12.1.3 函数的 Fourier 级数展开

定理 1 (Dirichlet) 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期,

1° 如果函数在任何有限区间上是逐段光滑的, 则它的 Fourier 级数在整个数轴上都收敛, 且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2};$$

2° 如果函数处处连续, 且在任何有限区间上是逐段光滑的, 则其 Fourier 级数就在整个数轴上绝对一致收敛于 $f(x)$.

注, 这里所谓函数 $f(x)$ 在有限区间上逐段光滑是指函数除有限个点外, $f(x)$ 连续且有连续的微商 $f'(x)$, 而这有限个点只能是 $f(x)$ 或 $f'(x)$ 的第一类间断点.

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

根据前面的例子, 有

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]. \tag{1}$$

由收敛性定理知, 在区间 $(-\pi,\pi)$ 中上式应为等式. 取 $x=0$, 得

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}=0,$$

即,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

进一步, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 绝对收敛, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\&=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}\\&=\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

在 (1) 中取 $x = \frac{\pi}{2}$ 得

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2},$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

当 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数时, $f(x)$ 以 2π 为周期延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 之后也是偶函数, 此时,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

因此 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

这种形式的三角级数称为余弦级数.

同理, 当 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数时, $f(x)$ 以 2π 为周期延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 之后使之成为奇函数, 此时,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

因此 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

这种形式的三角级数称为正弦级数.

例 2 设在 $[-\pi,\pi]$上, $f(x)=|x|$, 它可延拓成为整个直线上以 2π 为周期的周期函数, 而且是连续的.

因此根据 Fourier 系数的计算公式得 $b_n=0$,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi,$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx\\&=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\\&=\begin{cases}-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, & \text{当 } n=2k-1.\\ 0, & \text{当 } n=2k;\end{cases}\end{aligned}$$

所以它的展开式只含余弦函数项, 且展开式是一致收敛的. 因此

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x,\qquad [-\pi<x<\pi].$$

例 3 周期为 2π 的锯齿函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\pi-x), & 0<x\leqslant 2\pi\\ f(x-2n\pi), & 2n\pi<x\leqslant 2(n+1)\pi, n \text{ 是整数}\end{cases}$$

的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

所以

$$\frac{1}{2}(\pi-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad (0<x<2\pi). \tag{1}$$

在此式中令 $x = \frac{\pi}{3}$ 得

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sin\frac{(3k+1)\pi}{3}}{3k+1} + \frac{\sin\frac{(3k+2)\pi}{3}}{3k+2} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k \sin\frac{\pi}{3}}{3k+1} + \frac{(-1)^k \sin\frac{2\pi}{3}}{3k+2} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi. \tag{2}
$$

在幂级数部分, 我们已得到

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2,
$$

即,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3k+1}-\frac{(-1)^k}{3k+2}+\frac{(-1)^k}{3k+3}\right)=\ln 2.$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+3}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}=\frac{1}{3}\ln 2.$$

于是

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3k+1}-\frac{(-1)^k}{3k+2}\right)=\frac{2}{3}\ln 2. \tag{3}$$

由 (2), (3) 可得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{3}\ln 2,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+2}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi-\frac{1}{3}\ln 2. \tag{4}$$

将 (1) 中的 x 换成 $3x$ $(0 < x < \frac{2\pi}{3})$, 有

$$\frac{\pi - 3x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sin nx - 4\sin^3 nx}{n}$$
$$= 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 nx}{n}$$
$$= \frac{3}{2}(\pi - x) - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 nx}{n}.$$

故,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 nx}{n} = \frac{\pi}{4}, \quad (0 < x < \frac{2\pi}{3}). \tag{5}$$

例 4 求级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2}$ 的和.

解 因为该级数的通项之绝对值不超过 $\frac{1}{n^2}$, 所以此级数在实轴上收敛. 又通项以 π 为周期, 且在 0 取值为 0. 故, 只需在区间 $(0,\pi)$ 中讨论. 通项的导数为 $\frac{\sin 2nx}{n}$. 由 Dirichlet 判别法可知, 对任意 $\delta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$ 在区间 $[\delta,\pi-\delta]$ 上一致收敛. 于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2}$ 在 $(0,\pi)$ 可逐项求导. 即,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n},\quad x\in(0,\pi). \tag{1}$$

由例 3 的 (1), 得 $f'(x)=\frac{1}{2}(\pi-2x)$, $x\in(0,\pi)$. 因此 $f(x)=\frac{1}{2}(\pi x-x^2)$. 故,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2}=\frac{1}{2}x(\pi-x),\quad x\in[0,\pi]. \tag{2}$$

在此式中令 $x=\frac{\pi}{2}$ 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. 由上式并利用半角公式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{x}{2}\left(\pi-\frac{x}{2}\right),\quad x\in[0,2\pi]. \tag{3}$$

例 5 求函数 $f(x)=\cos\alpha x\ (0<\alpha<1)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数展开.

解 由于 $\cos\alpha x$ 是偶函数, 故它的 Fourier 级数为余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\alpha x\,dx=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi\alpha},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\alpha x\cos nx\,dx\\&=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right)\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

于是当 $|x|\leqslant\pi$ 时, 有

$$\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right)\cos nx\right].$$

令 $x=0$, 可得

$$\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

例 6 设 $f(x)$ 是一个以 2π 为周期的函数,

(1) 如果 $f(x\pm\pi)=-f(x)$, 试证明 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 展开只含有奇次谐波, 即

$$a_{2n}=0\ (n=0,1,2,\cdots),\quad b_{2n}=0\qquad(n=1,2,\cdots);$$

(2) 如果 $f(x\pm\pi)=f(x)$, 试证明 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 展开只含有偶次谐波, 即

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0\qquad(n=1,2,\cdots).$$

证明　我们只证明 (1). 设 $f(x)$ 以 2π 为周期且 $f(x\pm\pi)=-f(x)$.

$$
\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\cos(2nx+2n\pi)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

同理可证 $b_{2n}=0$.