补充习题

罗曾宇

题目 1. 若磁场有源，或者说有磁荷 (磁单极子)，麦克斯韦方程应该如何改造？

解答. 由于迄今未发现自由磁荷存在的可靠证据，电荷被认为是电磁场唯一的激发源，故麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho_e}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{J} + \epsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}) \end{cases}$$

注意，这组方程实际上隐含着电流的连续性方程，对磁场的旋度方程求散度，而 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = 0$，并由电场的散度方程，可得到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0,$$

若自由磁荷存在，设其密度为 ρ_m，磁场的散度方程应该改为 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_m$，这时对电场的旋度方程求散度，左方 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = 0$，而右方为 $-\dfrac{\partial \rho_m}{\partial t}$，二者不相等，所以也要进行修正. 设磁荷运动形成的磁流密度为 $\boldsymbol{J_m}$，它也应当遵守守恒定律，即磁荷守恒：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J_m} + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0,$$

所以电场的旋度方程应该修正为 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{J_m} - \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$，考虑到真空中 $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$，麦克斯韦方程组可以修正成如下形式：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_e, \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{J_m} - \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_m, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J_e} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \end{cases}$$

相当之对称和优美.

题目 2. 电势值在边界连续的理由是什么？可以不连续吗？

解答. 电势并非是在所有情况下在边界都连续，对于体电荷分布和面电荷分布，势是处处连续的，甚至在电荷分布内部，也是连续的 (因为在这些区域电场是有限的，即使在越过面电荷分布时要发生突变)，而对于点电荷，线电荷或偶极层，势不再连续.

题目 3. 确定区域内，始终不存在电磁场的条件是什么？

解答. 超导体内部，电导率 $\sigma \to \infty$，由欧姆定律 $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$，因为电流密度不可能无穷大，所以电场为零，并且超导体具有迈斯纳效应，内部磁场也为零.

题目 4. 为什么将 $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$ 称为焦耳 (加热) 功率密度？

解答.