1. 随机过程基础

严平稳:各点分布列均相同。只需任意给出两个点使得分布不同即可证伪。

宽平稳:$E(X)=m, E(X^2)\neq\infty, R(s,t)=f(s-t)$

独立增量过程:$X(s)$独立于$X(t)-X(s)$

平稳独立增量:$X(s)-X(t)\sim f(s-t)$

条件概率:$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$

常用公式:$Cov(s,t)=E[X_s\cdot X_t]-E[X_s]E[X_t]$

$$\mathrm{Var}[X]=E[X^2]-E^2[X]$$

矩母函数:$g(t)=E(exp\{tX\}), E[X^n]=g^{(n)}(0)$

若两变量独立则$g_{X+Y}(t)=g_X(t)\cdot g_Y(t)$

随机和的矩母函数：$Y=\sum_{i=1}^N X_i$

$E[e^{tY}|N=n]$

$=E[\,exp\{t\sum_{i=1}^N X_i\}|N=n\}$

$=E[exp\{t\sum_{i=1}^n X_i\}\}=[g_X(t)]^n$

$$g_Y(t)=E[g_X^N(t)]$$

2. Poisson 过程

定义:$N(t), t\ge 0, N(0)=0, N(t)$是独立增量过程, $N(s+t)-N(s)\sim Pois(\lambda t)$

泊松过程两次事件间时间间隔$X_n\sim$Exp(λ)

第 n 次事件的到达时间$W_n\sim\Gamma(n,\lambda)$

给定$N(t)=n$下$W_1\cdots W_n$的联合密度

$$f_{W_1,\cdots,W_n|N(t)=n}=n!/t^n$$

与从[0,t]区间抽取 n 个独立同分布随机样本并排序后成的次序统计量联合密度一致。

$$E[W_1+\cdots+W_N|N(t)=n]=E[n\cdot U_i]$$

非齐次 Poisson 过程： 允许$\lambda=\lambda(t)$

$P(N(t+h)-N(t)=k)$

$$=\left(\int_t^{t+h}\lambda(u)du\right)^k exp\left(-\int_t^{t+h}\lambda(u)du\right)/k!$$

协方差：$\mathrm{Cov}(N(t),N(s))=min\{s,t\}\lambda$

$\mathrm{Cov}(N(t),N(s))$

$=E[N(t)N(s)]-E[N(t)]E[N(s)]$

$=E[(N(t)-N(s))(N(s)-N(0))]+E[N^2(s)]-\lambda^2 st$

$=\lambda(t-s)\lambda(s-0)+(\lambda s+\lambda^2s^2)-\lambda^2 st=\lambda s$

两独立泊松过程之和仍为泊松过程，强度为两者之和。

复合 Poisson 过程（累计值过程）

$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$其中$Y_i$独立同分布，$EY=\mu$,$\mathrm{Var}Y=\tau^2$,$N(t)$是参数为λ的泊松过程，满足$EX(t)=\lambda\mu t$,$\mathrm{Var}[X(t)]=\lambda(\tau^2+\mu^2)t$

标值 Poisson 过程

令$P\{Y_k=1\}=p, P\{Y_k=0\}=1-p, N_1(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k$，则$N_1(t)$是强度为$\lambda p$的泊松过程

3. Markov 过程

定义：任何一列状态$i_0,i_1,\cdots,i_{n-1},i,j$及对任何$n\ge0$随机过程$\{X_n,n\ge0\}$满足 Markov 性质$P\{X_{n+1}=j|X_0=i_0,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$

$P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$称为 Markov 链的一步转移概率，记为$P_{ij}^{n,n+1}$，若与 n 无关则 Markov 链具有**平稳转移概率**

$$P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}P_{kj}^{(n-1)}\Rightarrow P^{(n)}=P^n$$

TODO: P30~31

Markov 链状态分类

互达性：$\exists n\ge0, P_{ij}^{(n)}>0$，称 j 从 i 可达，若 i、j 都是可达的，称 i、j 互达$(i\leftrightarrow j)$

互达性具有自反性、对称性、传递性。

互达的两个状态处于同一个类中、若 Markov 链的所有状态都属于同一个类则称 Markov 链是**不可约**的。

周期性：使$P_{ii}^{(n)}>0$的所有正整数$n(n\ge1)$的最大公约数称作状态 i 的周期，记为$d(i)$若对所有$n\ge1, P_{ii}^{(n)}=0$，认为周期为∞。若$d(i)=1$则状态 i 是非周期的。

定理：$i\leftrightarrow j\Leftrightarrow d(i)=d(j)$

定理：若状态 i 有周期$d(i)$则存在正整数 N 使所有$n>N$都有$P_{ii}^{(nd(i))}>0$

常反与瞬过：定义$f_{ij}^{(n)}=P\{X_n=j,X_k\neq j,k=1\cdots,n-1|X_0=i\}$为从 i 出发 n 步转移首次到达 j 的概率。

令$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$。若$f_{ii}=1$则称状态 i 是常返的，否则就是瞬过的。

状态 i 常返当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}P_{ii}^{(n)}=\infty$。

若 i 是常返的，$i\leftrightarrow j$则 j 也是常返的。

令T_i为首次返回状态 i 的时刻，称为**常返时**，记$\mu_i=ET_i$则$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$，若常返状态$\mu_i=\infty$则称其为**零常返**的，否则为**正常返**

Markov 链基本极限定理

若状态 i 是瞬过/零常返的则$P_{ii}^{(\infty)}=0$

若状态 i 为周期为 d 的常返则$P_{ii}^{(\infty)}=d/\mu_i$

若状态 i 为非周期的常返(**遍历**)则$P_{ii}^{(\infty)}=1/\mu_i$

若状态 i 是遍历的则对所有$i\to j$有$P_{ii}^{(\infty)}=P_{ji}^{(\infty)}=1/\mu_i$

定理：若不可约的 Markov 链中所有状态都是遍历的则对所有i,j，极限$P_{ij}^{(\infty)}=\pi_j$存在且$\pi=\{\pi_j,j\ge0\}$为平稳分布，有$\sum_j\pi_j=1$，$\sum_i\pi_iP_{ij}=\pi_j$

TODO:例子 3.8

4. 平稳过程

设$X=\{X(t),t\in T\}$为一随机过程，若对任意正整数k及T中任意k个时刻$t_1<t_2<\cdots<t_k$及T中的h均有$\{X(t_1),\cdots,X(t_k)\}$同分布于$\{X(t_1+h),\cdots,X(t_k+h)\}$则随机过程X称为**严平稳过程**

若过程为严平稳过程则$m(t)=EX(t)=$常数

$\mathrm{Var}(X(t))=E(X(t)-m)^2=$常数

记$R(h)=E(X(h)-m)(X(0)-m)$

则$R(h)=E(X(t+h)-m)(X(t)-m)$

$r(\tau)=EX(t)E(t+\tau)$

$\rho(v)=R(v)/\sigma^2=R(v)/R(0)$

若随机过程满足$\forall t\in T, EX^2(t)<\infty, EX(t)=m$且$E(X(t)-m)(X(s)-m)=f(t-s)$则称X为**宽平稳过程**

随机过程$G=\{G(t),-\infty<t<\infty\}$对任一正整数k及k个时刻$t_1\le t_2\le\cdots\le t_k$，$(G(t_1),\cdots,G(t_k))$的联合分布为$k$维正态分布，则称$G$为**高斯过程**

X_n两两不相关，满足$EX_n=0, EX_n^2=\sigma^2, EX_mX_n=0(\mathrm{m}\neq\mathrm{n})$，则$X$是**平稳白噪声序列**

若平稳过程$\{X(t),t\in T\}$存在正常数κ使$X(t+\kappa)=X(t)$则称X为**周期平稳过程**，κ为过程的周期。周期平稳过程的协方差函数也是周期为κ的函数。

复平稳过程：定义协方差为$E(X(t)-m)\overline{(X(s)-m)}$

平稳过程$X=\{X(t),-\infty<t<\infty\}$满足

$$\overline{X}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt=m$$

$$\overline{X}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}X(k)=m$$

称X的**均值有遍历性。**若

$$\hat R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(t)-m)(X(t+\tau)-m)dt=R(\tau)$$

$$\hat R(\tau)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=1}^{n}(X(k+\tau)-\widehat{m_n})(X(k)-\widehat{m_n})=R(\tau)$$

则称X的**协方差函数有遍历性**

均值遍历性定理

平稳序列X的协方差函数$R(\tau)$，X有遍历性充要条件

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}R(\tau)=0$$

平稳过程X的协方差函数$R(\tau)$，X有遍历性充要条件

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)R(\tau)d\tau=0$$

推论：若$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|<\infty$则均值遍历性成立

推论：若$R(\tau)\to0(\tau\to\infty)$则均值遍历性成立

协方差函数遍历性定理

定理 4.2 (协方差函数遍历性定理) 设 $X=\{X(t),-\infty<t<\infty\}$ 为平稳过程, $Y_\tau=\{Y_\tau(t),-\infty<t<\infty\}$ 其中 Y_τ 由上面所定义, 则对给定的 τ, X 的协方差函数 $R(\tau)$ 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)(B(\tau_1)-R^2(\tau))d\tau_1=0,$$

其中

$$B(\tau_1)=EX(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t).$$

对于定义在 $[0,\infty)$ 上的平稳过程, 只要把遍历性理解为 (4.10),(4.11) 等式, 则定理 4.1 和定理 4.2 仍成立.

关于协方差函数的遍历性, 由于牵涉到过程的四阶矩, 一般很难验证. 但对于 Gauss 过程来说, 问题要简单得多, 比如我们有如下的结果.

定理 4.3 设 $X=\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 是均值为 0 的 Gauss 平稳过程, 如果

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}R^2(k)=0,$$

则 Gauss 过程的协方差函数有遍历性.

协方差函数

对称性$R(-\tau)=R(\tau)$ 有界性$|R(\tau)|\le R(0)$

非负定性$\sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^N a_na_mR(t_n-t_m)\ge0$

平稳过程n阶导数协方差函数$\mathrm{Cov}(X^n(t),X^n(t+\tau))=(-1)^nR^{(2n)}(\tau)$

功谱率密度

要求：$\overline{S}(\omega)=S(\omega)\ge0, S(-\omega)=S(\omega)$

形如$S(\omega)=P(\omega)/Q(\omega)$的谱密度分母不能有实根且次数应比分子高 2 次

W-K 公式：若$EX(t)=0$，$\int|R(\tau)|d\tau<\infty$则

$$S(\omega)=\int R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=2\int_0^{\infty}R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S(\omega)\cos\omega\tau\, d\tau$$

留数定理

$$Res[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^mf(z)]$$

$$Res[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

5.布朗运动

定义：(1) X(0)=0; (2) 随机过程 X 有平稳独立增量；(3) 对每个$t>0, X(t)\sim N(0,c^2t)$

若 c=1 则称为标准布朗运动

性质：$f_{t_1\dots t_n}(x_1,\dots,x_n)=f_{t_1}(x_1)f_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\dots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1})$

给定$X(t)=B, X(s), s<t$满足

$$f_{s|t}(x|B)\sim N(Bs/t,s(t-s)/t)$$

$$\mathrm{Cov}(X(s),X(t))=\min(s,t)$$

布朗桥：设$\{W(t),t\ge0\}$为布朗运动，令$B(t)=W(t)-tW(1), 0\le t\le1$，则随机过程$B=\{B(t):0\le t\le1\}$为布朗桥过程。

$$EB(t)=0, EB(s)B(t)=s(1-t)$$

布朗运动及布朗桥运动均为**高斯过程**。

平移不变性、刻度不变性：若$W(t)$是布朗运动，则$W(ct)/\sqrt{c}, W(t)-W(a)$也是布朗运动

首达时T_a：$f_{T_a}(t)=\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-a^2/2t}, E[T_a]=\infty$

布朗运动在[0,t]上的**最大值**$max_{0\le s\le t}W(s)$

$$f_{M(t)}(a)=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}exp\{-a^2/2t\}, a\ge0$$

6. 网上的习题课总结

Poisson 过程相关

1.$\{N(t),t\ge0\}$是强度为λ的泊松过程

$P[N(s)=k|N(s+t)=n]$

$=P\{N(s)=k,N(s+t)=n\}/P\{N(s+t)=n\}$

$=\frac{P\{N(s)=k\}P\{N(s+t)-N(s)=n-k\}}{P\{N(s+t)=n\}}$

$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{s+t}\right)^k\left(\frac{t}{s+t}\right)^{n-k}$

$=C_n^k\left(\frac{s}{s+t}\right)^k\left(\frac{t}{s+t}\right)^{n-k}$

$E[N(s)N(s+t)]$ 见 Poisson 过程章节

$E[N(s+t)|N(s)]$ 的期望与分布律、方差

分布律：$E[N(s+t)|N(s)]$

$=E[N(s+t)-N(s)+N(s)|N(s)]$

$=E[N(s+t)-N(s)]+N(s)$

$=\lambda t+N(s)$

所以$P(Z=k+\lambda t)=P(N(s)=k)=\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}$

$E[Z]=\lambda(s+t).\mathrm{Var}[Z]=\lambda s$

(习题 2.9)复合 Poisson 过程独立性

$N(t)$是参数为λ的过程，每个事件有独立的概率p被观察到，观察到的过程记为$N_1(t)$。

由矩母函数可得$N_1(t)\sim P(\lambda pt)$，$N(t)-N_1(t)=N_2(t)\sim P(\lambda(1-p)t)$，又满足独立性：

$P\{N_1(t)=k_1,N_2(t)=k_2\}$

$=P\{N_1(t)=k_1,N(t)=k\}$

$=P\{N\_1(t)=k\_1|N(t)=k\}P\{N(t)=k\}$

$=\binom{k}{k_1}p^{k_1}q^{k_2}\frac{(\lambda t)^{k_1+k_2}}{k!}e^{-\lambda(p+q)t}$

$=\frac{(\lambda pt)^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda pt}\cdot\frac{(\lambda qt)^{k_2}}{k_2!}e^{-\lambda qt}$

$=P\{N_1(t)=k_1\}P\{N_2(t)=k_2\}$

对于更多的$p_1,p_2,\cdots,p_n$此结论也成立

(习题 2.10 Plus)独立 Poisson 过程的叠加

假设$N_1(t),N_2(t)$分别为强度为λ_1,λ_2的泊松过程，则考虑$N(t)=N_1(t)+N_2(t)$

显然有独立增量性以及$N(0)=0$

$P(N(s+t)-N(s)=k)$

$=\sum_{i=0}^{k}P(N_1(s+t)-N_1(s)=k)P(N_2(s+t)-N_2(s)=i-k)$

$=\sum_{i=0}^{k}\frac{(\lambda_1t)^i}{i!}e^{-\lambda_1t}\frac{(\lambda_2t)^{(k-i)}}{(k-1)!}e^{-\lambda_2t}$

$=\frac{(t(\lambda_1+\lambda_2))^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$

两独立泊松过程强度分别为λ_1,λ_2，求事件 1 先于事件 2 发生的概率（以 某事件发生为起点，结果也一致，由泊松过程无记忆性得出）

⇒记两过程分别X,Y，X_1,Y_1为首达时间

所求概率即为：$P\{X_1<Y_1,X_1>0\}$

$=\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}\lambda_1e^{-\lambda_1x}\cdot\lambda_2e^{-\lambda_2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

两独立泊松过程$N_1(t),N_2(t)$强度分别为λ_1,λ_2，求在$N_1(t)$的间隔内$N_2(t)$发生了k次的概率。

$P(N_2(W_n)-N_2(W_{n-1}))$

$=P(N_2(X_n)=k)\ =P(N_2(X_1)=k)$

$=\int_0^{\infty}P(N_2(X_1)=k|X_1=x)f_X(x)\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\infty}\frac{(\lambda_2x)^k}{k!}e^{-\lambda_2x}\cdot\lambda_1e^{-\lambda_1x}\mathrm{d}x$

$=\frac{\lambda_1\lambda_2^k}{k!}\int_0^{\infty}\frac{t^k}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}}e^{-t}\mathrm{d}t\ ,\ t=(\lambda_1+\lambda_2)x$

$=\frac{\lambda_1\lambda_2^k}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}k!}\int_0^{\infty}t^ke^{-t}\mathrm{d}t$

$=\frac{\lambda_1\lambda_2^k}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}k!}\cdot\Gamma[k+1]$

$=\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

考虑一生长灾害模型为一马尔可夫链，处于状态 0 时有 1 的概率转移至状态 1，处于状态 i 时有p_i的概率转移到$i+1$，$q_i=1-p_i$概率转移至 0，求证$\lim_{n\to\infty}(p_1p_2\cdots p_n)=0$为所有状态都是常返的条件。

⇒由矩阵乘法，可得$f_{00}^{(1)}=0, f_{00}^{(2)}=q_1, f_{00}^{(n)}=p_1p_2\cdots p_{n-2}q_{n-1}$.从而$f_{00}=\sum f_{00}^{(n)}=1-\lim_{n\to\infty}(p_1\cdots p_n)$。要令状态 0 是常返的，则$f_{00}=1$从而有$\lim_{n\to\infty}(p_1\cdots p_n)=0$

又各个状态均为互达的，故此时所有状态均为常返

累计值：$\{N(t),t\ge0\}$为泊松过程，D_i独立同分布且与$N(t)$独立，$ED_i=D$，经过t时间后D_i变为$D_ie^{-\alpha t}$

求$ED(t)=E\sum_{i=1}^{N(t)}D_ie^{-\alpha(t-W_i)}$

$E[D(t)]=E[E[D(t)|N(t)]]$

$E[D(t)|N(t)=n]=E\left[\sum_{i=1}^nD_ie^{-\alpha(t-W_i)}\middle|N(t)=n\right]$

$=De^{-\alpha t}E[\sum_{i=1}^ne^{\alpha W_i}|N(t)=n]$

$=De^{-\alpha t}E[\sum_{i=1}^ne^{\alpha U_i}]$

$=nDe^{-\alpha t}E[e^{\alpha U_i}]$

$=\frac{nD}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})$

$$E[D(t)]=\frac{\lambda D}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

求$N(s)|N(t)$的分布

$P(N(s)=k,N(t)=n)$

$=P(N(s)=k,N(t)-N(s)=n-k)$

$=\frac{\lambda^ns^k(t-s)^{n-k}}{k!(n-k)!}e^{-\lambda t}$

$$P(N(s)|N(t)=n)\sim B\left(n,\frac{s}{t}\right)$$

随机过程的积分与微分:可以交换顺序

$E\left[\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\frac{\mathrm{d}E[X(t)]}{\mathrm{d}t}$

$Y(t)=\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}$,$R_Y(t_1,t_2)=E[dX(t_1)dX(t_2)]$

Markov 链

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0\\p&q&r\\0&0&1\end{pmatrix}$$

求进入吸收态 0 或 2 的概率及平均时间

令T为进入吸收态的时间，u为进入 0 的概率，v为进入 2 的平均时间。

$u=P(X_T=0|X_0=1)$

$=\sum P(X_T=0|X_0=1,X_1=k)\cdot P(X_1=k|X_0=0)$

$=1\cdot p+u\cdot q+0\cdot r=p+qu$

$v=E[T|X_0=1]$

$=\sum E[T|X_0=1,X_1=k]P[X_1=k|X_0=1]$

$=1\cdot p+(1+v)\cdot q+1\cdot r=1+qv$

常见分布及其矩母函数

泊松分布：$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,$

$g_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$ $EX=\lambda, DX=\lambda$

伯努利分布：$P(X=1)=p$

$g_X(t)=\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ $EX=p, DX=pq$

二项分布：$B(n,p)=\binom{n}{p}p^k(1-p)^{n-k}$

$g_X(t)=(1-p+pe^t)^n$ $EX=np$ $DX=npq$

均匀分布：$U(a,b)$

$g_X(t)=\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}, EX=\frac{a+b}{2}, DX=\frac{(b-a)^2}{12}$

正态分布：$N(\mu,\sigma^2)$

$$g_X(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

Gamma 分布：$\Gamma(k,\theta)$

$$g_X(t)=(1-t\theta)^{-k}$$

指数分布：$\mathrm{Exp}(\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$

$$g_X(t)=(1-t\lambda^{-1})^{-1}(t<\lambda), EX=\frac{1}{\lambda}, DX=\frac{1}{\lambda^2}$$

定义 3.3 (可达与互达) 如果对某一 $n \geqslant 0$, 有 $P_{ij}^{(n)} > 0$, 则称状态 j 是从状态 i 可达的 (accessible), 记作 $i \to j$. 它表示从状态 i 经过有限步的转移可以到达状态 j. 两个互相可达的状态 i 和 j 则称为互达的 (communicate), 记作 $i \leftrightarrow j$.

如果两个状态 i 和 j 不是互达的, 那就有对所有 $n \geqslant 0, P_{ij}^{(n)} = 0$ 或者对所有 $n \geqslant 0$, $P_{ji}^{(n)} = 0$, 或者两者都成立. 三种情况必居其一. 互达性是一种数学上的等价关系, 也就是说它满足自反性、对称性和传递性.

两个状态如果是互达的就称它们是处在同一类中. Markov 链的所有状态就由互达这一等价关系而分割成不同的等价类. 由命题 3.1 我们立刻知道两个类要么互不相交, 要么完全重合. 如果在互达性这一等价关系下 Markov 链的所有状态都居于同一类, 那么就称这个 Markov 链是不可约的 (irreducible). 换言之, 不可约过程的各个状态都是互达的.

定义 3.7 Markov 链有转移概率阵 $\boldsymbol{P} = (P_{ij})$. 一个概率分布 $\{\pi_i, i \geqslant 0\}$ 如果满足 $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}$, 则称为这一 Markov 链的平稳分布.

定义 4.1 设 $X = \{X(t), t \in T\}$ 为一随机过程, 若对任意正整数 k 及 T 中任意 k 个时刻 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, 及 T 中的 h, 有

$$\{X(t_1), \cdots, X(t_k)\} \overset{d}{=} \{X(t_1 + h), \cdots, X(t_k + h)\}, \tag{4.1}$$

则随机过程 X 称为严平稳过程. 这里 "d" 表示等式两边 k 维随机向量的分布相同.

设 $X = \{X(t), t \in T\}$ 为严平稳过程, 由定义如果均值函数 $m(t) = EX(t)$ 存在, 则必为常数, 即 $m(t) = m, t \in T$. 同样, 如果方差函数存在, 则 $\mathrm{Var}(X(t)) = E(X(t) - m)^2$ 也是一个常数, 记为 σ^2. 设 $s, t \in T$ (不妨设 $s < t$), 由平稳性, 其协方差函数

$$E(X(t) - m)(X(s) - m) = E(X(t - s) - m)(X(0) - m).$$

等式右端只依赖于时间差 $t - s$. 若记

$$R(h) = E(X(h) - m)(X(0) - m),$$

定义 4.4 设 $X = \{X(t), t \in T\}$ 为平稳过程, 如果存在正常数 κ 使

$$X(t + \kappa) = X(t),$$

则 X 称为周期平稳过程, κ 为过程的周期. 如果 X 是周期平稳过程, 则其协方差函数也是周期函数, 且与过程有相同的周期. 这是由于

$$\begin{aligned} R(\tau + \kappa) &= E(X(t + \tau + \kappa) - m)(X(t) - m) \\ &= E(X(t + \tau) - m)(X(t) - m)) = R(\tau). \end{aligned}$$

还可以考虑复平稳过程. 其定义与定义 4.2 类似, 差别一是把 $X(t)$ 改为复值, 二是把协方差函数定义为 $E(X(t) - m) \cdot \overline{(X(s) - m)}$, 这里 $\overline{X}$ 表示 X 的共轭.

定理 3.4 若一个不可约 Markov 链中的所有状态都是遍历的, 则对所有 i, j, 极限 $\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$ 存在且 $\pi = \{\pi_j, j \geqslant 0\}$ 为平稳分布. 也即

$$\sum_j \pi_j = 1, \quad \pi_j > 0, \tag{3.15}$$

$$\sum_i \pi_i P_{ij} = \pi_j. \tag{3.16}$$

反之, 若一个不可约 Markov 链只存在一个平稳分布, 即满足 (3.15) 式及 (3.16) 式, 且这个 Markov 链的所有状态都是遍历的. 则该平稳分布就是这一 Markov 链的极限分布, 即对任何 i 有

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j. \tag{3.17}$$

$$E(X(t + h) - m)(X(t) - m) = R(h),$$

即协方差函数仅与时间差有关, 而与起点无关. 当然, 由定义知 $\mathrm{Var}(X(t)) = R(0)$. 此外, 易知 $r(\tau) = EX(t)X(t + \tau)$ 与起点 t 无关, 我们分别称 $r(\tau)$ 和

$$\rho(v) = R(v)/\sigma^2 = R(v)/R(0)$$

为平稳过程 X 的自相关函数和标准自相关函数. 由概率论中相关系数性质易知 $\rho(0) = 1$ 及 $|\rho(v)| \leqslant 1$.

定义 3.2 设 X_n 为一离散时间 Markov 链. 给定 X_n 在状态 i 时, X_{n+1} 处于状态 j 的条件概率 $P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$ 称为 Markov 链的一步转移概率, 记作 $P_{ij}^{n,n+1}$. 当这一概率与 n 无关时称该 Markov 链有平稳转移概率, 并记为 P_{ij}.

例 3.8 继续考虑整数点上的随机游动. 向右挪一格的概率为 p, 向左挪一格的概率为 $q = 1 - p$. 从原点 (状态 0) 出发只有转移偶数步才能回到原点, 所以 $P_{00}^{(2n+1)} = 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 而 $P_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n$. 利用 Stirling 公式知, 当 n 充分大时 $n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$, 于是 $P_{00}^{(2n)} \sim \frac{2^{2n}(pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$. 而 $pq \leqslant \frac{1}{4}$, 等号成立当且仅当 $p = q = \frac{1}{2}$. 于是有当 $p = \frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$. 因此直线上的对称随机游动是常返的. 显然, 当 $p \neq q$ 过程的状态是瞬过的. 有趣的是, 可以证明二维对称随机游动也是常返的, 而三维以上的对称随机游动却是瞬过的.