中国科学技术大学 2017-2018 学年第二学期
(数学分析(B2) 期末考试试卷参考解答)

考试形式: 闭卷　考试时间: 120 分钟　满分: 100 分

一、(本题 15 分) 设 F 具有一阶连续偏导数, $w=w(x,y,z)$ 是方程

$$F(x-aw, y-bw, z-cw)=1$$

（其中 a,b,c 为常数）所确定的隐函数, 试求 $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}+c\dfrac{\partial w}{\partial z}$ 的值.

解　令 $G(x,y,z,w)=F(x-aw,y-bw,z-cw)-1$, 则 w 由 $G(x,y,z,w)=0$ 决定. 利用隐函数定理直接计算得 $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}+c\dfrac{\partial w}{\partial z}=\dfrac{aF_1'+bF_2'+cF_3'}{aF_1'+bF_2'+cF_3'}=1$.

二、(本题 15 分) 求二元函数 $f(x,y)=e^{x+y^2}$ 在 $(0,0)$ 的 Taylor 展开的前 4 项 (直到 3 次).

解　因为

$$e^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\cdots$$

所以

$$\begin{aligned}
e^{x+y^2} &= 1+\left(x+y^2\right)+\frac{1}{2}\left(x+y^2\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+y^2\right)^3+\cdots \\
&= 1+\left(x+y^2\right)++\frac{1}{2}\left(x^2+2xy^2+y^4\right)+\frac{1}{6}\left(x^3+3x^2y^2+3xy^4+y^6\right)+\cdots \\
&= 1+x+\left(\frac{1}{2}x^2+y^2\right)+\left(\frac{1}{6}x^3+xy^2\right)+\cdots
\end{aligned}$$

三、(本题 15 分) 设 $\boldsymbol{v}=(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)\boldsymbol{i}+(a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2)\boldsymbol{j}$ 是平面向量场. 问常数 a_i,b_i,c_i $(i=1,2)$ 满足什么条件时, $\boldsymbol{v}$ 是一个有势场, 并求它的一个势函数.

解: $\boldsymbol{v}$ 是有势场等价于 $b_1x+c_1y=a_2x+b_2y$, 既 $b_1=a_2,\ c_1=b_2$.

设 $f(x,y)$ 是势函数, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2,$$

这推出

$$f(x,y)=\frac{a_1}{3}x^3+b_1x^2y+c_1xy^2+g(y).$$

利用

$$\frac{\partial f}{\partial y}=b_1x^2+2c_1xy+g'(y)=a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2$$

可得 $g'(y)=c_2y^2$, 所以可取 $g(y)=\dfrac{c_2}{3}y^3$.

四、(本题 15 分) 设 p,q 都是正数. 求 $\displaystyle\int_0^1 x^q\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

解 作变换 $x=e^{-t}$. 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^q\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx&=\int_0^{+\infty} e^{-qt}\cdot t^p\cdot e^{-t}\,dt\\&=\int_0^{+\infty} t^p\cdot e^{(q+1)t}\,dt\\&=\frac{1}{q+1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{q+}\right)^p e^{-u}\,du\\&=\frac{1}{(q+1)^{p+1}}\Gamma(p+1)\\&=\frac{p\Gamma(p)}{(q+1)^{p+1}}.\end{aligned}$$

五、(本题 10 分) 设 L 是平面上光滑的简单闭曲线. $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ 是其参数方程表示. L 的方向与参数 t 增加的方向一致. 证明 L 围成的区域面积 F 等于

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n)$$

其中 (a_n, b_n) 是 $\varphi(t)$ 的 Fourier 系数, (c_n, d_n) 是 $\psi(t)$ 的 Fourier 系数.

解　根据 Green 公式， L 所围成的面积为

$$F = \oint_L x\,dy = \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cdot \psi'(t)\,dt.$$

因为 $\varphi(t)$ 的 Fourier 系数为 (a_n, b_n), $\psi'(t)$ 的 Fourier 系数为 $(nd_n, -nc_n)$, 所以根据 Parseval 等式的推论，有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cdot \psi'(t)\,dt &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot nd_n + b_n \cdot (-nc_n)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n d_n - b_n c_n\right). \end{aligned}$$

于是

$$F = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n d_n - b_n c_n\right).$$

六、(本题 10 分) 求 $f(x)=e^{ax}$ $(a\neq 0)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 级数, 并证明:

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n^2+a^2}\right]=\frac{\cosh(a\pi)}{\sinh(a\pi)}.$$

解 设 $f(x)$ 的 Fourier 系数为 (a_n,b_n). 由定义

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\,dx=\frac{1}{a\pi}\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)=\frac{2}{a\pi}\sinh(a\pi).$$

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nx\,x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}e^{ax}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{a}{n}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\sin nx\,dx\right]\\
&=-\frac{a}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\sin nx\,dx\\
&=-\frac{a}{n\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\cdot e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{a}{n}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nx\,dx\right]\\
&=\frac{a}{n^2\pi}\left[(-1)^ne^{a\pi}-(-1)^ne^{-a\pi}\right]-\frac{a^2}{n^2}a_n
\end{aligned}$$

因而

$$a_n=\frac{2a(-1)^n}{\pi(n^2+a^2)}\sinh a\pi,\ \ (n=1,2,\cdots).$$

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\sin nx\,x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{a}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nx\,dx\right]\\
&=-\frac{n}{a}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ax}\cos nx\,x=-\frac{n}{a}\cdot a_n\\
&=\frac{2n(-1)^{n-1}}{\pi(n^2+a^2)}\sinh(a\pi),\ \ (n=1,2,\cdots).
\end{aligned}$$

故，e^{ax} 的 Fourier 级数为

$$\frac{1}{a\pi}\sinh(a\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2a(-1)^n}{\pi(n^2+a^2)}\sinh(a\pi)\cos nx+\frac{2n(-1)^{n-1}}{\pi(n^2+a^2)}\sinh(a\pi)\sin nx\right].$$

其在 π 的值为

$$\frac{1}{a\pi}\sinh(a\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a\sinh(a\pi)}{\pi(n^2+a^2)}=\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}=\cosh(a\pi).$$

七、(本题 10 分) 设曲面 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\}$, 它的定向与 z 轴正向同侧. 设 $f(x,y)=\dfrac{1+z}{1+x^2+y^2},\quad g(x,y)=xy+yz+zx.$

求积分 $\displaystyle\int_S \nabla f\times\nabla g\cdot d\vec{S}.$

解: 可以直接计算, 但很复杂. 因为

$$\operatorname{div}(\nabla f\times\nabla g)=\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g)=\nabla\times\nabla f\cdot\nabla g-\nabla f\cdot\nabla\times\nabla g=0,$$

可以利用Gauss公式, 但需要给积分区域加一个底：$S_1=\{x^2+y^2\le 1,\ z=0\}$, S_1 的定向与 z 轴正向相反, 既 $\boldsymbol{n}_1=$-$\boldsymbol{k}$. 由 Gauss 公式,

$$\int_{S\cup S_1}\nabla f\times\nabla g\cdot d\vec{S}=\iiint_\Omega \operatorname{div}(\nabla f\times\nabla g)dV=0.$$

所以

$$\int_S\nabla f\times\nabla g\cdot d\vec{S}=-\int_{S_1}\nabla f\times\nabla g\cdot d\vec{S}=\int_{S_1}\nabla f\times\nabla g\cdot\boldsymbol{k}dS,$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}\nabla f&=\left(\frac{-2x(1+z)}{(1+x^2+y^2)^2},\frac{-2y(1+z)}{(1+x^2+y^2)^2},\frac{1}{1+x^2+y^2}\right),\\ \nabla g&=(y+z,\quad z+x,\quad x+y)\,,\end{aligned}$$

限制在 S_1 上, $z=0$, 所以

$$\nabla f\times\nabla g\cdot\boldsymbol{k}=\frac{-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

利用对称性可得

$$\int_{S_1}\nabla f\times\nabla g\cdot\boldsymbol{k}dS=2\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}}\frac{y^2-x^2}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy=0.$$

由于 $\nabla f\times\nabla g=\nabla\times(f\nabla g)$, 也可以利用 Stokes 公式计算积分. $\partial S=\{x^2+y^2=1,\ z=0\}$ 是 xy 平面的单位圆周, 赋予它与 S 相容的定向, 由 Stokes 公式可得

$$\int_S\nabla f\times\nabla g\cdot d\vec{S}=\int_S\nabla\times(f\nabla g)\cdot d\vec{S}=\int_{\partial S}f\nabla g\cdot d\vec{r}.$$

由于 $f\Big|_{\partial S}=\frac{1}{2}$, $\int_{\partial S}\nabla g\cdot d\vec{r}=0$, 所以原积分 $=0$.

八、(本题 10 分) 设 $|\alpha| \neq 1$. 证明: 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin \alpha x}{x}\, dx$. 收敛, 并求其值.

解 因为 $\frac{1}{x}$ 单调递减趋于零, 且对任意 $b > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^b \sin x \sin \alpha x\, dx\right| &= \left|\int_0^b \frac{\cos(1+\alpha)x - \cos(1-\alpha)x}{2}\, dx\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{\sin(1+\alpha)b}{1+\alpha} - \frac{\sin(1-\alpha)b}{1-\alpha}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|1+\alpha|} + \frac{1}{|1-\alpha|}\right).\end{aligned}$$

所以根据 Dirichlet 判别法, 知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin \alpha x}{x}\, dx$ 收敛.

给定 $\beta > 0$. 令

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin \alpha x}{x} e^{-\beta x}\, dx.$$

因为

$$\left|\sin x \cos \alpha x e^{-\beta x}\right| \leqslant e^{-\beta x},$$

且 $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\, dx$ 收敛, 所以根据 Weierestrass 判别法知, 积分号下关于 α 求导后的积分, 关于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 一致收敛. 于是

$$\begin{aligned}I'(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \sin x \cos \alpha x\, e^{-\beta x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \big[\sin(x+\alpha x) + \sin(x-\alpha x)\big] e^{-\beta x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\alpha}\int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-\frac{\beta t}{1+\alpha}}\, dt + \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-\frac{\beta t}{1-\alpha}}\, dt\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right)^2} + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1+\alpha}{(1+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2+\beta^2}\right].\end{aligned}$$

积分可得

$$I(\alpha) = \frac{1}{4}\ln\left[(1+\alpha)^2+\beta^2\right] - \frac{1}{4}\ln\left[(1-\alpha)^2+\beta^2\right]. \tag{1}$$

根据 Abel 判别法可知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin \alpha x}{x} e^{-\beta x}\, dx$$

作为含参变量 β 的积分, 在 $[0, +\infty)$ 一致收敛. 因此它在 $[0, +\infty)$ 上连续. 因此在 (1) 中令 $\beta = 0$, 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right|.$$

注　在证明中用到了

$$\int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{ax}\, dt = \frac{1}{1+a^2},\ (a>0).$$

只要分部积分两次即可得此式。