

中国科学技术大学2017-2018学年第二学期  
(数学分析(B2)期中考试试卷, 2018年05月05日)

考试形式: 闭卷 考试时间: 120 分钟 满分: 100 分

一、(本题 10 分) 设  $\Phi(x, y, z)$  是三元可微函数且方程  $\Phi(x, y, z) = 0$  能确定可微的隐函数  $x = x(y, z)$ ,  $y = y(z, x)$ ,  $z = z(x, y)$ . 求  $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$ .

解 根据隐函数求导法则,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \bigg/ \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

故,  $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$ .

注 每个偏导数给 3 分, 结论给 1 分.

二、(本题 10 分) 设  $F(x, y)$  是二元可微函数. 求证空间中存在一条直线使得由方程  $F(x - ay, z - by) = 0$  ( $a, b$  是常数) 表示的曲面的切平面总与此直线平行.

证明 设  $G(x, y, z) = F(x - ay, z - by)$ . 则

$$G'_x = F'_1, \quad G'_y = -aF'_1 - bF'_2, \quad G'_z = F'_2.$$

因此, 切平面的法向为

$$\vec{n} = (G'_x, G'_y, G'_z) = (F'_1, -aF'_1 - bF'_2, F'_2).$$

因为  $\vec{n} \cdot (a, 1, b) = 0$ , 所以切平面法向与常向量  $(a, 1, b)$  垂直. 故, 切平面与以  $(a, 1, b)$  为方向的直线平行.

注 求出切平面的法向给 5 分, 得出结论再给 5 分.

三、(本题 15 分) 讨论函数  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$  在原点的可微性, 以及它在原点的偏导数是否连续?

解 记  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . 则

$$f(x, y) = f(0, 0) + \rho^2 \sin \frac{1}{\rho} = o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0).$$

这说明  $f$  在  $(0, 0)$  可微, 且  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \sin \frac{1}{\rho} + \rho^2 \cos \frac{1}{\rho} \cdot \frac{-x}{\rho^3} = 2x \sin \frac{1}{\rho} - \frac{x}{\rho} \cos \frac{1}{\rho} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \sin \frac{1}{\rho} + \rho^2 \cos \frac{1}{\rho} \cdot \frac{-y}{\rho^3} = 2y \sin \frac{1}{\rho} - \frac{y}{\rho} \cos \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

$(x, y)$  沿直线  $y = x$  趋于  $(0, 0)$  时,  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  都无极限. 故, 它们不连续.

注 可微给 5 分, 偏导数计算给 5 分, 不连续给 5 分.

四、(本题 15 分) 设  $a_j > 0, (j = 1, 2, \dots, n)$ . 求函数  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  在条件  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 1$  之下的最小值.

解 因为  $f$  是非负系数的多项式, 所以  $f$  在所给条件下有最小值, 但无最大值. 构造函数

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \lambda \left( \sum_{i=1}^n a_i x_i - 1 \right).$$

根据 Lagrange 乘法法,  $f$  取到极值的点应为  $F$  的驻点, 即有,

$$2x_i - \lambda a_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i - 1 = 0. \quad (2)$$

从 (1) 可得  $x_i = \lambda \frac{a_i}{2}$ , 代入 (2) 得  $\lambda = \frac{2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ . 因此, 得唯一的驻点  $P = \left( \frac{a_1}{M}, \dots, \frac{a_n}{M} \right)$ , 其中  $M = \sum_{i=1}^n a_i^2$ . 该驻点必为  $f$  在所给条件下的最小值点. 因此, 在所给条件下  $f$  的最小值是

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{M} \right)^2 = \frac{1}{M}.$$

注 构造  $F$  给 3 分. 求出驻点 4 分. 判断驻点为最小值点 4 分. 求出最小值 4 分.

五、(本题 15 分) 求定义在星形区域  $D = \{(x, y) \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1\}$  上满足  $f(1, 0) = 1$  的正值连续函数  $f(x, y)$  使得  $\iint_D \frac{f(x, y)}{f(y, x)} dx dy$  达到最小, 并求出这个最小值.

解 对积分  $I = \iint_D \frac{f(x, y)}{f(y, x)} dx dy$  作变换  $x \rightarrow y, y \rightarrow x$ , 由  $D$  的对称性, 知  $I = \iint_D \frac{f(y, x)}{f(x, y)} dx dy$ . 因而

$$I = \frac{1}{2} \iint_D \left( \frac{f(x, y)}{f(y, x)} + \frac{f(y, x)}{f(x, y)} \right) dx dy \geq \iint_D 1 dx dy = \sigma(D).$$

$$I - \sigma(D) = \frac{1}{2} \iint_D \left( \sqrt{\frac{f(x, y)}{f(y, x)}} - \sqrt{\frac{f(y, x)}{f(x, y)}} \right)^2 dx dy \geq 0.$$

$I = \sigma(D)$  当且仅当  $f(x, y) = f(y, x)$ . 故, 所求函数为所有满足  $f(x, y) = f(y, x)$  及  $f(1, 0) = 1$  的连续正值函数. (.....8 分)

$D$  边界的参数方程为  $x = \cos^3 \varphi, y = \sin^3 \varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ). 故,  $I$  的最小值为

$$\sigma(D) = 4 \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}} 3r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi dr d\varphi = 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{8}\pi. \quad (\dots\dots 7 \text{ 分})$$

六、(本题 15 分) 计算三重积分  $\iiint_V (x^2 + y^2)^5 z dx dy dz$ , 其中  $V$  是圆柱体  $x^2 + y^2 \leq 1$  被曲面  $z = \sqrt{3x^2 + y^2 + 1}$  及  $Oxy$  平面所截下的部分。

解 记所求积分为  $I$ , 则

$$I = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^5 \int_0^{\sqrt{3x^2 + y^2 + 1}} z dz = \frac{1}{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^5 (3x^2 + y^2 + 1) dx dy.$$

由对称性,

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^5 x^2 dx dy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^5 y^2 dx dy,$$

故,

$$I = \frac{1}{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^5 (2x^2 + 2y^2 + 1) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} r^{10} (2r^2 + 1) r dr d\varphi = \frac{19}{84}\pi.$$

七、(本题 10 分) 设  $f(x, y)$  是定义在  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  上的一阶连续可微函数, 满足  $\nabla f \neq 0$  且  $y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  ( $\forall (x, y) \in D$ ). 求  $f(x, y)$  的等值线方程.

解 设  $x = x(t), y = y(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 是等值线  $f(x, y) = C$  的参数方程. 则

$$f(x(t), y(t)) = C.$$

两边对变量  $t$  求导, 得

$$x'(t) \frac{\partial f}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

结合条件  $y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  可得

$$x(t)x'(t) - y(t)y'(t) = 0,$$

即,  $(x^2(t) - y^2(t))' = 0$ . 故,  $x^2 - y^2 = C_1$  是常数. 也就是说  $f$  在  $D$  上的等值线方程为

$$x^2 - y^2 = C_1 \text{ (常数)}.$$

八、(本题 10 分) 设  $P$  是圆  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 上的动点. 从原点往圆过  $P$  点的切线作垂线, 垂足为  $Q$ . 当  $P$  沿圆运动时, 点  $Q$  的轨迹是  $xy$  平面上一条封闭曲线. 求此封闭曲线围成区域的面积.

解 设  $A = (a, 0)$ ,  $Q$  点坐标为  $(x, y)$ ,  $AB$  与  $x$  轴夹角为  $\theta$ . 则

$$OQ = OB + BQ = a \cos \theta + a$$

$$x = OQ \cos \theta = a \cos \theta (1 + \cos \theta)$$

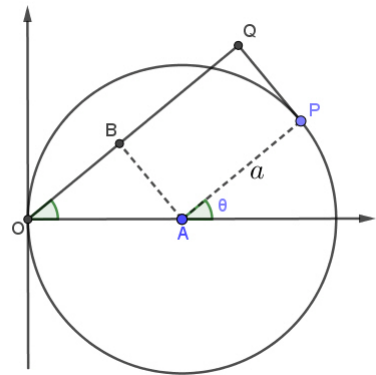
$$y = OQ \sin \theta = a \sin \theta (1 + \cos \theta), \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

故, 点  $Q$  的极坐标方程为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1 + \cos \theta).$$

$Q$  的轨迹所围的区域的面积为

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2.$$



注 求出  $Q$  点的坐标给 4 分. 求出面积给 6 分.