=\{f\mid f$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，f^{-1} 在 $\mathbb{C}$ 上全纯$\}$

证：① 若 ∞ 可去，则 f 常数，矛盾

② ∞ 本性奇点，$\forall A\in\mathbb{C}$，存在 $z_n\to\infty$ 使 $\overset{w_n}{\overset{\shortparallel}{f(z_n)}}\to A$

由于 $f^{-1}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 全纯，$f^{-1}(w_n)\to f^{-1}(A)\in\mathbb{C}$，故 $z_n\to f^{-1}(A)\in\mathbb{C}$，矛盾

③ ∞ 是极点，… □

Lec 17　最大值原理与Schwarz引理

最大模原理：设$f(z)$在区域D中全纯，且不是常值函数，则$|f(z)|$不可能在D的内部取到最大值.

引理(平均值公式)：若$f(z)$在$|z-a|<R$中全纯，则$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta$，$0<r<R$ □

(从引理出发，$f(a)=\frac{1}{\pi r^2}\int_{B(a,r)}f(z)d\sigma$)

定理证明：设$M=\sup_{\Omega}|f(z)|<+\infty$，由$f(z)$不是常数知$M>0$

令$\Omega_1=\{z\in\Omega \mid |f(z)|=M\}$　闭集.

设$a\in\Omega_1$，则$|f(a)|=M$．$\exists\delta>0$，$B(a,\delta)\subset\Omega$，从而$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta$，

两边取绝对值，$M=|f(a)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|d\theta\le\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi M=M$

$\therefore\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|d\theta=M=|f(a)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Md\theta$

所以$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{(M-|f(a+re^{i\theta})|)}_{\ge 0,\text{连续}}d\theta=0\Rightarrow|f(a+re^{i\theta})|\equiv M$

$\Rightarrow\partial B(a,\delta)\subset\Omega_1,\cdots\Rightarrow\overline{B(a,\delta)}\subset\Omega_1\Rightarrow\Omega_1$ 开集 $\xRightarrow{a\in\Omega_1}\Omega_1=\Omega$

$\therefore|f(z)|\equiv M,\forall z\in\Omega\Rightarrow f(z)\equiv C,\forall z\in\Omega$，矛盾 □

例：$f(z)=e^{e^z}$，$\Omega=\{z \mid -\frac{\pi}{2}<\mathrm{Im}\,z<\frac{\pi}{2}\}$

则$f(z)=e^{e^{x+iy}}=e^{e^x\cos y+ie^x\sin y}$，$|f(z)|=e^{e^x\cos y}$

若$z\in\partial\Omega$，$|f(z)|=e^0=1$

当$y=0$时$|f(z)|=e^{e^x}$无界

原因：Ω无界，$|f|$不一定能在$\overline{\Omega}$上取到最大值.

例．$f(z)=z$，$|f|=|z|$在$|z|<1$中达到最小值0 但f不是常数$\Rightarrow$"最小模原理"不成立．但是

例：若$f(z)$全纯，且在区域Ω上恒不为0，则$|f|$在Ω内部不能达到最小值.

证：对$g(z)=\frac{1}{f(z)}$用最大模原理 □

例．设$F(z)$在$G=\{z \mid 0<\mathrm{Im}\,z<1\}$上全纯，有界，且在$\overline{G}$上连续．若$\sup_{\partial G}|F(z)|\le 1$，则$|F(z)|\le 1$，$\forall z\in G$.

想法：构造$F_\varepsilon(z)$在G上全纯，且满足

① $|F_\varepsilon(z)|\le 1$，$\forall z\in\partial G$

② $\lim_{z\to\infty}|F_\varepsilon(z)|=0$

③ $\lim_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon(z)=F(z)$，$\forall z\in G$

则可在有界域对$F_\varepsilon(z)$用最大模原理 ⋯

证：令 $F_\varepsilon(z)=F(z)e^{-\varepsilon z^2}$，则 $F_\varepsilon(z)$ 在 G 上全纯，$\overline{G}$ 上连续

若 $\operatorname{Im} z=0$，$|F_\varepsilon(x)|=|F(z)|e^{-\varepsilon x^2}\le 1$，$\forall x\in\mathbb{R}$

若 $\operatorname{Im} z=1$，$|F_\varepsilon(z)|=|F(z)||e^{-\varepsilon(x+i)^2}|=|F(z)|e^{-\varepsilon(x^2-1)}\le \begin{cases} e^\varepsilon, & \text{若 } |x|<1\\ 1, & \text{若 } |x|\ge1\end{cases}$

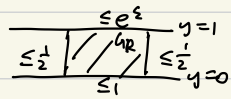
若 $0<\operatorname{Im} z<1$，$|F_\varepsilon(z)|=|F(z)||e^{-\varepsilon(x+iy)^2}|=|F(z)|e^{-\varepsilon(x^2-y^2)}$

$$\le |F(z)|e^{-\varepsilon x^2+\varepsilon} \overset{F\text{有界}}{\le} Ce^{-\varepsilon x^2+\varepsilon}\to 0，\text{当 } |x|\to\infty$$

故 $\exists R$，当 $|x|>R$ 时 $|F_\varepsilon(z)|<\frac12$

令 $G_R=\{z\mid z=x+iy,\ |x|<R,\ 0<y<1\}$ 为有界区域

若 $z\in G\setminus G_R$，则 $|F_\varepsilon(z)|\le\frac12$.



若 $z\in G_R$，则 $|F_\varepsilon(z)|\le \max_{\partial G_R}|F_\varepsilon(z)|\le e^\varepsilon$

令 $\varepsilon\to0$，$|F(z)|\le1$，$\forall z\in G$ □

引理：若 $u(x,y)$ 在 $|z-a|<R$ 中调和，则 $\forall 0<r<R$ 有 $u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})\,d\theta$ □

定理：设 $u(x,y)$ 在区域 D 中调和，不是常数，则 u 在 D 中最大值，最小值都不能在 D 的内点达到 □

例（三圆引理，Hadamard）. f 在 $\Omega=\{0<r_1<|z|<r_2\}$ 内全纯，在 $\overline\Omega$ 上连续. 令 $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$，则

$$\log M(r)\le \frac{\log r_2-\log r}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_1)+\frac{\log r-\log r_1}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_2)$$

$s=\log r$. $L(s)=\log M(e^s)$，结论即 $L(s)\le\frac{s_2-s}{s_2-s_1}L(s_1)+\frac{s-s_1}{s_2-s_1}L(s_2)$，即 $L(s)$ 是凸函数.

证：$\forall\alpha\in\mathbb{R}$，在 $\{z\mid f(z)\ne0,\ z\in\Omega\}$ 上，$g(z)=\alpha\log|z|+\log|f(z)|$ 是调和函数.

由调和函数的极值原理（用在 $\Omega\setminus\{f(z)=0\}$）（$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ f(z_0)=0,\ z_0\in\Omega}} g(z)=-\infty$. 可挖去有限个小邻域再讨论）

$g(z)\le\max\{\max_{|z|=r_1}g(z),\ \max_{|z|=r_2}g(z)\}\le\max\{\alpha\log r_1+\log M(r_1),\ \alpha\log r_2+\log M(r_2)\}$

令 $\alpha\log r_1+\log M(r_2)=\alpha\log r_2+\log M(r_1) \iff \alpha=\frac{\log M(r_2)-\log M(r_1)}{\log r_2-\log r_1}$

则 $\max_{|z|=r}g(z)=\alpha\log r+\log M(r)\le\alpha\log r_1+\log M(r_1)$

$\Rightarrow \log M(r)\le\alpha\log r_1+\log M(r_1)-\alpha\log r$

（如何解决 ① $\{f(z)=0\}$ 无限，从而 $\Omega\setminus\{f(z)=0\}$ 可能不连通. ② $|f(z_0)|=0$. $|z_0|\in\{r_1,r_2\}$，从而 g 在 r_1,r_2 处不都良定？

$\therefore r_1'=r_1+\varepsilon$, $r_2'=r_2-\varepsilon$，$\{f(z)=0\}'$ 必有限，$\Omega'\setminus\{f(z)=0\}'$ 连通. 特别地，此时可选 ε 使 $\partial\Omega$ 上 $f(z)$ 均不为 0 $\Rightarrow$ $g(z)$ 在 $\overline{\Omega'\setminus\{f(z)=0\}'}$ 上连续，用上面的方法得到弱一些的不等式，再让 $\varepsilon\to0$，相应 $M(r_1')$，$M(r_2')$ 有正的下界（由不等式及 $|f(z)|$ 有上界），由 $M(r)$ 关于 r 连续即得原不等式）□

Schwarz引理：设 $f(z):\mathbb{D}\to\overline{\mathbb{D}}$ 全纯，$D=\{|z|<1\}$，$f(0)=0$，则

① $|f(z)|\le|z|$，$\forall z\in\mathbb{D}$

② 若对某个 $z_0\in\mathbb{D}$，$z_0\neq0$，$|f(z_0)|=|z_0|$，则 $f(z)$ 是旋转，$f(z)=e^{i\theta}z$，$\theta\in\mathbb{R}$

③ $|f'(0)|\le1$，等号成立 $\Leftrightarrow f(z)=e^{i\theta}z$

证：① $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 中全纯，$f(0)=0$，故 $f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$，$|z|<1$

$\frac{f(z)}{z}=a_1+a_2z+\cdots$

令 $\varphi(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{z}, & 0<|z|<1\\ a_1, & z=0\end{cases}$ 在 $|z|<1$ 中全纯

$\forall |z|<1$，取 $|z|<r<1$，在 $\overline{B(0,r)}$ 上用最大模引理，

$|\varphi(z)|\le\max\limits_{|z|=r}|\varphi(z)|=\max\limits_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|}\le\frac{1}{r}\xRightarrow{r\to1^-}|f(z)|\le|z|$，$\forall z\in\mathbb{D}$

② $|\varphi(z_0)|=\frac{|f(z_0)|}{|z_0|}=1$，已知 $|\varphi(z)|\le1$，最大模在内部取到 $\Rightarrow\varphi(z)\equiv e^{i\theta},\cdots$

③ $f'(0)=a_1=\varphi(0)\Rightarrow|f'(0)|=|\varphi(0)|\le1$，

等号成立，$\varphi\equiv e^{i\theta},\cdots$.

反之，若 $f(z)=e^{i\theta}z$，则 $f'(0)=e^{i\theta}$，$\cdots$ $\square$

(*) Schwarz引理：全纯函数暗含压缩映射 $\xrightarrow{\text{应用}}$ Kahler几何，复流形，Calabi-Yau $\cdots$

Lec 18

Schwarz引理应用.

定义: ① 若 $f: U \to V$ 是全纯双射, 则称 f 为共形映射, 此时 U 与 V 称为共形等价, 或双全纯等价.

② 区域 $\Omega \to \Omega$ 的共形映射称为 Ω 的自同构, $Aut(\Omega)$ 表示所有 Ω 的自同构集合.

定理: ① $Aut(\mathbb{C}) = \{az+b \mid a \neq 0\}$

② $Aut(\overline{\mathbb{C}}) = \{$分式线性变换$\}$

证: ① 见P54 例.

② 设 $f \in Aut(\overline{\mathbb{C}})$

若 $f(\infty) = \infty$, 则由①知 f 为一次多项式

若 $f(\infty) = a \in \mathbb{C}$, 令 $\varphi = \frac{1}{z-a}$

则 $\begin{matrix} \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{C}} \\ \infty \longrightarrow a \longrightarrow \infty \end{matrix}$, 故 $\varphi \circ f \in Aut(\mathbb{C})$, 从而 $\varphi \circ f = cz+d \ (c \neq 0)$, 即 $f = a + \frac{1}{cz+d} \ (c \neq 0)$ □

定理: 若 f 为 $\mathbb{D}$ 上自同构, 则存在 $\theta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{D}$, 使 $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, 即 $Aut(\mathbb{D}) = \{e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \mid \theta \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1\}$

证: ① 令 $\alpha = f(0)$, 则存在分式 $\varphi_\alpha: \begin{matrix} \mathbb{D} \to \mathbb{D} \\ \alpha \to 0 \end{matrix}$, $\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$

则有 $0 \xrightarrow{f} \alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} 0$

令 $g = \varphi_\alpha \circ f$. 则 $g: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. $g(0) = 0$. g 全纯双射. 故 $|g'(0)| \leq 1$

② 设 g 的逆映射为 $h = g^{-1}$: $\begin{matrix} \mathbb{D} \to \mathbb{D} \\ 0 \to 0 \end{matrix}$, h 全纯双射. 故 $|h'(0)| \leq 1$

③ $h(g(z)) = z$. $h'(0)g'(0) = 1 \Rightarrow |g'(0)| = |h'(0)| = 1 \Rightarrow g(z) = e^{i\theta}z \quad (\theta \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow f(z) = e^{i\theta}\frac{z + e^{-i\theta}\alpha}{1 + e^{i\theta}\bar{\alpha}z}$ □

问题: 求 $\mathbb{H} = \{Im\, z > 0\}$ 的全纯自同构

想法: $\begin{matrix} \mathbb{H} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{D} \\ z_0 \longrightarrow \alpha \end{matrix}$ 令 $\varphi(z) = \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$

则: $\begin{matrix} \mathbb{H} & \xrightarrow{f} & \mathbb{H} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{F} & \mathbb{D} \end{matrix}$, $F = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 为 $\mathbb{D}$ 的自同构, 故 $Aut(\mathbb{H})$ 与 $Aut(\mathbb{D})$ 为一一对应

定义: $Sl_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1\}$

对 $\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{R})$, 定义 $f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

定理：$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})=\{f_M \mid M\in sl_2(\mathbb{R})\}$

证：设 $f\in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$，$f(\beta)=i$，要证存在 $M\in sl_2(\mathbb{R})$，使 $f=f_M$.

① 构造 f_N，使 $f_N(i)=\beta$，则 $\begin{matrix}\mathbb{H} \xrightarrow{f_N} \mathbb{H} \xrightarrow{f} \mathbb{H}\\ i \to \beta \to i\end{matrix}$

令 $g=f\circ f_N$，$\begin{matrix}\mathbb{H}\to\mathbb{H}\\ i\to i\end{matrix}$

② 令 $F:\begin{matrix}\mathbb{H}\to\mathbb{D}\\ i\to 0\end{matrix}$ 为分式线性变换，则
$$\begin{tikzcd}\mathbb{H} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{H} \arrow[d, "F"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "h"] & \mathbb{D}\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, "h"] & 0\end{tikzcd} \qquad \left(F=-\frac{z-i}{z+i}\right)$$

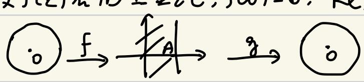
$h\in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，$h(0)=0$.

故 $h(z)=e^{i\theta}z\ (\theta\in\mathbb{R})$，$h=F\circ g\circ F^{-1}$

③ 构造 $M_\theta\in sl_2(\mathbb{R})$，使 f_{M_θ} 满足：
$$\begin{tikzcd}\mathbb{H} \arrow[r, "f_{M_\theta}"] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{H} \arrow[d, "F"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "h=e^{i\theta}z"'] & \mathbb{D}\end{tikzcd} \qquad F\circ f_{M_\theta}\circ F^{-1}=h \qquad \left(M_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right)$$
则 $g=f_{M_\theta}$

$\Rightarrow f=f_{M_\theta}\circ f_N^{-1}=f_{M_\theta N^{-1}} \quad (f_M\circ f_{M'}=f_{MM'})$ □

例：设 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上全纯，$f(0)=0$，$\mathrm{Re}f(z)\le A\ (A>0)$，证明：$|f(z)|\le \frac{2A|z|}{1-|z|}$，$\forall z\in\mathbb{D}$

证：

构造 $g:\begin{matrix}\{\mathrm{Re}\,w<A\}\to\mathbb{D}\\ 0\to 0\\ 2A\to\infty\end{matrix}$ 令 $g(w)=\frac{w}{w-2A}$，则 $g\circ f:\begin{matrix}\mathbb{D}\to\mathbb{D}\\ 0\to 0\end{matrix}$

故 $|g\circ f(z)|\le|z|$，即 $\left|\frac{f(z)}{f(z)-2A}\right|\le|z|$，故 $|f|\le\frac{2A|z|}{1-|z|}$ □

例. 设 $w=f(z)$，$\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯，则

① $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right|\le\left|\frac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}\right|$，$\forall z\in\mathbb{D}$

② $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\le\frac{1}{1-|z|^2}$，$\forall z\in\mathbb{D}$

证：① $$\begin{tikzcd} z_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{z_0}"'] & f(z_0) \arrow[d, "\varphi_{f(z_0)}"] \\ 0 \arrow[r, "F"] & 0\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}\mathbb{D} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{z_0}"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "\varphi_{f(z_0)}"] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "F"] & \mathbb{D}\end{tikzcd}$$ ，$\varphi_a(z)=\frac{z-a}{1-\bar a z}$

则 $F=\varphi_{f(z_0)}\circ f\circ\varphi_{z_0}^{-1}:\begin{matrix}\mathbb{D}\to\mathbb{D}\\ 0\to 0\end{matrix}$，故 $|F(w)|\le|w|$

即 $|\varphi_{f(z_0)}\circ f\circ\varphi_{z_0}^{-1}(w)|\le|w|$，令 $z=\varphi_{z_0}^{-1}(w)$，则有 $|\varphi_{f(z_0)}(f(z))|\le|\varphi_{z_0}(z)|$

故 $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right|\le\left|\frac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}\right|$，$\forall z\in\mathbb{D}$

② 利用 $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|\le\frac{|1-\overline{f(z_0)}f(z)|}{|1-\bar z_0 z|}$，令 $z\to z_0$ □

辐角原理

设 f 在 z_0 处为极点或全纯，则 $f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$，$m\in\mathbb{Z}$，$a_m\neq 0$

若 $m\geq 0$，则 z_0 为 f 的极点．若 $m<0$，则 z_0 为 f 的极点．

定义：记上述 m 为 $\operatorname{ord}_{z_0}f$，即 $\operatorname{ord}_{z_0}f=m$．

设在 $B(0,\delta)$ 中，$f(z)=a_m z^m(1+h(z))$，$a_m\neq 0$，$h(z)$ 在 0 处全纯

则 $f'(z)=m a_m z^{m-1}(1+h(z))+a_m z^m h'(z)$

故 $$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m a_m z^{m-1}(1+h(z))+a_m z^m h'(z)}{a_m z^m(1+h(z))}=\frac{m}{z}+\underbrace{\frac{h'(z)}{1+h(z)}}_{\text{全纯}}$$

故 $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=m=\operatorname{ord}_0 f$$

定理：若 f 在 D 内亚纯，γ 是 D 内简单闭曲线，f 在 γ 上无零点，无极点，

则 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{z\text{在}\gamma\text{内部}}\operatorname{ord}_z f=$ γ 内零点重数之和 $-$ γ 内极点阶数之和 $=N(f,\gamma)-P(f,\gamma)$

证：若 z_0 不是 f 的零点或极点，则 $\frac{f'}{f}$ 在 z_0 点全纯

设 $f(z)$ 在 γ 内的零点和极点为 $\{z_1,\cdots,z_n\}$，则由多连通域 Cauchy 定理知：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'}{f}dz=\sum_{k=1}^n\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_k|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^n\operatorname{ord}_{z_k}f$$

□

绕数（环绕指数，圈数）

设 γ 是闭曲线．设 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$，$z(t)=\rho(t)e^{i\theta(t)}$，$z(a)=z(b)$

则 $$\begin{aligned}\int_\gamma\frac{dz}{z}&=\int_a^b\frac{1}{\rho(t)e^{i\theta(t)}}\left(\rho(t)e^{i\theta(t)}\right)'dt\\&=\int_a^b\frac{1}{\rho(t)e^{i\theta(t)}}\left(\rho'(t)e^{i\theta(t)}+\rho(t)ie^{i\theta(t)}\theta'(t)\right)dt\\&=\int_a^b\frac{\rho'(t)dt}{\rho(t)}+i\int_a^b i\theta'(t)dt\\&=\log\rho(b)-\log\rho(a)+i(\theta(b)-\theta(a))\\&=i\Delta_\gamma\operatorname{Arg}z\end{aligned}$$

故 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma\operatorname{Arg}z=$ 曲线 γ 绕原点的圈数．

故 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)dz}{f(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{df(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma\operatorname{Arg}f(z)$

故 $\boxed{N(f,\gamma)-P(f,\gamma)=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma\operatorname{Arg}f(z)}$　辐角原理

Lec 19

例：$f(z)=(z-1)(z-2)^3(z-4)$，$\gamma: |z|=3$（逆时针定向）

γ 内零点个数 $N=1+3=4$，极点个数 $P=0$

$\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z) = \Delta_\gamma \mathrm{Arg}(z-1) + 3\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(z-2) = 2\pi + 3\cdot 2\pi = 8\pi$

故 $N-P = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z)$

定理：设 $f(z), g(z)$ 在 D 中全纯，在 γ 上 $|g(z)|<|f(z)|$，则 $f(z)$ 与 $f(z)\pm g(z)$ 在 γ 内有相同的零点数

注意：在 γ 上 $|f(z)|>|g(z)|\geq 0$，$|f(z)\pm g(z)|>|f(z)|-|g(z)|>0$，所以 $f, f\pm g$ 在 γ 上都没有零点

只需证 f 与 $f+g$ 在 γ 上的环绕数是一样的（f 与 $f-g$ 完全类似）

证：考虑 $\frac{f+g}{f} = 1+\frac{g}{f}$

$\Delta_\gamma \frac{f+g}{f} = \Delta_\gamma\left(1+\frac{g}{f}\right) \overset{|\frac{g}{f}|<1}{=\!=} 0$

$\Rightarrow \Delta_\gamma(f+g) = \Delta_\gamma f$，即 $N(f+g)=N(f)$ □

定理：若 $f(z), g(z)$ 在 D 中全纯，在 γ 上 $|g(z)|<|f(z)|+|f(z)+g(z)|$，则 f 与 $f+g$ 在 γ 内部有相同的零点数

证：从不等式容易看出 f 与 $f+g$ 在 γ 上没有零点，只需证 $\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f = \Delta_\gamma \mathrm{Arg}(f+g)$，即 $\Delta_\gamma \frac{f+g}{f} = 0$

$\frac{f+g}{f} = 1+\frac{g}{f}$，令 $w=\frac{g}{f}$

条件 $\Leftrightarrow |w|<1+|1+w|$

三角形不等式，不等成立 $\Leftrightarrow$ w 落在实轴且 $w\leq -1$

$\therefore 1+w$ 与实轴负半轴无交，故 $\Delta_\gamma \frac{f+g}{f} = 0$ □

总结：要 $F(z)$ 与 $G(z)$ 在 γ 内部有相同的零点数，只需验证下面条件之一：

① $|F(z)-G(z)|<|F(z)|$，$\forall z\in\gamma$

② $|F(z)-G(z)|<|F(z)|+|G(z)|$，$\forall z\in\gamma$

注意：将"="换为"+"也可以

由于②弱于① ⇝ 只需验证 $|F(z)+G(z)|<|F(z)|+|G(z)|$，$\forall z\in\gamma$

或 $|F(z)-G(z)|<|F(z)|+|G(z)|$，$\forall z\in\gamma$

例：求方程 $z^4-6z+3=0$ 在圆 $|z|<1$ 与 $1<|z|<2$ 内部的个数

证：① γ 为 $|z|=1$，令 $G(z)=z^4-6z+3$，$F(z)=-6z$

在 γ 上，$|F-G|=|z^4+3|\leq|z^4|+3=1+3=4$，$|F|=6|z|=6$，$|F-G|<|F|$（总结①）

$\Rightarrow$ G 与 F 在单位圆内根个数相同 $\Rightarrow$ $|G|$ 在圆 $|z|<1$ 中只有一个根

② 注意，$6z=z^4+3$ 在单位圆 $|z|=1$ 上无根。所以 $z^4-6z+3=0$ 在 $1<|z|<2$ 上的根的个数等于

(在 $|z|<2$ 上根的个数) $-$ (在 $|z|<1$ 上根的个数)

考虑 γ 为 $|z|=2$，令 $G=z^4-6z+3=0$，$F=z^4$

在 γ 上 $|F-G|=|6z-3|\leq 6|z|+3=15$，$|F|=|z|^4=16$，$|F-G|<|F|$

$\Rightarrow$ G 在 $|z|<2$ 中根的个数 $=$ F 在 $|z|<2$ 中根的个数 $=4$

$\therefore$ G 在 $1<|z|<2$ 中根的个数为 3

代数学基本定理

$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$，$a_n\neq 0$

取 γ 为 $|z|=R$，R 很大使得在 γ 上 $|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|\leq|a_{n-1}|R^{n-1}+\cdots+|a_0|=o(R^n)<|a_nz^n|$

由辐角原理，$f(z)=a_nz^n+(a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0)$ 与 a_nz^n 在 $|z|<R$ 中有相同的零点数，为 n

在 $|z|>R$ 上，f 显然无零点，所以 f 在 $\mathbb{C}$ 上恰有 n 个零点。

定理（开映射定理）。若 f 在 Ω 内全纯，非常值，则 f 将开集映为开集

感觉：$f(z)-f(z_0)=a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$，非零首项为主要的，它是开映射就行

证明：设 $w_0=f(z_0)$，要证 f 的象集包含 $B(f(z_0),\varepsilon)$ 对某一充分小的 ε 成立

只需证 $\forall w_1\in B(w_0,\varepsilon)$，存在 $z_1\in\Omega$ s.t. $f(z_1)=w_1$

由 f 零点的离散性，可以假设 $f-f(z_0)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中没有其他零点

令 $\varepsilon_0=\min_{|z-z_0|=\delta}|f(z)-w_0|>0$

取 $w_0\in B(w_0,\varepsilon_0)$，在 $|z-z_0|=\delta$ 上，$|F-G|=|w_0-w_1|<\varepsilon_0\leq|f(z)-w_0|=F$，其中 $F=f-w_0$，$G=f-w_1$

由辐角原理，F 与 G 在 $|z-z_0|<\delta$ 中根的个数相同

$\Rightarrow$ $\exists$ 唯一一个 $z_1\in B(z_1,\delta)$ s.t. $f(z_1)=w_1$ $\square$

第六次习题课

例. 设 f 是 $B(0,R)\setminus\{z_0\}$ 中非常值全纯函数，若 z_0 是零点集的极限，则 z_0 是 f 的本性奇点．

证：利用解析函数的唯一性，首先排除 z_0 是可去奇点的情形．显然 z_0 不是极点． □

利用此结论立即可证：

例. 设 f 是 $B(0,R)\setminus\{z_0\}$ 中的亚纯函数（恒不为0），且 z_0 是极点集的极限点，

则 $\forall A\in\overline{\mathbb{C}}$，$\exists\{z_n\}\to z_0$，$z_n\in B(0,R)\setminus\{z_0\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$．

证：若 $A_0\in\overline{\mathbb{C}}$ 不满足结论，由 z_0 是极点集的极限点知 $A_0\in\mathbb{C}$，且存在 $\delta>0$，$\forall z\in B(z_0,\delta)\subset B(0,R)$，$f(z)\neq A_0$

$\frac{1}{f-A_0}$ 在 $B(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}$ 上全纯非常值，f 极点为 $\frac{1}{f-A_0}$ 零点．由上例知 z_0 是 $\frac{1}{f-A_0}$ 的本性奇点．

$\therefore\exists\{z_n\}\to z_0$，$\frac{1}{f(z_n)-A_0}\to\infty$，即 $f(z_n)\to A_0$，矛盾 □

例. 设 $f\in H(B(0,R))\cap C(\overline{B(0,R)})$，$M=\max\limits_{|z|=R}|f(z)|$，若 $f(z_0)=0$，证明：$R|f(0)|\le(M+|f(0)|)|z_0|$

证：令 $g(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$，则 $g(z)\in H(B(0,R))\cap C(\overline{B(0,R)})$．

由最大模原理，$|g(0)|\le\max\limits_{|z|=R}|g(z)|\le\frac{M}{R-|z_0|}$，即 $\frac{|f(0)|}{|z_0|}\le\frac{M}{R-|z_0|}$ □

例. 求出所有满足 $|f(z)|=1$，$\forall z\in\partial B(0,1)$ 的整函数

证：首先，由解析函数的唯一性，f 在 $B(0,1)$ 中只有有限个零点 $z_1,\cdots,z_n$（不计重数）．

令 $g(z)=f(z)\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1-\bar{z}_kz}{z_k-z}$，$z\in\mathbb{C}$．则 $g(z)\in H(\overline{B(0,1)})$ 且 $g(z)\neq0$，当 $z\in\partial B(0,1)$ 还成立 $|g(z)|=1$

由最大模原理，$|g(z)|\le1$，$\forall z\in\overline{B(0,1)}$

对 $\frac{1}{g}$ 进行同样的论证可知 $|\frac{1}{g}|\le1$，$\forall z\in\overline{B(0,1)}$，那么 $|g(z)|\equiv1\Rightarrow g(z)\equiv e^{i\theta}$，$z\in\mathbb{C}$

即 $f(z)=e^{i\theta}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_kz}$，$\forall z\in\mathbb{C}$，而 f 是整函数，无极点，故只能有 $z_k=0$．

于是形如 $e^{i\theta}z^n$ 的函数即为满足条件的全部整函数

例. 设 $P_k(z)$ 为 k 次多项式，$|z|\le1$ 时 $|P_k(z)|\le M$，证明 $|z|\le1$ 时 $|P_k'(z)|\le ekM$

证：由最大模原理，只需考虑 $|z|=1$ 的情形，利用作业题4.5.32的结果，$\forall R>1$ 有

$$|P_k'(z)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{P_k(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|\le\frac{MR^k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R}{|\zeta-z|^2}d\theta\xlongequal{\text{徽积分事实}}MR^k\cdot\frac{R}{R^2-|z|^2}=MR^k\frac{R}{R^2-1}$$

令 $R=\sqrt{1+\frac{1}{k}}$，得 $|P_k'(z)|\le Mk\cdot(1+\frac{1}{k})^{\frac{k+1}{2}}\le Mk\cdot(1+\frac{1}{k})^k\le ekM$ □

例 设D为$\mathbb{C}$中有界区域. $f\in H(D)\cap \mathbb{C}(\overline{D})$. $z\in\partial D$时$|f(z)|=R>0$. 则$f(D)=B(0,R)$.

证: 首先由最大模原理. $z\in D$时$|f(z)|<R$, 即$f(D)\subset B(0,R)$, 且由开映射定理$f(D)$为开集

设$w_0\in\partial f(D)$, 则$\exists\{z_n\}\in D$ s.t $f(z_n)\longrightarrow w_0$

对$\{z_n\}$取子列$z_n\to z_0$, 则$f(z_0)=w_0$

若$z_0\in D$, 则w_0必为$f(D)$内点, 与$w_0\in\partial f(D)$矛盾. 故$z_0\in\partial D\Rightarrow |w_0|=R$

$\Rightarrow f(D)=B(0,R)$ $\square$

Lec 20

开映射定理推论：设 $f(z)$ 在区域 Ω 中全纯，非常值，则 $|f(z)|$ 在 Ω 内部不能达到最大值 □

若 f 为单射，则 f 开映射 $\Leftrightarrow$ f^{-1} 连续映射

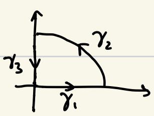
例. 求证：$P(z)=z^4+2z^3-2z+10=0$ 在每个象限中恰有一根

证：① 实轴上 $z=x$，$P(x)=x^2(x^2+2x+1)-x^2-2x-1+11=(x^2-1)(x^2+2x+1)+11$ 无根

② 虚轴上，$z=iy$，$P(iy)=(y^4+10)+i(-2y^3-2y)$ 无根

③ 若 z 是根，则 $\bar{z}$ 是根（根关于实轴对称分布）

只需证第一象限恰有一个根



R很大

$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} P(z)=\frac{1}{2\pi}(\Delta_{\gamma_1}+\Delta_{\gamma_2}+\Delta_{\gamma_3})\operatorname{Arg} P(z)$

$\Delta_{\gamma_1}\operatorname{Arg} P(z)=0$，

$\Delta_{\gamma_3}\operatorname{Arg} P(z)=\operatorname{Arg} P(0)-\operatorname{Arg} P(iR)=o(1)$，

$\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg} P(z)=\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg} z^4\left(1+\frac{2z^3-2z+10}{z^4}\right)=\Delta_{\gamma_2}\operatorname{Arg} z^4+\Delta_{\gamma_2}\left(1+\frac{2z^3-2z+10}{z^4}\right)$

$=4\cdot\frac{\pi}{2}+o(1)=2\pi+o(1)$

$\Rightarrow \Delta_\gamma \operatorname{Arg} P(z)=2\pi+o(1)$，必为 2π 整数倍，所以 $o(1)=0$，$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} P(z)=2\pi$

所以 γ 围成的区域中恰有一个零点，故第一象限恰有一个根 □

例：设 $0<a_0<a_1<\cdots<a_n$，求证：$a_0+a_1\cos\theta+a_2\cos3\theta+\cdots+a_n\cos n\theta$ 在 $(0,2\pi)$ 中有 $2n$ 个不同的零点

证：① $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 在正实轴上取值 >0，无零点

考虑 $(1-z)f(z)=a_0+(a_1-a_0)z+\cdots+(a_n-a_{n-1})z^n-a_nz^{n+1}$

若 $f(z_0)=0$，则 $a_0+(a_1-a_0)z_0+\cdots+(a_n-a_{n-1})z_0^n-a_nz_0^{n+1}=0$

由于 z_0 不能是非负实数，故 $a_0,(a_1-a_0)z_0,\cdots,(a_n-a_{n-1})z_0^n$ 辐角不能都相同

$a_n|z_0|^{n+1}=|a_nz_0^{n+1}|=|a_0+(a_1-a_0)z_0+\cdots+(a_n-a_{n-1})z_0^n|$

$<a_0+(a_1-a_0)|z_0|+\cdots+(a_n-a_{n-1})|z_0|^n$

故 $a_n(|z_0|^{n+1}-|z_0|^n)+a_{n-1}(|z_0|^n-|z_0|^{n-1})+\cdots+a_0(|z_0|-1)<0$

即 $(|z_0|-1)(a_n|z_0|^n+a_{n-1}|z_0|^{n-1}+\cdots+a_0)<0 \Rightarrow |z_0|<1$

$\Rightarrow$ $f(z)$ 所有的零点都落在单位圆内部

② 设 C 为 $|z|=1$，$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)=n$

令 $\beta=f(C)$，则 β 绕 0 n 圈，故 β 与虚轴至少相交 $2n$ 次

故至少有 $2n$ 个 θ 使得 $f(z)=f(e^{i\theta})$ 在虚轴上 $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(f(e^{i\theta}))=0$

③ $z=e^{i\theta}$，$|z|=1$.

$0=a_0+a_1\cos\theta+\cdots+a_n\cos n\theta$

$=a_0+a_1\cdot\frac{1}{2}(z+z^{-1})+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{2}(z^n+z^{-n})$

$=\frac{1}{2}z^{-n}(a_n+a_{n-1}z+\cdots+2a_0z^n+\cdots+a_nz^{2n})$ 在 $|z|=1$ 上至多 $2n$ 个零点

故 $\operatorname{Re}(f(e^{i\theta}))=0$ 在 $(0,2\pi)$ 上有且仅有 $2n$ 个不同的实根 □

单叶函数

定理：设 $f(z)$ 在 D 中全纯，$f(0)=0$，若 0 是 $f(z)$ 的 m 级零点，则对任意充分小的 $\rho>0$，存在 $\delta>0$，

当 $0<|w_0|<\delta$ 时，$f(z)-w_0$ 在 $|z|<\rho$ 中有 m 个不同零点.

证：① 由于 $f(z)$，$f'(z)$ 为非常值的全纯函数，故对任意充分小的 ρ，$f(z)$ 与 $f'(z)$ 在 $0<|z|<\rho$ 上无零点

② w_0 充分小，$F(z)=f(z)$、$G(z)=f(z)-w_0$ 在 $|z|<\rho$ 内零点个数相同

原因：令 $\delta=\min\limits_{|z|=\rho}|f(z)|>0$，当 $0<|w_0|<\delta$ 时 $|F-G|=|w_0|<\delta<|f(z)|=|F|$

③ $f(z)-w_0=0$ 有 m 个根（有可能是重根）

由于 $f'(z)$ 在 $0<|z|<\rho$ 中无零点，故没有重根

$\therefore f(z)-w_0$ 在 $|z|<\rho$ 中有 m 个不同零点 □

推论：若 $f(z)$ 在 D 上全纯，非常数，则

① 若 D 为开集，则 $f(D)$ 为开集

② 若 D 为区域，则 $f(D)$ 为区域

证：连续函数把连通集映为连通集 □

定理：若 $f(z)$ 在 D 中单叶全纯，则 $f'(z)\neq 0$，$\forall z\in D$

证：对 $f(z)-f(z_0)$ 用刚才的定理. □

例：$f(z)=e^z$，$f'(z)=e^z\neq 0$，但 f 在 $\mathbb{C}$ 上不单叶

$\rightsquigarrow$ 定理：若 $f(z)$ 在 D 中全纯，$f'(z_0)\neq 0$，则 $\exists\,\varepsilon>0$，f 在 $B(z_0,\varepsilon)$ 上单叶.

证明：设 $z_0=0$，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，$|z|<R$

$f'(0)=a_1\neq 0$，$f'(z)=a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots$，$|z|<R$

故 $\exists\ 0<\delta<R$，当 $\rho<(0,\delta)$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|\rho^{n-1}<\frac{|a_1|}{2}$

$z_1,z_2\in B(0,\delta)\setminus\{0\}$

$$
\begin{aligned}
|f(z_1)-f(z_2)|&=\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z_1^n-z_2^n)\right|\\
&=|a_1(z_1-z_2)+a_2(z_1^2-z_2^2)+\cdots|\\
&=|z_1-z_2|\left|a_1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+\cdots+z_2^{n-1})\right|\\
&\geq|z_1-z_2|\left(|a_1|-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\rho^{n-1}\right)>0
\end{aligned}
$$
$\square$

(也可以用实的逆映射定理)

反函数定理：若 $w=f(z)$ 在 D 上单叶全纯，$G=f(D)$，则反函数 $z=g(w)$ 在 G 上单叶全纯，且 $g'(w)=\frac{1}{f'(z)}$.

证：已知 $g=f^{-1}$ 是良定义的连续函数（f 开映射），只需验证 g 在 G 中处处可导

固定 $w_0\in G$，考虑 $\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}=\lim_{w\to w_0}\frac{1}{\frac{w-w_0}{g(w)-g(w_0)}}=\lim_{w\to w_0}\frac{1}{\frac{f(g(w))-f(g(w_0))}{g(w)-g(w_0)}}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}=\frac{1}{f'(z_0)}$ $\square$

留数（残数）

定义：设 f 在 $0<|z-a|<r$ 上全纯，

$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}f(z)\,dz$，$0<\rho<r$（与 ρ 的选取无关）称为 f 在 $z=a$ 的留数

$f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n\Rightarrow \mathrm{Res}(f,a)\xlongequal{\text{一致收敛}}\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^n\,dz=c_{-1}$

Lec 21

若 $f=\frac{\varphi}{\psi}$, $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$

$$\mathrm{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

若 $f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$, $g(a)\neq 0$.

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{g(z)}{(z-a)^m}dz=\frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(a)=\frac{1}{(m-1)!}\left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)}\Big|_{z=a}$$

例. 设 $f(z)=\sin\frac{1}{z}$, 求 $\mathrm{Res}(f,0)$

解: $\sin w=w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}+\cdots$ $\quad\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5}+\cdots$

故 $\mathrm{Res}(f,0)=1$

例. $f(z)=\frac{\sin z}{z^4-1}$. 求 $\mathrm{Res}(f,1)$

解: $f(z)=\frac{\sin z}{(z-1)(z+1)(z^2+1)}$

$\varphi=\sin z$. $\psi=z^4-1$ $\quad a=1$. $\varphi(1)\neq 0$. $\psi(1)=0$, $\psi'(1)=4$

$\mathrm{Res}(f,1)=\frac{\varphi(1)}{\psi'(1)}=\frac{\sin 1}{4}$.

定理. $f(z)$ 在 γ 内部 $D\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上全纯, 在 $\bar{D}\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上连续, 则 $\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a)$ □

定义: 若 f 在 $|z|>R$ 上全纯, 则 $\mathrm{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}f(z)dz$, $\rho>R$

定理: 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上全纯, 则 $f(z)$ 在所有孤立奇点(包括 ∞) 的留数之和为 0 □

例. 计算 $I=\int_{|z|=2}\frac{z^5}{1+z^6}dz$

解: 法一. $\int_{|z|=2}\frac{z^5}{(z^3+i)(z^3-i)}dz$ 在 $\{|z|\leq 2\}$ 有 6 个极点, 分别计算留数, 再求和

法二. $I=-2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty)$

$$\frac{z^5}{1+z^6}=\frac{z^5}{z^6}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^6}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^{12}}+\cdots\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^7}+\cdots$$

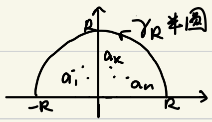
故 $\mathrm{Res}(f,\infty)=-1$ $\quad\Rightarrow I=2\pi i$.

实积分计算

① $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

定理：设 $f(z)$ 在 $\{\operatorname{Im} z>0\}\backslash\{a_1,\cdots,a_n\}$ 全纯，在 $\{\operatorname{Im} z\geq 0\}\backslash\{a_1,\cdots,a_n\}$ 上连续．若 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f,a_k)$$

证：

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

注意 $\underbrace{\int_{-R}^{R} f(x)dx}_{f(z)dz}+\underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)dz}_{\downarrow\ 0} = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,a_k)$ □

推论：若 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$，P,Q 无公因子，Q 无实根，$\deg Q-\deg P\geq 2$，则

则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},a_k\right)$，其中 a_k 为 $Q(z)$ 在上半平面的根 □

例．计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$

解：$\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}=\frac{1}{(z+i)^{n+1}(z-i)^{n+1}}$．$a=i$．

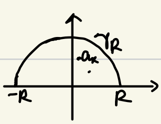
$$I=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}},i\right)=2\pi i\cdot\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right)^{(n)}\Big|_{z=i}=2\pi\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 2^{2n+1}}$$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx$，$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\sin\alpha x\,dx$．($\alpha>0$ 实数)

定理：设 $f(z)$ 在 $\{\operatorname{Im} z>0\}\backslash\{a_1,\cdots,a_n\}$ 上全纯，在 $\{\operatorname{Im} z\geq 0\}\backslash\{a_1,\cdots,a_n\}$ 上连续，若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$，则对 $\forall\alpha>0$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i\sum_k\operatorname{Res}(e^{i\alpha z}f(z),a_k)$$

证：考察 $e^{i\alpha z}f(z)$



$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\alpha x}dx+\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(e^{i\alpha z}f(z),a_k)$$

$$\left|\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z}f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} e^{i\alpha R(\cos\theta+i\sin\theta)}f(Re^{i\theta})Re^{i\theta}i\,d\theta\right|$$

$$=R\left|\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta}\cdot e^{i(\theta+\alpha R\cos\theta)}\cdot f(Re^{i\theta})d\theta\right| \quad \text{令 } M_R=\max_{\gamma_R}|f(z)|\xrightarrow{R\to\infty}0$$

$$\leq M_R\cdot R\int_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta = 2M_R\cdot R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta$$

直接截断估计式 $\leq 2M_R\cdot R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\cdot\frac{2}{\pi}\theta}d\theta = 2M_R\cdot R\cdot\frac{1}{\frac{2\alpha R}{\pi}}(1-e^{-\alpha R})\leq\frac{\pi}{\alpha}M_R\to 0$ □

例．$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}dx$，$a>0$，$b>0$

解：考察 $\frac{e^{iaz}}{b^2+z^2}$，极点 $z=\pm bi$．上半平面只有 bi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iaz}}{b^2+z^2}dz=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iaz}}{b^2+z^2},bi\right)=\frac{\pi}{b}e^{-ab}$$

取实部，得 $I=\frac{\pi}{b}e^{-ab}$

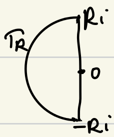
第七次习题课

例. 若非常数多项式 $P(z)$ 的根都在右半平面中，则 $P'(z)$ 的根也全在右半平面中

证：直接计算 $p'(z)$，$\dfrac{p'(z)}{p(z)}$ □

例. 若 $\lambda>1$，则 $z+\lambda=e^z$ 在 $\{\operatorname{Re} z<0\}$ 中只有一个根且为实根.

证：令 $R>\lambda+1$，考虑如下闭曲线 γ（Γ_R 为半圆）



令 $F(z)=e^z-z-\lambda$，$G(z)=z+\lambda$，则在 γ 上 $|F(z)+G(z)|=|e^z|\le 1<|G(z)|$

$\therefore$ $F(z)$ 与 $G(z)$ 在 γ 内部零点个数相同，为 1.

令 $R\to\infty$，$z+\lambda=e^z$ 在 $\{\operatorname{Re} z<0\}$ 中只有一个根

$F(0)=1-\lambda<0$，$F(-\infty)=+\infty$ $\therefore$ 有实根 □

（同理可证：设 $\lambda>1$，则 $z=\lambda-e^{-z}$ 在 $\{\operatorname{Re} z>0\}$ 中只有一根且为实根）

例. 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是 $B(0,1)$ 中解析函数，且 $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\le|a_1|>0$，则 f 为单叶函数.

证：令 $z_0\in B(0,1)$，$h(z)=f(z)-f(z_0)$，$g(z)=a_1(z-z_0)$

当 $|z|=r>|z_0|$ $(r<1)$，$|h(z)-g(z)|=\left|\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_nz_0^n\right|\le\max_{[z_0,z]}\left|\left(\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\right)'\right||z-z_0|$

$=\max_{[z_0,z]}\left|\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}\right||z-z_0|<|a_1(z-z_0)|=|g(z)|$

$\therefore$ $h(z)$ 与 $g(z)$ 在 $|z|<r$ 中有相同零点数，为 1　令 $r\to1$，则 f 在 $B(0,1)$ 中单叶 □

例. 设 D 为区域，γ 为 D 内可求长曲线，内部 $D_1\subset D$，设 $f\in H(D)$ 且单叶，则 $f(D_1)=f(\gamma)$ 内部 $=D_2$

证：设 $f(z_0)\in D_2$. 由辐角原理，$f(z)-f(z_0)$ 在 D_1 中零点个数

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-f(z_0)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{df(z)}{f(z)-f(z_0)}=\frac{1}{2\pi i}\left(\pm\int_{f(\gamma)}\frac{dz}{z-f(z_0)}\right)\ (f(\gamma)\text{ 定向})$$

$\therefore$ f 保持 γ 的正定向，$N=1\xRightarrow{f\text{单叶}}z_0\in D_1$，进而 f 把内部映到内部，即 $f(D_1)=D_2$ □

由开映射定理，全纯函数将区域映射到区域

$\rightsquigarrow$ 在什么条件下，f 还能保持单连通？

例. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 单连通，f 为 D 中单叶全纯映射，则 $G=f(D)$ 为单连通区域.

证：设 Γ 为 G 中任一简单闭曲线. 由于 f 单叶，f 的逆映射 $z=g(w)=f^{-1}(w)$ 在 Γ 内部单叶全纯，且把 Γ 映为 D 中简单闭曲线 γ. 由于 D 单连通，γ 内部 $D_1\subset D$，由上例结论，$G_1=f(D_1)\subset f(D)=G$，故 G 单连通 □

几个单叶函数论的经典问题

$B(0,1)$ 中单叶函数类 S：$f(0)=0$, $f'(0)=1$ 可展开为 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，$f(z)$ 称为 Koebe 函数.

Bieberbach 曾经猜测 $|a_n|\le n$，且取等 $\Leftrightarrow f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}=z(1+2e^{i\theta}z+\cdots+(n+1)e^{in\theta}z^n+\cdots)$

Bieberbach 本人证明了 $|a_2|\le 2$ (1916)，直到 1984 年这一问题才被 Branges 彻底解决

例1. 设 $f\in S$，则 $|a_2|\le 2$，取等时 $f(z)$ 为 Koebe 函数.

证：引理(面积原理, Gronwall, 1914)：若 $g(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^{-n}$ 为 $\mathbb{C}\setminus\overline{B(0,1)}$ 中单叶全纯函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2\le 1$.

引理证明：$\frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}dz=\frac{1}{2i}\int_\gamma(x-iy)(dx+idy)=\frac{1}{2i}\int_\gamma(xdx+ydy)+\frac{1}{2}\int_\gamma(xdy-ydx)=\gamma$ 内部面积

$\forall r>1$，利用此面积公式直接计算.

$|g\{|z|=r\}$ 内部$|=\int_{|z|=r}\overline{g(z)}g'(z)dz=\pi r^2-\pi\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}\ge 0$，令 $r\to 1$ 即得. □

对原问题，令 $h(z)=\frac{f(z^2)}{z^2}=1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^{2n-2}$.

由于 f 单叶且 $f(0)=0$. $h(z)$ 在 $B(0,1)$ 中无零点 $\Rightarrow\exists\sqrt{h}$ 为单值全纯分支. 令 $g(z)=z\sqrt{h(z)}$，则 $g^2(z)=f(z^2)$

用待定系数法求出 $g(z)=z+\frac{a_2}{2}z^3+\cdots$，单叶 ($g(z_1)=g(z_2)\Rightarrow f(z_1^2)=f(z_2^2)\Rightarrow z_1=\pm z_2$. 若 $z_1=-z_2$，

则 $g(z_1)=-g(z_2)\Rightarrow g(z_1)=0\Rightarrow f(z_1^2)=0\Rightarrow z_1=0=z_2$)

令 $g_0(z)=[g(\frac{1}{z})]^{-1}=z-\frac{a_2}{2}z^{-1}+\cdots$ 由引理. $2\cdot\left|\frac{a_2}{2}\right|^2\le 1\Rightarrow|a_2|\le 2$

取等时必有 $g_0(z)=z-e^{i\theta}z^{-1}$，还原得 $f(z)=z(1+2e^{i\theta}z+\cdots+(n+1)e^{in\theta}z^n+\cdots)$ □

(*) 通过构造全纯函数满足 S 的条件，利用此例可以精确地证明一些结论.

以上结论立即给出

例. 设 $f\in S$，则 $\{|z|<\frac{1}{4}\}\subset f(B(0,1))$，且 $\frac{1}{4}$ 是最佳常数

证：设 $w\in\mathbb{C}\setminus f(B(0,1))$，则 $w\ne 0$，考虑 $g(z)=\frac{wf(z)}{w-f(z)}\overset{f=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n}{=\!=\!=}z+(a_2+\frac{1}{w})z^2+\cdots\in S$

由上例，$|a_2+\frac{1}{w}|\le 2\overset{|a_2|\le 2}{\Longrightarrow}|w|\ge\frac{1}{4}$，故 $\{|z|<\frac{1}{4}\}\subset f(B(0,1))$

容易看出 Koebe 函数 $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ 像集为 $(-\infty,-\frac{1}{4}]$ □

事实上可以进一步证明，当 $f\in S$ 时有最佳估计

$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\le|f(z)|\le\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$，$z\in B(0,1)$. 且取等 $\Leftrightarrow f$ 为 Koebe 函数

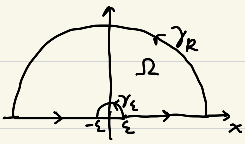
idea：考虑 $g(z)=\dfrac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right)-f(z_0)}{(1-|z|^2)f'(z)}$.

Lec 22

例. 求 Dirichlet 积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ ($f(x)$ 有奇点)

解: (实变办法: Feynman's trick. $\int_0^{+\infty}e^{-sx}\frac{\sin x}{x}dx$. 令 $r\to 0^+$)

$I=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right\}$. 考察 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iz}}{z}dz$



$\int_{\partial\Omega}\frac{e^{iz}}{z}dz=0 \Rightarrow \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz$

在 γ_ε 上, 令 $z=\varepsilon e^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$, $\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_0^{\pi}e^{i\varepsilon e^{i\theta}}i\,d\theta \xrightarrow{\varepsilon\to 0}\pi i$

另一方面 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$ (回顾. $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$. $\alpha>0$, 则 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}e^{i\alpha z}f(z)dz=0$)

取极限 $(\varepsilon\to 0, R\to+\infty)$. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iz}}{z}dz=\pi i$, $\therefore I=\pi$

③ $\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$

$\downarrow$

有理函数

例: $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta}$

在单位圆周 $|z|=1$ 上, $z=e^{i\theta}$, $\frac{dz}{z}=i\,d\theta$, $\cos\theta=\frac{z+\bar z}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$, $\sin\theta=\frac{z-\bar z}{2i}=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$

$$\frac{d\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta}=\frac{dz}{iz}\cdot\frac{1}{3+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}+\frac{2(z-\frac{1}{z})}{2i}}=\frac{2dz}{(2+i)z^2+6iz+(-2+i)}=\frac{2dz}{(2+i)(z+1+2i)(z+\frac{1+2i}{5})}$$

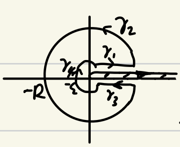
极点 $a_1=-1-2i$, $a_2=-\frac{1+2i}{5}$. 只有 a_2 落在单位圆内部

所以 $\int_{|z|=1}\frac{2dz}{(2+i)(z+1+2i)(z+\frac{1+2i}{5})}=2\pi i\,\mathrm{Res}(f,-\frac{1+2i}{5})=2\pi i\cdot\frac{2}{(2+i)(-\frac{1+2i}{5}+(1+2i))}=\pi$

多值函数相关积分

例. 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^\alpha}$, $0<\alpha<1$

解: 考察 $\frac{1}{(1+z)z^\alpha}$, z^α 多值, 枝点 $0,\infty$



Key hole contour. $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ 上 z^α 可以取单值分枝

$f(z)$ 在 γ 内部有极点 $z=-1$, $\int_\gamma F(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(F(z),-1)$ (*)

$\int_{\gamma_1}F(z)dz=\int_\varepsilon^R\frac{dx}{(1+x)x^\alpha}\longrightarrow\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x)x^\alpha}$ $(\varepsilon\to 0, R\to\infty)$

$\int_{\gamma_3}F(z)dz=\int_R^\varepsilon\frac{1}{(1+x)z^\alpha|_{z=x_F}}dx\longrightarrow\frac{-1}{e^{2\pi\alpha i}}\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x)x^\alpha}$

$\left|\int_{\gamma_2}\frac{dz}{(1+z)z^\alpha}\right|\le\int_{\gamma_2}\frac{|dz|}{|1+z||z|^\alpha}\le\frac{2\pi R}{R^\alpha(R-1)}\longrightarrow 0$ $(R\to\infty)$

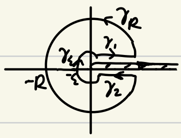
$\left|\int_{\gamma_4}\frac{dz}{(1+z)z^\alpha}\right|\le\int_{\gamma_4}\frac{|dz|}{|1+z||z^\alpha|}\le 2\int_{\gamma_4}\frac{|dz|}{|z|^\alpha}\le\frac{2\cdot\pi\varepsilon}{\varepsilon^\alpha}\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$

(*) 取极限，$(1-e^{-2\pi\alpha i})I = 2\pi i\cdot e^{-\pi\alpha i}$

$$I = \frac{\pi}{\frac{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}{2i}} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

例. 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx$

解: 考察 $F(z)=\frac{\log z}{(1+z^2)^2}$，若仍取上例的围道



$\int_{\gamma_\varepsilon}F(z)dz\to 0,\ \varepsilon\to 0$

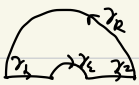
$\int_{\gamma_R}F(z)dz \to 0,\ R\to\infty$

$\int_{\gamma_1}F(z)dz\to I$

$\int_{\gamma_2}F(z)dz \to -\int_0^\infty \frac{\log z|_x}{(1+x^2)^2}dx = -\int_0^\infty\frac{\log x+2\pi i}{(1+x^2)^2}dx = -I-2\pi i\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^2}dx.$

要算的I被抵消了!

取曲线



$\int_{\gamma_2}F(z)dz \xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\to 0} I$

$\int_{\gamma_1}F(z)dz\to\int_{-\infty}^0\frac{\log z|_{z=x}}{(1+x^2)^2}dx = \int_{-\infty}^0\frac{\log|x|+\pi i}{(1+x^2)^2}dx = I+\pi i\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$

$\int_{\gamma_\varepsilon}F(z)dz\to 0,\ \varepsilon\to 0.$ $\int_{\gamma_R}F(z)dz\to 0,\ R\to\infty$

$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_\varepsilon\cup\gamma_R}F(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(F,i)$ (*)

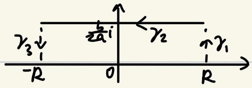
(*) 取极限，$2I+\pi i\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^2}dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}(F,i)$

$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{4}$

Poisson 积分和 Fresnel 积分

Poisson 积分 $I=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx,\ a>0$ （热方程中重要）

取 $f(z)=e^{-az^2}$



$\int_{-R}^R e^{-ax^2}dx+\int_{\gamma_1}e^{-az^2}dz+\int_{\gamma_2}e^{-az^2}dz+\int_{\gamma_3}e^{-az^2}dz = 0$ (*)

$\int_{\gamma_1}e^{-az^2}dz,\ \int_{\gamma_3}e^{-az^2}dz \to 0,\ R\to\infty$

当 $z\in\gamma_2$ 时 $z=x+\frac{b}{2a}i$，$z^2=x^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b}{a}xi$，$e^{-az^2}=e^{-a(x^2-\frac{b^2}{4a^2})-bxi}=e^{\frac{b^2}{4a}}\cdot e^{-ax^2}(\cos bx - i\sin bx)$

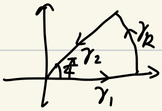
$\Rightarrow \int_{\gamma_2}e^{-az^2}dz = -e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-R}^R e^{-ax^2}(\cos bx-i\sin bx)dx$

(*) 取极限，$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx = e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}(\cos bx - i\sin bx)dx$

$\Rightarrow I = e^{-\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}dx = e^{-\frac{b^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Fresnel 积分 $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$, $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$

取函数 $f(z)=e^{iz^2}$ (整函数)



$$\int_0^R e^{ix^2}dx + \int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz + \int_{\gamma_2} e^{iz^2}dz = 0 \quad (*)$$

当 $z\in\gamma_R$, $z=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, $z^2=R^2e^{2i\theta}=R^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

$$|e^{iz^2}| = |e^{-R^2\sin 2\theta + iR^2\cos 2\theta}| = e^{-R^2\sin 2\theta} \le e^{-R^2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot 2\theta}$$

$$\left|\int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4R^2\theta}{\pi}}\cdot R\,d\theta = \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})$$

$z\in\gamma_2$, $z=re^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1+i}{\sqrt2}r \Rightarrow z^2=ir^2 \Rightarrow iz^2=-r^2$

$$\int_{\gamma_2} e^{iz^2}dz = -\int_0^R e^{-r^2}e^{i\frac{\pi}{4}}dr = -e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^R e^{-r^2}dr \to -e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot\frac{\sqrt\pi}{2}$$

$R\to\infty$, $\int_0^\infty e^{ix^2}dx = e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot\frac{\sqrt\pi}{2} = \frac{1+i}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt\pi}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx = \int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx = \frac12\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Lec 23

全纯开拓

定义：设 f 在区域 D 中全纯，若存在区域 G，$D\subset G$，以及 G 上的全纯函数 F 使得 $F|_D=f$，则称 F 为 f 在 G 上的全纯开拓

例. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$，$D=\{|z|<1\}$

$F(z)=\frac{1}{1-z}$，$G=\mathbb{C}\setminus\{1\}$

则 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在 G 上的全纯开拓.

问题：全纯函数在哪些情况下可开拓？

定理（Painlevé 原理）设 Ω 被 γ 分为两个区域 Ω_1,Ω_2，f 在 Ω 内连续，在 Ω_1,Ω_2 内全纯，则 f 在 Ω 上全纯.

证：利用 Morera 定理. 即使 Ω 的拓扑复杂，只需对 γ 每一点附近考虑 □

推论：若 f_1,f_2 分别在 Ω_1,Ω_2 上全纯，在 $\Omega_1\cup\gamma$，$\Omega_2\cap\gamma$ 上连续，且 $f_1|_\gamma=f_2|_\gamma$，则 $F(z)=\begin{cases} f_1(z), & \forall z\in\Omega_1\cup\gamma \\ f_2(z) & \forall z\in\Omega_2\cup\gamma\end{cases}$

是 $\Omega_1\cup\Omega_2\cup\gamma$ 上的全纯函数 □

定理（Schwarz 对称原理）设 D 关于实轴对称，若 f 满足

① f 在 $D\cap\{\mathrm{Im}\,z>0\}$ 上全纯

② f 在 $D\cap\{\mathrm{Im}\,z\geq 0\}$ 上连续

③ f 在 $D\cap\{\mathrm{Im}\,z=0\}$ 上取实值

则 $F(z)=\begin{cases} f(z), & \forall z\in D\cap\{\mathrm{Im}\,z\geq 0\} \\ \overline{f(\bar z)} & \forall z\in D\cap\{\mathrm{Im}\,z<0\}\end{cases}$ 是 D 上的全纯函数.

证：设 $z\in D\cap\{\mathrm{Im}\,z<0\}$，$w=\bar z\in D\cap\{\mathrm{Im}\,z>0\}$

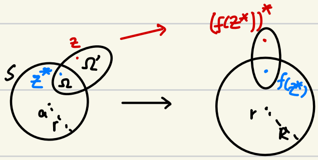
$\frac{\partial}{\partial\bar z}F(z)=\frac{\partial}{\partial\bar z}\overline{f(\bar z)}=\overline{\frac{\partial}{\partial z}f(\bar z)}=\overline{\frac{\partial}{\partial\bar w}f(w)}=\bar 0=0 \Rightarrow F$ 在 $D\cap\{\mathrm{Im}\,z<0\}$ 上全纯 ··· □

定理. 设 ① Ω 与 Ω' 关于圆 $|z=r|$ 对称

② $f(z)$ 在 Ω 内全纯，且在 $\Omega\cup S$ 上连续

③ $f(S)$ 为一段圆弧 Γ

④ Γ 的圆心 $b\notin f(\Omega)$



则 $f(z)$ 可全纯开拓到 $\Omega\cup S\cup\Omega'$

回忆：点 z 关于 $|z-a|=r$ 的对称点为 $z^*=a+\frac{r^2}{\bar z-\bar a}$

证：① 设 $z\in\Omega'$，z^* 为其对称点. $F(z)=(f(z^*))^*=b+\frac{R^2}{\overline{f(a+\frac{r^2}{\bar z-\bar a})}-\bar b}$

② 下证 1° $F(z)$在S附近连续　2° $F(z)$在Ω'内全纯

1° 若$z_0\in S$，$z\in\Omega'$，$z\to z_0$

$(z')^*\in\Omega$，$(z')^*\to z_0 \Rightarrow f((z')^*)\to f(z_0) \Rightarrow \overline{f((z')^*)}^*\to(f(z_0))^*=f(z_0)=F(z_0)$

所以 $\lim\limits_{\substack{z'\in\Omega' \\ z'\to z_0}} F(z')=F(z_0)$，$F$在$S$上连续

2° 若$z\in\Omega'$，则$z^*\in\Omega$

$\frac{\partial}{\partial \bar z}f(z)=R^2\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{1}{\overline{f(z^*)}-\bar b}\right)=R^2\,(-1)\cdot\frac{1}{(\overline{f(z^*)}-\bar b)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar z}\overline{f(z^*)}$

$\frac{\partial}{\partial z}f(z^*)=f'(z^*)\frac{\partial}{\partial z}z^*=f'(z^*)\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(a+\frac{r^2}{\bar z-\bar a}\right)=0$

$\Rightarrow F$在Ω'内全纯 $\square$

幂函数的全纯开拓

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，收敛半径$R$，则$f$在$D=\{|z|<R\}$上全纯.

定义：① 正则点. 若$\zeta_0\in\partial D$且存在ζ_0的邻域$B(\zeta_0,\delta)$及其上全纯函数$g(z)$ s.t. $f(z)=g(z)$，$\forall z\in D\cap B(\zeta_0,\delta)$

② 奇异点（非正则点）

例. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$，$D=\{|z|<1\}$. ∂D上只有1是奇异点.

定理：在幂级数的收敛圆周上至少有一个奇异点

证：反证. 若$C_R=\{|z|=R\}$是收敛圆周的边界且每个点都是正则点.

$\bigcup\limits_{z\in C_R}B(z,\delta)\supset C_R$，存在有限子覆盖 $\bigcup\limits_{z_k\in C_R}B(z_k,\delta_k)\supset C_R$

在$B(z_k,\delta_k)$上有全纯函数f_k s.t. $(f,D)\sim(f_k,B(z_k,\delta_k))=(f_k,D_k)$

（注：$(f,D)\sim(g,\Omega)\Leftrightarrow f=g$ on $D\cap\Omega$）

定义$g(z)=\begin{cases}f(z), & z\in D\\ f_k(z), & z\in D_k\end{cases}$，$D_k\cap D_{k'}$上的单值性由唯一性定理保证（延拓的唯一性）

g在$D\cup\left(\bigcup_{k=1}^{N}B(z_k,\delta_k)\right)\supset\bar D$上全纯 $\Rightarrow B(z_0,R+\varepsilon)\subset\Omega$

$\Rightarrow g(z)$在$B(z_0,R+\varepsilon)$上可以展开成幂级数，这和R是收敛半径矛盾 $\square$

第八次习题课

设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 单连通，f 在一些孤立奇点外全纯

则 f 有原函数 $\Leftrightarrow$ f 沿任意不过奇点的简单闭曲线的积分为 0

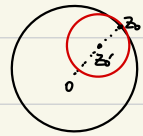
因此，$Res(f, z_k)$ 不是阻碍 f 有原函数的原因，我们只能保证 $g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) \frac{1}{z - z_k}$ 有原函数.

Lec 24

如何寻找幂级数在$|z|=R$上的奇异点? $z_0\in\partial B(0,R)$

① 若 $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$, 则 z_0 是奇异点

② 若 $\lim_{z\to z_0}|f(z)|\neq+\infty$, 如何判断?



将 $f(z)=\sum a_n z^n$ 在 z_0' 处展开, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0')}{n!}(z-z_0')^n$.

则其收敛半径 $\rho\geq R-|z_0'|$

若 $\rho>R-|z_0'|$, 则 $f(z)$ 在 z_0 处可以全纯开拓, z_0 是正则点

若 $\rho=R-|z_0'|$, 根据ρ的定义, $\partial B(z_0',\rho)$上至少有一个奇异点
注意 $\partial B(z_0',\rho)\setminus\{z_0\}$ 中每个点都是正则点 $\Rightarrow$ z_0是奇异点

③ $f(z)$与$f'(z)$在$|z|=R$上有相同的正则点与奇异点

④ $f(z)$在$|z|=R$上收敛/发散性与正则/奇异无必然关系

例. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$, $z_0=-1$. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$发散, 正则点

$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$, $z_0=1$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛, 正则点

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!}$的收敛半径为1, $z_0=1$. $\sum_{n=0}^{\infty}1^{n!}$发散, $\partial B(0,1)$上每个点都是奇异点

(首先$z=1$是奇异点, 再取既约分数$\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $g(z)=f(e^{i2\pi\frac{p}{q}}z)\Rightarrow g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i2\pi\frac{p}{q}}z)^{n!}=$
$\underbrace{\sum_{n<q}e^{2\pi\frac{p}{q}n!}z^{n!}}_{多项式}+\underbrace{\sum_{n\geq q}z^{n!}}_{在z=1处是奇异点}$ $\Rightarrow z=e^{i2\pi\frac{p}{q}}$是$f$的奇异点. 正则点集$\partial B(0,1)$上开集, 奇异点集$S$是闭集.
$S\supset(\{e^{2\pi i\frac{p}{q}}\}的闭包)=\partial B(0,1)$)

$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n!}}{n^2}$, $z_0=1$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^{n!}}{n^2}$收敛. 由下个例题可知 z_0为奇异点

Riemann's zeta 函数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$, 全纯延拓到 $s=-1$, 函数值有限.

例. 设$f(z)=\sum a_n z^n$的收敛半径R, $0<R<\infty$, 若 $a_n\geq 0$, 则 $z=R$是奇异点

证: 反证. 若$z=R$不是奇异点, 则f在$\frac{R}{2}$处展开的收敛半径 $\rho>\frac{R}{2}$,

$f(z)=\sum\frac{f^{(n)}(\frac{R}{2})}{n!}(z-\frac{R}{2})^n$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(\frac{R}{2})|}{n!}}=\frac{1}{\rho}<\frac{2}{R}$

$f^{(n)}(\frac{R}{2})=\sum_{m\geq n}m(m-1)\cdots(m-n+1)a_m(\frac{R}{2})^{m-n}\geq 0$, $|f^{(n)}(\frac{R}{2}e^{i\theta})|=|\sum_{m\geq n}m(m-1)\cdots(m-n+1)a_m(\frac{R}{2}e^{i\theta})|$

$|f^{(n)}(\frac{R}{2}e^{i\theta})|\leq|f^{(n)}(\frac{R}{2})|$

考虑 f 在 $\frac{1}{2}e^{i\theta}R$ 处展开 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\frac{1}{2}Re^{i\theta})}{n!}(z-\frac{1}{2}e^{i\theta}R)^n$ 的收敛半径

$$\rho' = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(\frac{R}{2}e^{i\theta})}{n!}}} \geq \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(\frac{R}{2})}{n!}}} = \rho > \frac{R}{2}$$

$\Rightarrow Re^{i\theta}$ 正则

$\Rightarrow \partial B(0,R)$ 上所有点均正则，矛盾 $\square$

Riemann 映照定理

问题. 当开集 Ω 满足什么条件时，存在共形映射 $F:\Omega\to D=\{|z|<1\}$？

同胚 $\Rightarrow \Omega$ 是单连通的

$\mathbb{C}\xrightarrow{F}D$. F 全纯，整函数. $|F|\leq 1 \xrightarrow{\text{Liouville}} F\equiv c \Rightarrow F'(0)=0$, F 非共形 $\quad$ $\mathbb{C}$ 是唯一例外

定理. 设 $\Omega\subsetneqq\mathbb{C}$ 且单连通，则 Ω 与 D 全纯同构，即对任意 $z_0\in\Omega$，存在唯一的共形映射 $F:\Omega\to D$ s.t.

$F(z_0)=0$, $F'(z_0)>0$.

分析: 唯一性由 D 的自同构可得

存在性. 简化起见，先设 Ω 有界 $(*)$ $\quad$ $\frac{z-z_0}{R}$ R 充分大

$\mathcal{F}=\{f\in H(\Omega)$ 单叶, $f(\Omega)\subset D$, $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0\}$ 非空

$0<f'(z_0)=|f'(z_0)|<M$, 上确界 $\overline{m}$. 取 $f_k\in\mathcal{F}$, $\lim_{k\to\infty}f_k'(z_0)=\overline{m}$

Claim. 定义 $f(z)=\lim_{k\to\infty}f_k(z)$, $\forall z\in\Omega$，则 f 是单叶全纯函数，(经过适当调整) f 就是所需的共形映射. $\quad$ 紧性论证

$\rightsquigarrow\begin{cases}\text{为什么极限函数可以定义？}\\ \text{为什么极限映射是单叶全纯 + 满射？}\end{cases}$

Arzela-Ascoli 引理: 设 $K\subset\subset\mathbb{C}$ 是紧集，若 $\{f_n\}$ 在 K 上一致有界，等度连续，则 $\{f_n\}$ 在 K 上有子列一致收敛到连续函数.

取子列之后，可以假设 f_n 内闭一致收敛到极限函数 $f\in\Omega$

(正规族 $\stackrel{def}{=}$ 任意序列包含内闭一致收敛子列. 对全纯函数族，正规族 $\Leftrightarrow$ 内闭一致有界

("$\Leftarrow$": 在紧集上，$\{f_n\}$ 一致有界 $\Rightarrow\{f_n'\}$ 一致有界 $\Rightarrow\{f_n\}$ 等度连续，取紧集列 $K_l=\overline{B(0,l)}\cap\{x: d(x,\partial\Omega)\geq\frac{1}{l}\}$

用对角线法取出 $\forall K_l$ 上一致收敛的子列，注意到任意紧集 K. $\exists l$. $K\subseteq K_l$)

Lec 25

f 全纯：由 f_n 内闭一致收敛到 f 和 Morera 定理推出.

f 单射：若不然，$\exists z_1, z_2\in\Omega$, $z_1\neq z_2$ s.t. $f(z_1)=f(z_2)=w\in D$

这意味着 $f(z)-w$ 在 Ω 中有至少两个零点 z_1, z_2. 找 γ 包围 z_1,z_2 s.t. $(f-w)|_\gamma\neq 0$

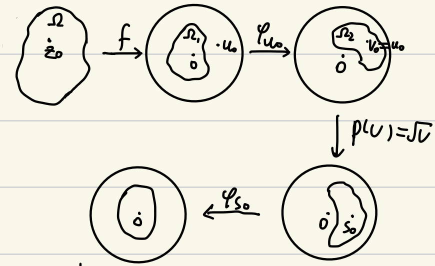
f_n-w 在 γ 上一致收敛到 $f-w$. 特别地，k 很大时 $(f_k-w)|_\gamma\neq 0$

由辐角原理知 f_k-w 在 γ 内部至少有两个零点 $z_{k_1}\neq z_{k_2}$，和 f_k 单射矛盾.

f 满射：若不然，$\exists u_0\in\mathbb{D}$, $u_0\notin f(\Omega)$.

令 $v=\varphi_{u_0}(u)=\frac{u_0-u}{1-\bar{u}_0 u}$, $\varphi_{u_0}(0)=u_0$, $\varphi_{u_0}(u_0)=0$, $\varphi'_{u_0}(u)|_{u=0}=|u_0|^2-1<0$

$$\underset{\Omega_1}{f(\Omega)}\longrightarrow \underset{\Omega_2}{\varphi_{u_0}\circ f(\Omega)}$$
$$u_0\longmapsto 0$$
$$0\longmapsto u_0$$



$0\notin\Omega_2$. 令 $s=p(v)$ 是 $\sqrt{v}$ 的一个单值分支，$p'(v_0)=\frac{1}{2\sqrt{v_0}}$

考虑 $\varphi_{s_0}(v)=\frac{s_0-v}{1-\bar{s}_0 v}$. $\varphi_{s_0}(0)=s_0$, $\varphi_{s_0}(s_0)=0$

令 $q(v)=\frac{s_0}{|s_0|}\varphi_{s_0}(v)$，所以 $q(s_0)=0$, $q'(s_0)=\frac{s_0}{|s_0|}\varphi'_{s_0}(s_0)=-\frac{s_0}{|s_0|}\frac{1}{1-|s_0|^2}$

令 $F=q\circ p\circ\varphi_{u_0}\circ f$ 全纯. $F'(z_0)=q'(s_0)\,p'(v_0)\,\varphi'_{u_0}(0)\,f'(z_0)=\frac{1-|u_0|^2}{2|s_0|(1-|s_0|^2)}M>0$, $F\in\mathcal{F}$

$u_0=\rho e^{i\theta}$, $0<\rho<1$. $|s_0|=|\sqrt{v_0}|=\sqrt{|v_0|}=\sqrt{\rho}$, $1-|s_0|^2=1-\rho$

$F'(z_0)=\frac{1-\rho^2}{2\sqrt{\rho}(1-\rho)}M=\frac{1+\rho}{2\sqrt{\rho}}M>M$，矛盾

(想法：找一个好的 $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 的函数把 $f'(z_0)$ 变大)

结论：f 是从 Ω 到 $\mathbb{D}$ 的共形映射.

(*): Ω 无界时，由于 $\Omega\neq\mathbb{C}$. $\exists b\in\Omega^c$. 不妨设 $b=0$

取 $\sqrt{\ }$ 的单值分支，记为 g. $g|_\Omega$ 是单的，$g|_\Omega$ 无零点

因为 $z_0\in\Omega$，所以 $g(z_0)\in E=g(\Omega)$ 内点

所以 $\exists\,\delta>0$, $B(g(z_0),\delta)\subset E=g(\Omega)\Rightarrow B(-g(z_0),\delta)\subset E^c$ ($\sqrt{z_1}=-\sqrt{z_2}\Rightarrow z_1=z_2\Rightarrow\sqrt{z_1}=\sqrt{z_2}=0$ $\Rightarrow z_1=z_2=0$，此处不可能)

$\Rightarrow$ 当 $z\in\Omega$ 时，$d(g(z),g(z_0))=|g(z)+g(z_0)|>\delta$

所以令 $\varphi(z)=\frac{1}{g(z)+g(z_0)}$, $\varphi(\Omega)\subset B(0,\delta^{-1})$ 有界域

综上所述，Riemann 映照定理成立 □

Lec 26

边界对应定理

能否将从Ω到$\mathbb{D}$的同胚延拓为从$\overline{\Omega}$到$\overline{\mathbb{D}}$的同胚?

定理：设G是由一条简单闭曲线Γ的域，若$w=f(z)$把G双全纯地映为$B(0,1)$，那么f的定义可扩充到Γ上，

s.t. f是$\overline{G}$到$\overline{B(0,1)}$的同胚，且把Γ一一映为$|w|=1$，Γ关于G的正向对应于$f(\Gamma)$关于$B(0,1)$的正向

证：① 取$\zeta\in\partial G=\Gamma$，如何定义$f(\zeta)$?

令$z_n\in G$, $z_n\to\zeta$，自然地定义$f(\zeta)=\lim_{n\to\infty}f(z_n)$，验证这是良定义的

② f现在定义在$\overline{G}$上，$f|_{\overline{G}}$是否连续?

由$f(\zeta)$ $(\zeta\in\partial G)$的良定理，只需取$\zeta_n\xrightarrow{\partial G}\zeta$，$\lim_{n\to\infty}f(\zeta_n)=f(\zeta)$

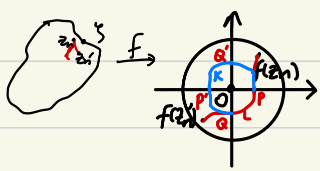
③ $f:\overline{G}\to\overline{\mathbb{D}}$，$f^{-1}$存在且连续

④ 边界定向保持.

① 只需证若 $\left.\begin{array}{l} z_n\in G, z_n\to\zeta, \ \lim_{n\to\infty}f(z_n)=a \\ z_n'\in G, z_n'\to\zeta', \ \lim_{n\to\infty}f(z_n')=b \end{array}\right\}\Rightarrow a=b$

反证. 如若不然，注意$a,b\in\partial\mathbb{D}=\partial B(0,1)=S^1$ (因为如果$a\in\mathring{\mathbb{D}}$, $\exists\, w_n=f(z_n)\to a\in\mathring{\mathbb{D}}\Rightarrow z_n\to f^{-1}(a)\in\mathring{G}$，矛盾)

若有必要，把f换成$T\circ f$ ($T=e^{i\theta}\frac{w-z}{1-\overline{w}z}$, Exercise)，可以假设 $\begin{cases} a=e^{i\frac{\pi}{4}} \\ b=e^{i\frac{5}{4}\pi}\end{cases}$



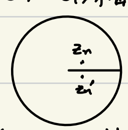
因为l在ζ的小邻域中，所以l可以避开$f^{-1}(0)\in G$

$\Rightarrow L$避开$0\in\mathbb{D}$，与实轴，虚轴分别交于P, Q

$Q'=-Q$, $P'=-P$

$\widehat{PQ}$, $\widehat{QP'}$, $\widehat{P'Q'}$, $\widehat{Q'P}$ 围成区域K

对比：



若仅有G单连通，可能z_n与z_n'逼近同一点但被f拉开，无矛盾

定义$F(w)=\underbrace{(f^{-1}(w)-\zeta)}_{w\in\widehat{PQ}\subset L\text{时}\leq\delta}\left(\overline{f^{-1}(\overline{w})}-\overline{\zeta}\right)\cdot(f^{-1}(-w)-\zeta)\left(\overline{f^{-1}(-\overline{w})}-\overline{\zeta}\right)$ $\quad F:\mathbb{D}\to G$全纯.

$F(0)=|f^{-1}(0)-\zeta|^4$, $0\in K$

$|F(0)|\leq\max_{z\in\partial K}|F(w)|\leq\max\left\{\max_{w\in\widehat{PQ}}|F(w)|, \max_{w\in\widehat{QP'}}|F(w)|, \max_{w\in\widehat{P'Q'}}|F(w)|, \max_{w\in\widehat{Q'P}}|F(w)|\right\}$

$\leq\delta\cdot M\cdot M\cdot M=M^3\delta$

$\Rightarrow|f^{-1}(0)-\zeta|=F(0)^{\frac{1}{4}}\leq M^{\frac{3}{4}}\delta^{\frac{1}{4}}$

令$n\to\infty$, $\delta\to0\Rightarrow f^{-1}(0)-\zeta=0\Rightarrow\zeta=f^{-1}(0)=z_0\in\mathring{G}$，矛盾

② 由定义，$\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta$ s.t. $|f(z)-f(\zeta)|<\varepsilon$, $\forall z\in B(\zeta,\delta)\cap G$

取$\zeta'\in B(\zeta,\frac{1}{10}\delta)\cap\partial G$，对$\zeta'$，$\exists\,\delta'$ s.t. $|f(z)-f(\zeta')|<\varepsilon$, $\forall z\in B(\zeta',\delta')\cap G$

$B(\xi,\delta)\cap B(\xi',\delta')\cap G\neq\phi$. 可以从中选出点 z.

$|f(\xi)-f(\xi')|\le|f(\xi)-f(z)|+|f(z)-f(\xi')|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

这证明了 $f|_{\partial G}$ 是连续的 $\Rightarrow f|_{\bar G}$ 是连续的

③ 已知 $f(w)\in\partial B(0,1)=S^1$，如果 $w\in\partial G$

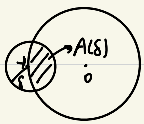
$f|_{\partial G}$ 是满射（因为 f 连续，$\bar G$ 紧，$f(\bar G)$ 紧，$f(\bar G)=\overline{f(\bar G)}\supset\overline{f(G)}=\overline{D}$）

只需证 $f|_{\partial G}$ 是单射（紧空间到Hausdorff空间的连续双射是同胚）

反证，若 $\xi_1,\xi_2\in\partial G$ s.t. $f(\xi_1)=f(\xi_2)\overset{不妨}{=}-1$. 取 G 中曲线 γ_1,γ_2，$\gamma_1(1)=\xi_1$，$\gamma_2(1)=\xi_2$

则 $\exists c\in(0,1)$，$t_1,t_2\in[c,1]$ 时 $|\gamma_1(t_1)-\gamma_2(t_2)|\ge\frac{1}{2}|\xi_1-\xi_2|$

$\gamma_i([0,c])$ 紧 $\Rightarrow f(\gamma_i([0,c]))$ 紧 $\Rightarrow\exists\delta>0$. $A(\delta)=B(0,1)\cap B(-1,\delta)$ 与 $f(\gamma_i([0,c]))$ 无交



$A(\delta)$ 中点用极坐标表示：$0<r<\delta$，$-\varphi(r)<\theta<\varphi(r)$，其中 $\varphi(r)=\arccos\frac{r}{2}\le\frac{\pi}{2}$

$$|f^{-1}(A(\delta))|=\iint_{A(\delta)}|(f^{-1})'(w)|^2dw=\int_0^\delta\int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)}|(f^{-1})'(-1+re^{i\theta})|^2r\,d\theta\,dr\quad(*)$$

估计右端积分. $\forall\,0<r<\delta$，$C_r:|w+1|=r$ 必与曲线 $f\circ\gamma_i$ 相交于 α_i $(i=1,2)$

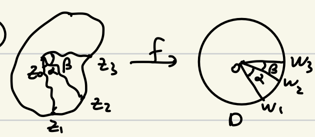
$\widehat{\alpha_1\alpha_2}$ 被 f^{-1} 映为连接在 γ_1,γ_2 上的曲线

$$\frac{1}{2}|\xi_1-\xi_2|\le|f^{-1}(\alpha_1)-f^{-1}(\alpha_2)|\le\int_{\widehat{\alpha_1\alpha_2}}|(f^{-1})'(w)||dw|\le\int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)}|(f^{-1})'(-1+re^{i\theta})|r\,d\theta$$

由Cauchy不等式，$\frac{1}{4}|\xi_1-\xi_2|^2\le\int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)}|(f^{-1})'(-1+re^{i\theta})|^2r^2d\theta\cdot\int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)}d\theta$

$$\Rightarrow\frac{|\xi_1-\xi_2|^2}{4\pi r}\le\int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)}|(f^{-1})'(-1+re^{i\theta})|^2r\,d\theta$$

代入(*)，$+\infty=\int_0^\delta\frac{|\xi_1-\xi_2|^2}{4\pi r}dr\le|f^{-1}(A(\delta))|\le|G|<+\infty$，矛盾.

④ 

保角 $\Rightarrow$ 保持定向
（共形）

□

Fourier transform

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足某些增长条件

$$\hat f(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx$$

inverse $\hat f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$f(x)\overset{?}{=}\int_{\mathbb{R}^n}\hat f(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

不动点 ($\mathbb{R}^1$上)

例. $f(x)=e^{-\pi x^2}$

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}e^{-2\pi i x\xi}\,dx \xrightarrow{\text{Poisson积分}} e^{-\pi\xi^2}$$

逆变换 $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\xi^2}e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi = e^{-\pi x^2}$

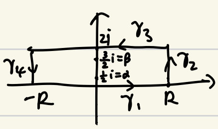
Claim: $\frac{1}{\cosh(\pi x)}$ 是Fourier变换不动点

$$f(x)=\frac{1}{\cosh(\pi x)}=\frac{2}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$$

定义 $f(z)=\frac{2}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}$ $\quad F(z)=\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{\cosh(\pi z)}=\frac{2e^{-2\pi i z\xi}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}$

要计算 $\int_{-\infty}^{\infty}F(z)\,dz$

$$e^{\pi z}+e^{-\pi z}=0 \Leftrightarrow e^{2\pi z}=-1=e^{\pi i+2k\pi i} \Leftrightarrow z=(\tfrac{1}{2}+k)i,\ k\in\mathbb{Z}$$



$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4}F(z)\,dz=2\pi i(\mathrm{Res}\,\alpha+\mathrm{Res}\,\beta)$$

在α处, $(z-\alpha)F(z)=2e^{-2\pi i z\xi}\frac{z-\alpha}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}=\frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}$

在β处, $(z-\beta)F(z)=2e^{-2\pi i z\xi}\frac{z-\beta}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}}=\frac{e^{3\pi\xi}}{-\pi i}$

$$R\to\infty,\ \left.\begin{aligned}&\int_{\gamma_1}F(z)\,dz\to\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\,dx=I\\&\int_{\gamma_2}F(z)\,dz\to 0\\&\int_{\gamma_4}F(z)\,dz\to 0\\&\int_{\gamma_3}F(z)\,dz\to -e^{4\pi\xi}I\end{aligned}\right\}\Rightarrow (1-e^{4\pi\xi})I=2\pi i\left(\frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}-\frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}\right)$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{\cosh\pi\xi}$$

Lec 27

缓降函数 f : $|f(x)| \le \frac{A}{1+x^2}$

则 $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < C < +\infty$

$x, \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$

$|右边| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cancel{|e^{-2\pi i x\xi}|}\, dx < +\infty$

f 在多大范围内可以延拓为复区域上的全纯函数

$\updownarrow$

$\hat{f}(\xi)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的衰减速度

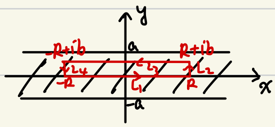
$\mathcal{F}_a = \{ f \mid f$ 在 $x+iy$ $(x\in\mathbb{R}, |y|<a)$ 上全纯, 且 $|f(x+iy)| \le \frac{A}{1+x^2} \}$

$\mathcal{F} = \bigcup_{a>0} \mathcal{F}_a$.

$f \in \mathcal{F}$ 意味着 $f \in \mathcal{F}_a$ 对某个 a 成立

定义 $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$, $\xi \in \mathbb{R}$

定理: 若 $f \in \mathcal{F}_a$, 则 $\exists B$, $|\hat{f}(\xi)| \le B e^{-2\pi b|\xi|}$, $\forall b \in (0,a)$



证: $0 = \int_{L_1} * + \int_{L_2} * + \int_{L_3} * + \int_{L_4} *$

$R \to \infty$: $\int_{L_1} \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$, $\int_{L_2} \to 0$, $\int_{L_4} \to 0$

所以 $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+ib) e^{-2\pi i (x+ib)\xi} dx\right|$

$= e^{2\pi b\xi} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+ib) e^{-2\pi i x\xi} dx\right|$

$\le C e^{2\pi b\xi}$

也可取实轴下方的围道, 即得结论 $\square$

定理: 若 $f \in \mathcal{F}$, 则 Fourier 逆变换成立, i.e., $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi$, $\forall x \in \mathbb{R}$

证: $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx \xlongequal[]{上个定理证明} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib) e^{-2\pi i (u-ib)\xi} du$

结论式右边 $= \int_{-\infty}^{0} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi + \int_{0}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi$

$\int_{0}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi = \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib) e^{-2\pi i (u-ib)\xi} du\right) e^{2\pi i x\xi} d\xi$

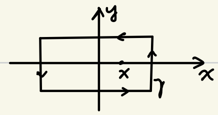
$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{0}^{+\infty} f(u-ib) e^{-2\pi i (u-ib)\xi} \cdot e^{2\pi i x\xi} d\xi\right) du$

$\xlongequal[]{s=A+iB\,(A>0)\text{时} \int_{-\infty}^{0} e^{-st}dt = \frac{1}{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib) \frac{1}{2\pi(b+i(u-x))} du$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u-ib)}{u-ib-x}du$$

另外一部分 $\int_{-\infty}^{0}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u+ib)}{u+ib-x}du$

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-x}dz = f(x)$



$\xRightarrow{R\to\infty} f(x) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u+ib)du}{u+ib-x} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u-ib)}{u-ib-x}du$ $\square$

第九次习题课

例. 若 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在收敛圆周上有1阶极点 z_0, 无其他奇点, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=z_0$

证: $g(z)=f(z)-\frac{c_{-1}}{z-z_0}$ 至少在 $\overline{B(0,|z_0|)}$ 上全纯 $\Rightarrow$ 收敛半径 $R>|z_0|$

$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$, $|z|<R$

$\therefore |z|<|z_0|<R$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-1}}{z_0^{n+1}}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$

$\therefore a_n=b_n-\frac{c_{-1}}{z_0^{n+1}}$

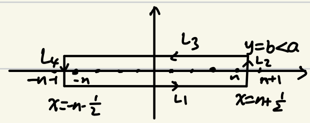
$\therefore \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b_n-\frac{c_{-1}}{z_0^{n+1}}}{b_{n+1}-\frac{c_{-1}}{z_0^{n+2}}}=\frac{b_n z_0^{n+2}-c_{-1}z_0}{b_{n+1}z_0^{n+2}-c_{-1}}\xrightarrow{b_n z_0^n\to 0} z_0$ $\square$

Lec 28

定理：若 $f\in\mathcal{F}$，则 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)$

证：考虑函数 $\frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1}$，$\{n\}$为极点，$Res\left(\frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1}\right)=\frac{f(n)}{2\pi i}$

要计算 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} f(k)$



由留数定理，$\sum_{k=-n}^{n} f(k)=\int_{L_1+L_2+L_3+L_4}\frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1}dz$

在L_2上，$|e^{2\pi iz}-1|=|e^{2\pi i(n+\frac{1}{2}+iy)}-1|=|-e^{-2\pi y}-1|\geq 1$，积分趋于0

同理，在L_4上积分也趋于0

在L_1上 $|e^{2\pi iz}|=|e^{2\pi i(x-ib)}|=e^{2\pi b}>1 \Rightarrow \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}=\frac{1}{e^{2\pi iz}}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-2\pi iz})^k=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2\pi i(k+1)z}$

在L_3上 $|e^{2\pi iz}|=e^{-2\pi b}<1\Rightarrow \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}=-\sum_{k=0}^{\infty}e^{2\pi ikz}$

$$\xRightarrow{n\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)=\int_{L_1}f(z)\left(\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2\pi i(k+1)z}\right)dz+\int_{L_3}f(z)\cdot(-1)\sum_{k=0}^{\infty}e^{2\pi ikz}dz$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}\int_{L_1}f(z)e^{2\pi ikz}dz-\sum_{k=0}^{\infty}\int_{L_3}f(z)e^{2\pi ikz}dz$$

$$\underline{\underline{上节结论}}\sum_{k=-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{2\pi ikx}dx+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{2\pi ikx}dx$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{2\pi ikx}dx$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)$$

□

Paley-Wiener 定理

引理：设 $\hat{f}$ 满足 $|\hat{f}(\xi)|\leq Ae^{-2\pi a|\xi|}$，$A>0$，则$f$可以延拓成 $S_b=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|\mathrm{Im}\,z|<b\}$ 中的全纯函数，$\forall b\in(0,a)$

证：$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi$

把x换成z，定义 $f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi iz\xi}d\xi$

注意在 S_b 上 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\xi)e^{2\pi iz\xi}|d\xi\leq\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-2\pi a|\xi|}e^{2\pi b|\xi|}d\xi=2A\cdot\frac{1}{2\pi(a-b)}<+\infty$

所以$f(z)$在S_b上有定义

$f(z)=\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\hat{f}(\xi)e^{2\pi iz\xi}dz$，$f_n$(全纯)内闭一致收敛到$f$，所以$f$全纯

□

定理：f连续缓降，则f可以延拓成 $|f(z)|\leq Ae^{2\pi M|z|}$ 的整函数当且仅当 $\hat{f}$ 的支集落在$[-M,M]$上

分析："$\Leftarrow$"由引理中 $a\to\infty$ 得到，"$\Rightarrow$"是本质的困难.

证: "⇐" 定义 $f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi z}d\xi=\int_{-M}^{M}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi z}dz$, 全纯

$|f(z)|\le\int_{-M}^{M}|\hat{f}(\xi)|e^{2\pi|\xi||z|}d\xi\le Ae^{2\pi M|z|}$ (实则 $|f(z)|\le e^{2\pi M|y|}$)

"⇒" ① 先假设 $|f(z)|\le Ae^{2\pi M|y|}\cdot\frac{1}{1+x^2}$

$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$

$|f(z)e^{-2\pi iz\xi}|\le Ae^{2\pi M|y|}\frac{1}{1+x^2}e^{2\pi y\xi}$

若 $\xi<-M$, $y>0$, $|f(z)e^{-2\pi iz\xi}|\le\frac{A}{1+x^2}e^{2\pi y(\xi+M)}$

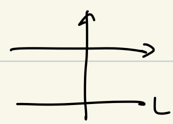
$\hat{f}(\xi)=\int_L f(z)e^{-2\pi iz\xi}dz\le\int_L|f(z)e^{-2\pi iz\xi}|dz\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{1+x^2}e^{-2\pi y\varepsilon}dx\le Ce^{-2\pi y\varepsilon}$, $\forall y>0$

让 $y\to+\infty$ 则 $|\hat{f}(\xi)|=0$

同理, 若 $\xi>M$, 取 L 为 $\{y=-b\ (b>0)\}$, $|\hat{f}(\xi)|\le Ce^{-2\pi b\varepsilon}$, $\forall b>0\Rightarrow|\hat{f}(\xi)|=0$

故结论成立

② 设 $|f(z)|\le Ae^{2\pi M|y|}$



令 $f_\varepsilon(z)=\frac{f(z)}{(1+\varepsilon iz)^2}$, $y<0$ 时 $|f_\varepsilon(z)|\le\frac{|f(z)|}{|1+i\varepsilon z|^2}\le\frac{Ae^{2\pi M|y|}}{\varepsilon^2(1+x^2)}$

可以用①中论证得到 $\xi>M$ 时 $|\hat{f}_\varepsilon(\xi)|=0$

$|\hat{f}_\varepsilon(\xi)-\hat{f}(\xi)|\le\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\left|\frac{1}{(1+i\varepsilon x)^2}-1\right|dx$

固定N, 令 $\varepsilon\to0$. 注意到 $y<0$ 时 $\left|\frac{1}{(1+i\varepsilon x)^2}\right|<1$,

$\lim_{\varepsilon\to0}|\hat{f}_\varepsilon(\xi)-\hat{f}(\xi)|\le2\left(\int_N^{+\infty}|f(x)|dx+\int_{-\infty}^{-N}|f(x)|dx\right)$ 对 $\forall N$ 成立

令 $N\to\infty$, $\hat{f}_\varepsilon(\xi)\to\hat{f}(\xi)$, 故 $\xi>M$ 时 $\hat{f}(\xi)=0$

$\xi<-M$ 时同理. 结论成立

③ 一般的条件. $|f(z)|\le Ae^{2\pi M|z|}$

注意. $|f(z)|\le Ae^{2\pi M|y|}$ 在第一象限边界上成立 (x轴上 $y=0$, f缓降)

由"全纯函数的最大模原理"知道, $|f(z)|\le Ae^{2\pi M|y|}$ 在第一象限成立 (Exercise)

同理可知在第二、三、四象限也成立

综上可知在 $\mathbb{C}$ 上 $|f(z)|\le Ae^{2\pi M|y|}$, 回到② □

"最大模原理"(Lindelöf): 设F是扇形区域 $S=\{z:-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}\}$ 上的全纯函数, 在 $\bar{S}$ 上连续,

假设 $|F(z)|\le1$ 在 ∂S 上成立, 且 $\underbrace{|F(z)|\le Ce^{c|z|}}_{\text{反例: } e^{z^2}}$, $\forall z\in S$, 那么 $|F(z)|\le1$

证：$\frac{\pi}{\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})}=2$，选取 $\alpha<2$，如 $\alpha=\frac{3}{2}$，令 $F_\varepsilon(z)=F(z)e^{-\varepsilon z^{\frac{3}{2}}}$（$z^{\frac{3}{2}}$ 已取单值分支）

$\left|e^{-\varepsilon z^{\frac{3}{2}}}\right|=e^{-\varepsilon r^{\frac{3}{2}}\cos\frac{3}{2}\theta}$ $\quad$ $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ 时 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{3}{8}\pi<\frac{3}{2}\theta<\frac{3}{8}\pi<\frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{3}{2}\theta>\cos\frac{3}{8}\pi>0$

$\Rightarrow \lim\limits_{z\to\infty}F_\varepsilon(z)=0$

$\xRightarrow{\text{最大模原理}} \sup\limits_{z\in S}|F_\varepsilon(z)|\le\sup\limits_{z\in\partial S}|F_\varepsilon(z)|\le 1$

令 $\varepsilon\to 0$ 即证 $\square$

Lec 29

整函数(零点的分布) $\longrightarrow f\in H(\mathbb{C})$

f 有界 $\Rightarrow f$ 常数

f 线性增长, $|f(z)|\le C(|z|+1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}$ 有界 $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}\equiv C \Rightarrow f=Cz+d$

$\cdots$ f 多项式增长 $\Leftrightarrow$ f 就是多项式

有意义的情形: $f\sim Ce^{A|z|^\beta}$, 最小的 β 称为 f 在 ∞ 的增长阶

问题: 1. 给定整函数, 零点分布?

2. 给定一些点, 能否构造以它们为全部零点的整函数?

Jensen 公式: $\overline{B(0,R)}\subset\Omega$. f 在 Ω 上全纯, $f(0)\ne 0$, f 在 $\partial B(0,R)$ 上无零点. $z_1,\cdots,z_N$ 是 f 在 $B(0,R)$ 中的全部零点(可重复)

则 $\log|f(0)|=\sum_{k=1}^{N}\log\left(\frac{|z_k|}{R}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta$

分析: 若 f 在 $\overline{B(0,R)}$ 中无零点, $\log|f|$ 是光滑调和函数. Jensen 公式即平均值公式

若 f 在 $\overline{B(0,R)}$ 中有零点, 考虑 $f=z-z_k$, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log f(Re^{i\theta})\,d\theta-\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|Re^{i\theta}-z_k|\,d\theta-\log|z_k|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\log R+\log\left|e^{i\theta}-\frac{z_k}{R}\right|\right)d\theta-\log|z_k| \xlongequal[\text{需要}\int_0^{2\pi}\log|e^{i\theta}-\frac{z_k}{R}|d\theta=0]{} \log\frac{R}{|z_k|}$$

证: ① 若 f_1,f_2 都满足 Jensen 公式, 则 f_1f_2 也满足

② 对任意的 f, 假设 $z_1,\cdots,z_N$ 是 $B(0,R)$ 中 f 的零点

$g:=\frac{f}{(z-z_1)\cdots(z-z_N)}$ 是 $B(0,R)$ 中的非零全纯函数, 在 $\overline{B(0,R)}$ 上有定义且非零

$$\left.\begin{array}{l} g\text{ 满足 Jensen} \\ z-z_k\ (1\le k\le N)\text{ 满足 Jensen}\end{array}\right\}\xRightarrow{①} f\text{ 满足 Jensen}$$

③ 验证 $|a|<1$ 时 $\int_0^{2\pi}\log|e^{i\theta}-a|\,d\theta=0$ $\quad$ ($\log|e^{i\theta}-a| = \log|1-ae^{-i\theta}|$)

对 $F(z)=1-az$ (全纯, $\overline{B(0,1)}$ 上非零) 用 Jensen 公式即可 $\square$

f 整函数, $n_f(r):=f$ 在 $B(0,r)$ 中零点个数, 简记为 $n(r)$, 左连续

引理：$f(0)\neq 0$，则 $\int_0^R n(r)\frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^N \log\frac{R}{|z_k|}$

证：定义 $\eta_k(r)=\begin{cases}1, & r>|z_k|\\ 0, & r\le|z_k|\end{cases}$，则

$$RHS = \sum_{k=1}^N\int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^N\int_0^R \eta_k(r)\frac{dr}{r} = \int_0^R\Big(\sum_{k=1}^N \eta_k(r)\Big)\frac{dr}{r} = \int_0^R n(r)\frac{dr}{r}$$ □

定理：f 整函数，增长阶 $<\rho$，那么

(1) $n(r)\le Cr^\rho$ 对充分大的 r 成立

(2) 若 $\{z_1,z_2,\cdots\}$ 是零点集，$s>\rho$，则 $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{|z_k|^s}<\infty$

☆ 复分析联系连续与离散，比如可用来研究解析数论

证：(1) $\log|f|\le C_1(|z|^\rho+1)\le C|z|^\rho$，$|z|$ 很大时

$$(\log 2)\,n(R) = n(R)\int_R^{2R}\frac{1}{r}dr \le \int_R^{2R} n(r)\frac{dr}{r} \le \int_0^{2R} n(r)\frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(2Re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)| \le 2^\rho R^\rho - C_0$$

$$\xRightarrow{R\text{很大}} n(R)\le CR^\rho$$

(2) $$\sum_{|z_k|\ge 1}^\infty |z_k|^{-s} = \sum_{j=0}^\infty\Big(\sum_{2^j\le|z_k|<2^{j+1}}|z_k|^{-s}\Big) \le \sum_{j=0}^\infty (2^j)^{-s}\, n(2^{j+1}) \le C\sum_{j=0}^\infty (2^j)^{\rho-s} = C'\sum_{j=0}^\infty\Big(\frac{1}{2^{s-\rho}}\Big)^j < +\infty$$

又因为 $B(0,1)$ 中零点数有限，故得证 □

例（$n(r)\le Cr^\rho$ 这个估计是 sharp 的） $f(z)=\sin\pi z = \frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}$

f 的增长阶 $\rho=1$，$f(z)=0 \Leftrightarrow z=n\in\mathbb{Z}$

Lec 30

$\{a_k\}$给定，构造整函数 f s.t. $f(a_k)=0$ 且 f 没有其它零点

不妨 $\{a_k\}$ 没有聚点，$a_k\neq 0$

Naive idea: $\prod_{k=1}^{\infty}(z-a_k)$，可能发散，改为 $\prod_{k=1}^{\infty}\{(z-a_k)h_k\}$，$h_k$ 是恒不为0的整函数 $(\Leftrightarrow h_k=e^{g_k})$

实际上应写成 $f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_k})e^{g_k}$，问题转化为选取 g_k。

$\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_k})$ 收敛。如果 $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_k}\right|<+\infty \overset{z\neq0}{\Longleftrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|}<+\infty$，做不到

$|z|<\frac{1}{2}$，$E_k(z)=(1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}}$

$$\overset{\log(1-z)=-(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots)}{=\!=\!=} e^{-(\frac{z^{k+1}}{k+1}+\frac{z^{k+2}}{k+2}+\cdots)}$$

$$=1-\left(\frac{z^{k+1}}{k+1}+\frac{z^{k+2}}{k+2}+\cdots\right)+\frac{1}{2}(\quad)^2-\cdots$$

$\rightsquigarrow$ Claim: $|1-E_k(z)|\leq C|z|^{k+1}$，$\forall z\in\overline{B(0,\frac{1}{2})}$，其中 C 是与 k 无关的常数

Claim 证明：$E_k(z)=e^w$，$w=-\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

$$|w|=|z|^{k+1}\left|\frac{1}{k+1}+\frac{|z|}{k+2}+\cdots\right|\leq|z|^{k+1}\cdot(1+|z|+\cdots)\leq 2|z|^{k+1}$$

$$|E_k(z)-1|=|e^w-1|=\left|w\left(1+\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{3!}+\cdots\right)\right|\overset{|w|\leq1}{\leq}(e-1)|w|$$

(或者 $\sup_{|w|\leq1}\left|\frac{e^w-1}{w}\right|\overset{全纯}{=\!=}\sup_{|w|=1}\left|\frac{e^w-1}{w}\right|=\sup_{|w|=1}|e^w-1|$)

考虑 $f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}E_k(\frac{z}{a_k})=\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_k})e^{g_k}$

固定 R，考虑 $z\in B(0,R)$，由 $\{a_k\}$ 无聚点，$k>N$ 时 $|a_k|>2R$

$f(z)=\prod_{k=1}^{N}E_k(\frac{z}{a_k})\prod_{k=N+1}^{\infty}E_k(\frac{z}{a_k})$

注意 $\sum_{k=N+1}^{\infty}\left|E_k(\frac{z}{a_k})-1\right|\leq C\sum_{k=N+1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_k}\right|^{k+1}\leq C\sum_{k=N+1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k+1}<C$，故 $\prod_{k=N+1}^{\infty}E_k(\frac{z}{a_k})$ 收敛

由 R 的任意性，$f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上收敛，由一致收敛性和 Morera 定理，f 全纯。

若 f 有 $\{a_k\}$ 以外的零点 z，则 $E_k(\frac{z}{a_k})-1\neq0$，$\forall k$。

$\prod_{k=N+1}^{\infty}E_k(\frac{z}{a_k})=\prod_{k=N+1}^{\infty}e^{\log(1+(E_k(\frac{z}{a_k})-1))}=e^{\sum\log(1+(E_k(\frac{z}{a_k})-1))}\neq0$，矛盾，故 f 即为要构造的函数

希望控制 f 在 ∞ 的增长行为

定理 (Hadamard) f 整函数，增长阶为 ρ_0，设 k 是满足 $k\leq\rho_0<k+1$ 的整数。若 $a_1,a_2,\cdots$ 是 f 的零点集，

则 $f(z)=e^{p(z)}z^m\prod_{n=1}^{\infty}E_k(\frac{z}{a_n})$，这里 p 是至多 k 次多项式，m 是 f 在 $z=0$ 的零点阶数

证：只需考虑 $f(0)\neq 0$ 的情形，要证 $f(z)=e^{p(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$

注意 $E_k(w)=0 \Leftrightarrow w=1$

$\frac{f}{\prod_{n=1}^{\infty}E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)}$ 无零点，可以写成 $e^{p(z)}$，要证 $p(z)$ 是多项式 $\rightsquigarrow$ 由增长条件导致

∴要得出 $e^{p(z)}$ 的增长上界估计，即 $\prod_{n=1}^{\infty}E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$ 的增长下界估计

Step 1. $\exists\, r_i\to\infty$ s.t. $\left|\prod_{n=1}^{\infty}E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|\geq e^{-B|z|^s}$，$s>\rho_0$ 在 $|z|=r_i$ 上成立

从而在 $|r_i|$ 上 $|f|\left|\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)}\right|=e^{\operatorname{Re}p(z)}\leq e^{c|z|^s}\Rightarrow \operatorname{Re}p(z)\leq C|z|^s$ (*)

Step 2. 在 r_i 上满足 (*) 的全纯函数必为多项式，且次数 $\leq s$

从而 Hadamard 定理得证。

Step 2 的证明：$p(z)$ 整函数，有展开 $p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta=\begin{cases}b_nr^n, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}\quad (1)$$

两边取共轭，$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{p(re^{i\theta})}e^{-in\theta}\,d\theta=\begin{cases}0, & n>0\\ \overline{b_n}r^n, & n\leq 0\end{cases}\quad (2)$$

$$(1)+(2)\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}p(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta\quad (n\geq 1)$$

$$=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\{\operatorname{Re}p(re^{i\theta})-Cr^s\}e^{-in\theta}\,d\theta$$

$$|b_n|\leq\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}|\operatorname{Re}p(re^{i\theta})-Cr^s|\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}(\operatorname{Re}p-Cr^s)\,d\theta$$

$$=2Cr^{s-n}-2\operatorname{Re}p(0)r^{-n}$$

对 $n>s$，令 $r\to\infty\Rightarrow b_n=0$

Step 1 的证明：

Claim：$|E_k(z)|\geq e^{-c|z|^{k+1}}$，若 $|z|\leq\frac{1}{2}$

$|E_k(z)|\geq|1-z|e^{-c'|z|^k}$，若 $|z|\geq\frac{1}{2}$

回顾 $|z|\leq\frac{1}{2}$ 时 $E_k=e^w$，$w=-\left(\frac{z^{k+1}}{k+1}+\cdots\right)$，$|w|\leq c|z|^{k+1}$，$|E_k|=|e^w|\geq e^{-|w|}\geq e^{-c|z|^{k+1}}$

$\frac{1}{2}\leq|z|\leq 1$，$|E_k(z)|=|1-z|\left|e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}}\right|\geq|1-z|e^{-\left(|z|+\frac{|z|^2}{2}+\cdots+\frac{|z|^k}{k}\right)}\geq|1-z|e^{-c'|z|^k}$

Claim 得证

引理：$\rho_0<s<k+1$，那么 $\left|\prod_{n=1}^{\infty}E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|\geq e^{-c|z|^s}$ 在 $\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}B(a_n,|a_n|^{-k-1})\right\}^c$ 上恒成立

引理证明：$|z|$ 很大，$\prod_{n=1}^{\infty}E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)=\left(\prod_{|a_n|\leq 2|z|}E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right)\left(\prod_{|a_n|>2|z|}E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right)$

$$\left|\prod_{|a_n|>2|z|}E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|\overset{\text{Claim}}{\geq}\prod_{|a_n|>2|z|}e^{-c\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k+1}}\geq e^{-c|z|^{k+1}\sum_{|a_n|>2|z|}|a_n|^{-k-1}}$$

$$\sum_{|a_n|>2|z|}|a_n|^{-k-1}=\sum|a_n|^{-s}|a_n|^{s-k-1}=\sum|a_n|^{-s}\cdot\left|\frac{a_n}{z}\right|^{s-k-1}\cdot|z|^{s-k-1}\overset{\sum|a_n|^{-s}\text{收敛}}{\leq}C|z|^{s-k-1}$$

$$\Rightarrow\left|\prod_{|a_n|>2|z|}E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right|\geq e^{-c|z|^s}$$

再估计 $\left|\prod_{|a_n|\le 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \overset{\text{claim}}{\geq} \prod_{|a_n|\le 2|z|}\left\{\left|1-\frac{z}{a_n}\right| e^{-c'\left|\frac{z}{a_n}\right|^k}\right\} \geq \Bigg(\prod_{|a_n|\le 2|z|}\underset{\substack{\vee \\ |a_n|^{-k-2}}}{\left|1-\frac{z}{a_n}\right|}\Bigg) e^{-c'|z|^k \sum_{|a_n|\le 2|z|}|a_n|^{-k}}$

$$(k+2)\log|a_n| \leq (k+2)\, n(2|z|)\log(2|z|) \leq c|z|^s \log 2|z| \overset{s'>s}{\leq} c|z|^{s'} \Rightarrow \prod_{|a_n|\le 2|z|}\left|1-\frac{z}{a_n}\right| \geq e^{-c|z|^{s'}}$$

$$\sum_{|a_n|\le 2|z|}|a_n|^{-k} = \sum |a_n|^{-s}|a_n|^{s-k} = \sum |a_n|^{-s}\left|\frac{a_n}{z}\right|^{s-k}|z|^{s-k} \leq c|z|^{s-k} \Rightarrow e^{-c|z|^k \sum_{|a_n|\le 2|z|}|a_n|^{-k}} \geq e^{-c|z|^s}$$

$$\Rightarrow \left|\prod_{|a_n|\le 2|z|} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \geq e^{-c|z|^s}$$

，引理得证.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{-k-1} < +\infty$，可找一列 $r_i \to \infty$ s.t. $\partial B(0,r_i) \subset \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{B(a_n,|a_n|^{-k-1})}\right\}^c$

在 $|z|=r_i$ 上利用引理即证 $\square$