有限区间上的 Fourier 级数

1) 若 $f(x)$ 在 $[-\ell,\ell)$ 上有定义, 则以 2ℓ 为周期延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上后, $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Big),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad (n=0,1,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad (n=1,\cdots).$$

注　考察函数 $g(t)=f(\frac{\ell t}{\pi})$ 的 Fourier 级数.

2) 若 $f(x)$ 在 $[0,\ell)$ 上有定义, 则先偶延拓到 $[-\ell,\ell)$ 再以 2ℓ 为周期延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上后, $f(x)$ 的 Fourier 级数为一个余弦级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x,$$

其中

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad (n=0,1,\cdots).$$

3) 若 $f(x)$ 在 $(0,\ell)$ 上有定义, 则先奇延拓到 $[-\ell,\ell)$ 再以 2ℓ 为周期延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上后, $f(x)$ 的 Fourier 级数为一个正弦级数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

其中

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad (n=1,2,\cdots).$$

4) 若 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有定义, 则以 $b-a$ 为周期延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上后, $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{b-a}x + b_n \sin\frac{2n\pi}{b-a}x\right),$$

其中

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}x\,dx, \quad (n=0,1,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\,dx, \quad (n=1,2,\cdots).$$

证明　设 $g(t) = f(t+\frac{a+b}{2})$, $t\in[-\ell,\ell)$, $\ell = \frac{b-a}{2}$. 则

$$g(t) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n' \cos\frac{n\pi t}{\ell} + b_n' \sin\frac{n\pi t}{\ell}\right), \tag{1}$$

其中

$$a'_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(t)\cos\frac{n\pi t}{\ell}\,dt,\ \ n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

$$b'_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(t)\sin\frac{n\pi t}{\ell}\,dt,\ \ n = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

作变换 $x = t + \frac{a+b}{2}$, 令 $g(t) = f(t + \frac{a+b}{2})$. 由 (1) 可得

$$\begin{aligned}
f(x) = g(t) &\sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a'_n\cos\frac{n\pi(x-\frac{a+b}{2})}{\ell} + b'_n\sin\frac{n\pi(x-\frac{a+b}{2})}{\ell}\right)\\
&= \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a'_n\cos(\frac{n\pi}{\ell}\frac{a+b}{2}) - b'_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}\frac{a+b}{2})\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right.\\
&\quad\left. + \left(a'_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}\frac{a+b}{2}) + b'_n\cos(\frac{n\pi}{\ell}\frac{a+b}{2})\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]\\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right),
\end{aligned}$$

|◄ ►| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

其中

$$a_0 = a_0' = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(t)\,dt = \frac{2}{b-a}\int_{-\ell}^{\ell} f(t+\frac{a+b}{2})\,dt = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\begin{aligned}
a_n &= a_n'\cos(\frac{n\pi}{\ell}\frac{a+b}{2}) - b_n'\sin(\frac{n\pi}{\ell}\frac{a+b}{2})\\
&= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(t)\left[\cos\frac{n\pi t}{\ell}\cos(\frac{n\pi}{\ell}\frac{a+b}{2}) - \sin\frac{n\pi t}{\ell}\sin(\frac{n\pi}{\ell}\frac{a+b}{2})\right]dt\\
&= \frac{2}{b-a}\int_{-\ell}^{\ell} f(t+\frac{a+b}{2})\cos\frac{n\pi(t+\frac{a+b}{2})}{\ell}\,dt\\
&= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.
\end{aligned}$$

同理

$$b_n = a_n'\sin(\frac{n\pi}{\ell}\frac{a+b}{2}) + b_n'\cos(\frac{n\pi}{\ell}\frac{a+b}{2}) = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

例 1 将 $1-x^2$ 在 $[-1,1]$ 上展开 Fourier 级数.

解 将 $1-x^2$ 以 2 为周期延拓到实轴上, 是一个连续的偶函数. 因此 $b_n=0$. $a_0=2\int_0^1(1-x^2)\,dx=2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^1(1-x^2)\cos(n\pi x)\,dx\\
&= 2\left[(1-x^2)\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\bigg|_0^1-\int_0^1(-2x)\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\,dx\right]\\
&= \frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx=\frac{4}{n\pi}\left[x\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\,dx\right]\\
&= \frac{4}{n\pi}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\bigg|_0^1\right]=\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

故,

$$1-x^2=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x),\quad x\in[-1,1]. \tag{1}$$

在上式中取 $x=\frac{1}{4}$, 得

$$\begin{aligned}\frac{13\pi^2}{12\times 16} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos\frac{n\pi}{4}}{n^2}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\cos\frac{(4k+1)\pi}{4}}{(4k+1)^2}-\frac{\cos\frac{(4k+2)\pi}{4}}{(4k+2)^2}+\frac{\cos\frac{(4k+3)\pi}{4}}{(4k+3)^2}-\frac{\cos\frac{(4k+4)\pi}{4}}{(4k+4)^2}\right]\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k/\sqrt{2}}{(4k+1)^2}-\frac{(-1)^k/\sqrt{2}}{(4k+3)^2}+\frac{(-1)^k}{(4k+4)^2}\right]\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{(4k+1)^2}-\frac{1}{(4k+3)^2}\right]+\frac{1}{16}\cdot\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

故,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{(4k+1)^2}-\frac{1}{(4k+3)^2}\right]=\frac{\sqrt{2}\pi^2}{16}. \tag{2}$$

例 2 将函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x^2 & 0<x<1\end{cases}$ 在 $(-1,1)$ 上展开成 Fourier 级数, 并求级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}$ 的值.

解 $a_0=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$.

$$a_n=\int_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx=\frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2},\ n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\int_0^1 x^2\sin n\pi x\,dx=-\frac{x^2\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1-\int_0^1 2x\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\,dx$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2}{n^3\pi^3}\left((-1)^n-1\right).$$

故,

$$f(x)\sim\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^3}\right)\sin n\pi x\right]. \qquad (1)$$

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

令 $x=\frac{1}{2}$, 并利用

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12},$$

可得

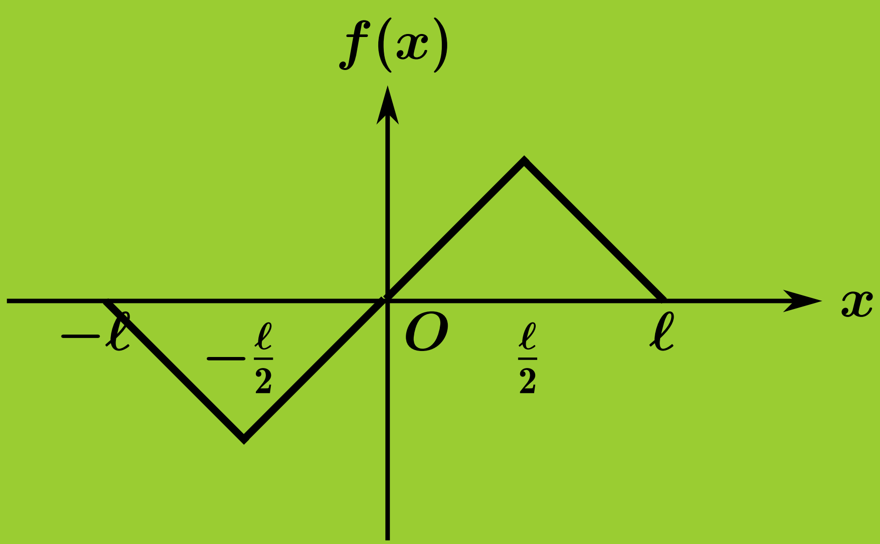
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$$

例 3 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \frac{\ell}{2} \\ \ell - x, & \frac{\ell}{2} \leqslant x \leqslant \ell \end{cases}$$

以 2ℓ 为周期展开为正弦级数和余弦级数.

解 1) 展开为正弦级数: 先奇延拓到 $[-\ell, \ell)$ 再以 2ℓ 为周期延拓到 $(-\infty, +\infty)$.

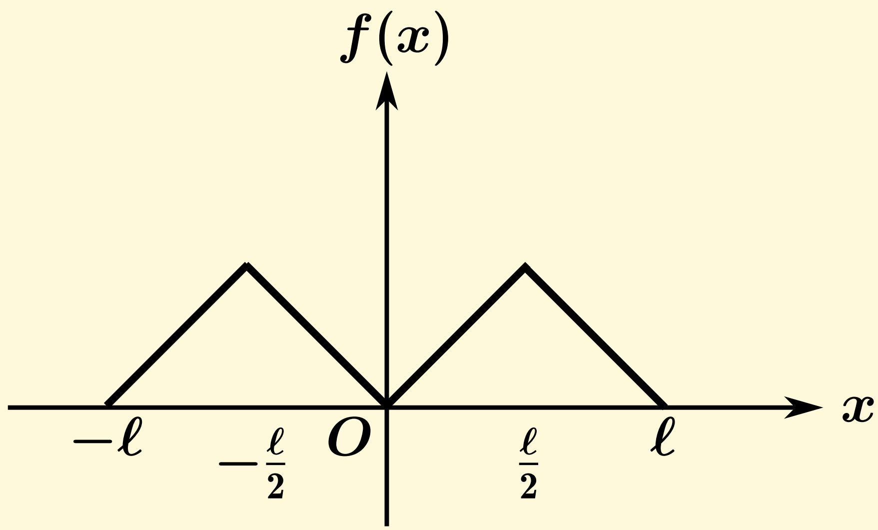


$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \\
&= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2} x\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx + \frac{2}{\ell}\int_{\ell/2}^{\ell}(\ell-x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \\
&= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2} x\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx + \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2} x\sin\frac{n\pi(\ell-x)}{\ell}\,dx \\
&= \frac{2(1+(-1)^{n-1})}{\ell}\int_0^{\ell/2} x\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \frac{2\ell(1+(-1)^{n-1})}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx \\
&= \begin{cases} 0, n=2k \\ \frac{4\ell(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2\pi^2}, \quad n=2k-1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以

$$
f(x) = \frac{4\ell}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{\ell}, \quad x\in[-\ell,\ell].
$$

2) 展开为余弦级数: 先将函数偶延拓到 $[-\ell, \ell)$ 再以 2ℓ 为周期延拓到 $(-\infty, +\infty)$.



$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx = \frac{2}{\ell}\cdot\frac{\ell^2}{4} = \frac{\ell}{2}.$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2} x\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + \frac{2}{\ell}\int_{\ell/2}^{\ell}(\ell - x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \\
&= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2} x\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2} x\cos\frac{n\pi(\ell - x)}{\ell}\,dx \\
&= \frac{2}{\ell}\big(1 + (-1)^n\big)\int_0^{\ell/2} x\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \\
&= \frac{2\big(1 + (-1)^n\big)\ell}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} x\cos nx\,dx \\
&= \begin{cases} \frac{\ell}{k^2\pi^2}\big((-1)^k - 1\big), & n = 2k \\ 0, & n = 2k-1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以

$$
f(x) = \frac{\ell}{4} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\ell}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\frac{2(2k-1)\pi x}{\ell}, \quad x \in [-\ell, \ell].
$$

12.1.4 Fourier 级数的复数形式

根据 Euler 公式有

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位. 由这些公式就可以将 Fourier 级数表示为复数形式.

设 $f(x)$ 在 $[-\ell, \ell]$ 上的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x\right),$$

这里 $\omega = \frac{\pi}{\ell}$. 因为

$$\cos n\omega x = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \quad \sin n\omega x = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i},$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2} + b_n\frac{e^{in\omega x}-e^{-in\omega x}}{2i}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-b_ni}{2}e^{in\omega x} + \frac{a_n+b_ni}{2}e^{-in\omega x}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{n\omega x}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中

$$F_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} F_{\pm n} &= \frac{a_n \mp b_n i}{2} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\big(\cos n\omega x \mp i\sin n\omega x\big)dx \\ &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{\mp in\omega x}\,dx, \quad (n=1,2,\cdots) \end{aligned}$$

显然有 $F_{-n} = \overline{F_n}$.