第 13 章 反常积分和含参变量的积分

§13.1 反常积分

13.1.1 无穷区间上积分的收敛性

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的任何闭子区间上 Riemann 可积, 则 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上积分的收敛性定义为如下极限

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

或者说定义为函数

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx,$$

的收敛性. 类似数项级数, 我们希望探讨广义积分收敛性的判别方法.

根据函数极限 $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ 的 Cauchy 收敛准则, 可得到关于广义积分的 Cauchy 收敛准则.

定理 1 (**Cauchy 准则**) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的任何闭子区间上可积, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是对于任给的正数 ε, 存在 $B>a$, 只要 $b_1, b_2 > B$, 就有

$$|F(b_2)-F(b_1)| = \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

注意,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ 收敛} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

但是

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \quad \not\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

进一步, 类比正项级数的收敛性以, 对于非负函数, 我们有如下结果:

定理 2 设在 $[a,+\infty)$ 上 $f(x) \geqslant 0$, $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的任何子区间上可积, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是, 存在 $M > 0$ 使对任何 $b > a$ 都有

$$\int_a^b f(x)dx < M.$$

即 $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ 对于任何 b 有界.

类比级数的绝对收敛和条件收敛, 有

定理 3 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的任何闭子区间上可积, 如果 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

上面这个定理可从 Cauchy 收敛准则直接得到.

如果 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛.

上面这个定理说明 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 在无穷区间上绝对收敛意味着该积分本身也收敛.

注意, 在对于常义积分 (即有限区间上的积分), 这个结论并不成立, 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数;} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

该函数在 $[0, 1]$ 区间上绝对可积, 但是本身不可积.

如果 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 但 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 条件收敛. 例如,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

条件收敛.

|◄ ►| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

类似无穷级数的比较判别法, 也有

定理 4 (**比较判别法**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 对任意 $b>a$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积. 如对充分大的 x, 成立不等式

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

则

1° 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

2° 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散.

直接利用无穷积分的定义可以证明

$$\text{当 } p > 1 \text{ 时 } \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (a > 0) \text{ 收敛,}$$

$$\text{当 } p \leqslant 1 \text{ 时 } \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (a > 0) \text{ 发散.}$$

对于一个在 $[a, +\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$, 将它与 $\frac{1}{x^p}$ 比较, 可得

1° 若对充分大的 x, 有 $|f(x)| \leqslant \frac{C}{x^p}$, $p > 1$, C 为常数, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 绝对收敛.}$$

2° 若对充分大的 x, 有 $f(x) \geqslant \frac{C}{x^p}$, $p \leqslant 1$, C 为正常数,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \ (a > 0) \text{ 发散.}$$

定理 5 (Cauchy **判别法**) 如果 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有定义的非负且单调减少函数, 那么积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 同敛散.

证明 由 $f(x)$ 的单调性可知, 当 $k \leqslant x \leqslant k+1$ 时有

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k),$$

于是

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k).$$

将上述不等式对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 相加, 就得知, 对任何 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

若 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则由上式左半可知 $\sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 有界, 因而 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. 若 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则由上式右半可知 $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ 无界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散. 证毕.

例 1 证明存在 $[0,+\infty)$ 上的正值函数 $f(x)$ 使得

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

收敛, 但对任意正数 $p \neq 1$,

$$\int_0^{+\infty} (f(x))^p\,dx$$

发散.

证明 若 $p<1$, 则令 $\beta = p$. 若 $p>1$, 则令 $\beta = 2-p$. 总有 $\beta < 1$.

取数列 $a_n \in (0, \frac{1}{2})$, $n = 1, 2, \cdots$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\beta} = +\infty.$$

这样的数列是存在的, 如

$$a_n = \frac{1}{n(\ln(n+4))^2}.$$

构造函数 $f(x)$ 如下: 当 $x \in [n-1, n)$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & n-1 \leqslant x < n - a_n^2, \\ \frac{1}{a_n}, & n - a_n^2 \leqslant x < n. \end{cases}$$

显然有

$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = a_n(1-a_n^2) + a_n < 2a_n,$$

因而 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛. 又

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^{n} (f(x))^p\,dx &= \int_{n-1}^{n-a_n^2} a_n^p\,dx + \int_{n-a_n^2}^{n} \frac{1}{a_n^p}\,dx \\ &= a_n^p(1-a_n^2) + a_n^{2-p} \\ &> \frac{1}{2}a_n^p + a_n^{2-p} \\ &> \frac{1}{2}a_n^{\beta}. \end{aligned}$$

由此可知 $\int_0^{+\infty}(f(x))^p\,dx$ 发散.

例 2 设 $p>1$, 则 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 和 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 绝对收敛.

例 3 对任意非负实数 α, $\int_1^{+\infty}x^\alpha e^{-x}dx$ 收敛.

证明 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-\frac{x}{2}}=0,$$

故当 x 充分大时有

$$x^\alpha e^{-x}=x^\alpha e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}<e^{-\frac{x}{2}}.$$

由 $\int_1^{+\infty}e^{-\frac{x}{2}}dx$ 的收敛性就可推知原积分的收敛性.

比较判别法还有如下极限形式.

定理 6 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义且非负, 并且对任意 $b>a$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$, 那么有

1° 若 $0<k<+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 同敛散;

2° 若 $k=0$, 则当 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛;

3° 若 $k=+\infty$, 则当 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也发散.

例 4 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}$ 收敛.

证明 当 $x\to+\infty$ 时

$$\frac{x^2}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)}\sim\frac{1}{x^{5/2}}.$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{5/2}}$ 收敛, 由定理 5 即知原积分收敛.

例 5 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导, 且 $f(0)>0$, $f'(x)\geqslant 0\ (x>0)$. 若无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}dx$ 收敛, 则 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}dx$ 也收敛.

(第四届大学生数学竞赛预赛数学类试题)

证明 因为

$$\begin{aligned}0&<\int_0^A\frac{1}{f(x)}dx-\int_0^A\frac{1}{f(x)+f'(x)}dx\\&=\int_0^A\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}dx\leqslant\int_0^A\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx\\&=\int_0^A\left(-\frac{1}{f(x)}\right)'dx=\frac{1}{f(0)}-\frac{1}{f(A)}<\frac{1}{f(0)}.\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^A\frac{1}{f(x)}dx<\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}dx+\frac{1}{f(0)}.$$

故, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}dx$ 收敛.

例 6 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上正的连续函数, 且 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,dx$ 收敛. 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. 求证

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{F(x)}\,dx<2\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,dx,$$

且上式右端的系数 2 是最佳的.

证明 设 $x>0$. 利用 Cauchy 积分不等式, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2=\int_0^x t\,dt&=\int_0^x\sqrt{f(t)}\cdot\frac{t}{\sqrt{f(t)}}\,dt\\&\leqslant\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^x\frac{t^2}{f(t)}\,dt\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

由此,

$$\frac{x}{F(x)}\leqslant\frac{4}{x^3}\int_0^x\frac{t^2}{f(t)}\,dt.$$

上面的不等式只有当 $f(t)=ct$ (c 为常数) 时成立, 但此时 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,dx$ 发散.

因此

$$\frac{x}{F(x)} < \frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{f(t)}\,dt.$$

两边关于 x 在 $[0,+\infty)$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x}{F(x)}\,dx &< 4\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{f(t)}dt\right)dx\\ &= 4\int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty}\frac{t^2}{x^3 f(t)}\,dx\right)dt\\ &= 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(t)}\,dt,\end{aligned}$$

因而所证不等式成立. 下面说明系数 2 不能换成更小的数.

设 $f_p(x) = (x+a)^p$, $a = p-1 > 0$. 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f_p(x)}\,dx = \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{a^{p-1}}.$$

$$F(x) = \int_0^x (t+a)^p\,dt = \frac{1}{p+1}\left((x+a)^{p+1} - a^{p+1}\right).$$

由此

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{F(x)}\,dx = (p+1)\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+a)^{p+1}-a^{p+1}}\,dx.$$

不难证明

$$\frac{x}{(x+a)^{p+1}-a^{p+1}} \geqslant \frac{1}{p(x+2a)^p},\ x>0, p\geqslant 1.$$

因而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x}{F(x)}\,dx &\geqslant \frac{p+1}{p}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2a)^p}\,dx \\ &= \frac{p+1}{p}\cdot\frac{1}{(p-1)(2a)^{p-1}} \\ &= \frac{p+1}{p\cdot 2^{p-1}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{f_p(x)}\,dx.\end{aligned}$$

注意 $\lim\limits_{p\to 1^+} \frac{p+1}{p\cdot 2^{p-1}} = 2$. 由此可知所证结论中系数 2 是最佳的.

注 本例的结论是由相应的无穷级数中例子转化而来.