数学分析(B3)习题参考答案

董凯[1]

2020年秋季学期

[1]中国科学技术大学 18级少年班学院. 联系方式: jz2001dk@mail.ustc.edu.cn. 答案如有谬误欢迎指正!

Contents

14 实数理论 **5**

14.1 预备知识 5

14.2 实数的定义 6

14.3 实数的完备性 8

14.4 实直线的拓扑 13

15 连续性与收敛性 **15**

15.1 连续函数 15

15.2 级数的收敛性 23

15.3 连续函数的多项式逼近 32

15.4 Fourier级数的收敛性 36

16 度量空间的连续函数 **41**

16.1 $\mathbb{R}^n$与度量空间 41

16.2 度量空间的拓扑 43

16.3 度量空间上的连续函数 46

17 映射的微分 **51**

17.1 线性映射 51

17.2 映射的微分 52

17.3 逆映射定理 56

17.4 隐映射定理 58

17.5 条件极值 61

18 Riemann积分 **65**

18.1 $\mathbb{R}^2$的有面积集合 65

18.2 Riemann积分 67
18.3 可积函数类 70
18.4 重积分换元公式* 71

Chapter 14

实数理论

14.1 预备知识

14.1.2 下面每个命题都是全称–存在型命题.写出颠倒量词后相应的命题，并解释为什么它是错的.

(2)每个非零有理数都有倒数.

(4)没有最大素数.

解：(2)原命题即为：对任何的非零有理数，皆存在一个数是它的倒数. 调换量词顺序后，命题改为：存在一个数，使得对任何的非零有理数，这个数都是它的倒数. 该命题错误是显然的.

(4)原命题即为：对任何一个素数，皆存在另一个素数比它更大. 调换量词顺序后，命题改为：存在一个素数，使得对任何的一个素数，前者都比它要大. 采用反证法. 若该命题正确, 则素数的个数是有限的, 取$p = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_t + 1$, 其中$p_i$为所有的素数, 易证$p$也为素数. 得到矛盾. □

14.1.3 写出如下命题的否定.

(1)存在N, 使得对任意正偶数都能表成不超过N个素数之和.

(2)对每个正整数n, 存在正整数m, 对每个正整数x, 存在非负整数$a_1, a_2, ..., a_m$满足$x = a_1^n + ... + a_m^n$.

解：(1)对任何正整数N, 均存在正偶数无法表成不超过N个素数之和.

(2)存在正整数n, 使得对任何正整数m, 均存在正整数x，对任意非负整数$a_1, a_2, ..., a_m$均无法满足$x = a_1^n + ... + a_m^n$. □

14.1.7 $\mathbb{N}$的有限子集构成的集合是可数集合还是不可数集合？

证明：这是一个可数集合. 证明如下:

记$\mathcal{N}_n$为$\mathbb{N}$的所有元素个数不大于n的非空子集构成的集合, 并规定$\mathcal{N}_0 = \{\varnothing\}$. 则自然地存在从$n$个自然数集的笛卡尔积所构成的集合(即$\mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N}$)到$\mathcal{N}_n$的一个满射(具体来说, 可以构造$f_n(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$). 故$\mathcal{N}_n$为可数集, 进而$\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n$是可数个可数集的并集, 从而也是可数的.

注记: 实际上，这些有限子集均可以自然地嵌入到$[0,1]$中所有有理数构成的集合当中(为什么?), 它是$\mathbb{Q}$在$[0,1]$上的限制的子集, 自然是可数的. 另外, 一件明显的事情是: 无限不循环小数无论在何种正整数进制下, 皆是无限不循环的. □

14.1.9 一个不可数集合里一个可数子集合的余集仍是不可数集合.

证明：反证法. 设不可数集合X有可数子集合A。若A^c为可数集合，因有限个可数集合之并可数，$X = A \cup A^c$也是可数集合. 矛盾. □

14.2 实数的定义

14.2.6 一个正有理数Cauchy列能与一个负有理数Cauchy列等价吗？

解: 可以. 例如数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$分别取为

$$a_n = \frac{1}{n}, b_n = -\frac{1}{n},$$

显然它们是彼此等价的. □

14.2.10 设x为实数. 证明: 存在一个代表x的有理数Cauchy列$x_1, x_2, x_3, ...$使得对所有n, $x_n < x$.

证明:

方法一:

设x为无理数, 它有一个代表列为$\{y_n\}$.

若x为有理数, 取

$$x_n = \begin{cases} y_n - \frac{1}{n} & \text{if } y_n \leq x \\ 2x - y_n & \text{if } y_n > x \end{cases}$$

容易验证, 有理数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$相互等价.

若x为无理数, 可设$\{y_n\}$中只有有限项小于x. 对除去这些以外的项, 由Archimedes公理, 存在趋于无穷的正整数列k_n使得对任何的正整数n, $\frac{1}{k_n} \le y_n - x \le \frac{1}{k_n - 1}$. 否则, 若没有这样的正整数列, 则存在一串子列$\{k_{n_t}\}$是一个有界M数列. 但显见$\{k_n\}$存在一个趋于无穷的子列, 故不妨设$\{k_n\} - \{k_{n_t}\}$为其趋于无穷的子列. 而

$$\left|y_{k_{n_t}} - y_{k_{n_{t-1}}}\right| = \left|(y_{k_{n_t}} - x) - (y_{k_{n_{t-1}}} - x)\right| \ge \frac{1}{k_{n_t}} - \frac{1}{k_{n_{t-1}} - 1} \to \ge \frac{1}{M},$$

对任何充分大的t均成立, 故这是矛盾. 由有理数的稠密性, 存在一个有理数$z_n > x$使得$|x - z_n| \le \frac{1}{2k_n}$, 取

$$x_n = \begin{cases} y_n & \text{if } y_n < x \\ 2z_n - y_n & \text{if } y_n > x \end{cases}$$

显见$\{x_n\}$是有理数Cauchy列, 且$x_n < x$, 下面来证明它与$\{y_n\}$等价. 注意到对除去有限项后有

$$|x_n - y_n| \le 2(y_n - z_n) \le 2(y_n - x) \le \frac{1}{2(k_n - 1)},$$

其中$k_n \to \infty$. 这即为欲证之式. □

Δ方法二:

设x为实数, 有代表列$\{y_n\}$. 则对任给的正整数k, 存在正整数$N = N(k)$使得对任何的$i, j > N(k), |x_i - x_j| < \frac{1}{2k}$. 取

$$x_n = \begin{cases} c_0 & \text{if } n < N(1) \\ y_n - \frac{1}{k} & \text{if } N(k) \le n < N(k+1) \end{cases}$$

其中c_0为某个小于x的有理数. 则由构造过程可见$\{x_n\}$为Cauchy列且与$\{y_n\}$等价. 同时, 固定任一$N(k) \le n < N(k+1)$, 对任意的i, 有

$$x_n - y_i = (y_n - y_i) - \frac{1}{k} < \frac{1}{2k} - \frac{1}{k} = -\frac{1}{2k},$$

选取x_n的一个代表列$\{x_n\}_{i=1}^{\infty}$, 立即得到$x_n < x$. 因此这个Cauchy列即符合题意. □

14.2.11 设x为实数. 证明: 存在一个代表x的有理数Cauchy列$x_1, x_2, x_3, ...$使得对所有n, $x_n < x_{n+1}$.

证明: 由有理数的稠密性, 对任给的正整数n, 存在有理数x_n使得$x-\frac{1}{n+1}<x_n<x-\frac{1}{n}$. 则Cauchy列$\{x_n\}$满足$x_n<x_{n+1}$. 由上一题, 不难验证此Cauchy列代表$x$. □

14.2.13 设x为实数. 证明: 存在一个代表x的有理数Cauchy列, 它的每一项可以表示为$\frac{p^2}{q^2}$, 其中p,q为整数.

证明: 设$\{\frac{p_n}{q_n}\}$为一个代表x的有理数Cauchy列. 对任给的正整数n, 如果皆存在一个正有理数$\frac{s_n^2}{t_n^2}$, 使得$\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{s_n^2}{t_n^2}\right|<\frac{1}{n}$, 则已经证毕.

断言: 对任何有理数$\frac{p}{q}$, 任给正整数n, 都存在有理数$\frac{s^2}{t^2}$使得$\left|\frac{p}{q}-\frac{s^2}{t^2}\right|<\frac{1}{n}$.

事实上, 不妨设$\frac{p}{q}$不能写成如证的形式. 取a_1,b_1分别为小于和大于$\frac{p}{q}$的两个非负整数, 使得$a_1^2<\frac{p}{q}<b_1^2$. 若$c_1:=\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)^2<\frac{p}{q}$, 则取$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},b_2=b_1$, 否则（注意取不到等号）取$a_2=a_1,b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$. 如此循环往复, 我们得到三个有理数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$. 注意到

$$\left|c_n-\frac{p}{q}\right|\le b_{n+1}^2-a_{n+1}^2\le 2b_1(b_{n+1}-a_{n+1})\le\frac{2b_1(b_1-a_1)}{2^n}\to 0,$$

从而我们完成了对断言的证明. □

注记: 上式也蕴含着$\{c_n\}$是有理数Cauchy列, 且和常有理数Cauchy列$\{\frac{p}{q}\}$等价.

14.3 实数的完备性

14.3.5 计算下列数列的上确界、下确界、上极限、下极限和所有极限点.

(3)$x_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}+2\sin(\dfrac{n\pi}{2})$,

(4)$x_n=\sin n$.

解: (3) 改写一下表达式, 有

$$x_n=\begin{cases}\frac{1}{n}+1 & \text{if } n=2k\\ \frac{1}{n}+1 & \text{if } n=4k+1\\ \frac{1}{n}-3 & \text{if } n=4k+3\end{cases}$$

则$\{x_n\}$的上确界为2, 下确界为-3, 所有极限点为1, -3, 上极限为1, 下极限为-3. □

(4) $\{x_n\}$的上确界为1, 下确界为-1, 所有极限点构成的集合为$[-1,1]$, 上极限为1, 下极限为-1. 证明如下:

对任意$|x| > 1$, 存在x的邻域与$[-1,1]$无交, 因此它不是$\{x_n\}$的上下确界、上下极限, 也不在$\{x_n\}$的极限点集中. 剩下部分我们来证明一个等价的命题: $\{\sin n\}$在$[-1,1]$上稠密.

由**例***14.2.3*, 集合$A := \{m + 2n\pi : m, n \in \mathbb{Z}, m > 0\}$在$\mathbb{R}$上稠密, 进而$A_1 := A \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$在$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上稠密. 任意给定$c \in [-1,1]$, 均存在$x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$使得$\sin x_0 = c$. 由$\sin x$的连续性, 对任给的$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$使得$|x - x_0| < \delta$时即有$|\sin x - c| < \epsilon$. 对这个$\delta$, 由稠密性, 存在$m + 2n\pi \in A_1$使得$|(m + 2n\pi) - x_0| < \delta$. 故$|\sin m - c| < \epsilon$, 完成命题的证明. □

14.3.6 设一个有界数列$\{x_n\}$是一个单调增数列$\{y_n\}$与单调减数列$\{z_n\}$的和, 即$x_n = y_n + z_n$. 那$\{x_n\}$收敛吗? 如果再假设$\{y_n\}, \{z_n\}$有界呢?

解: 不假设有界时不一定收敛. 有反例:

$$y_n = 2n + (-1)^n, z_n = -2n,$$

则$x_n = y_n + z_n = (-1)^n$有界但不收敛.

额外假设有界时一定收敛. 这是因为单调有界列必收敛, 且收敛数列之和也收敛. □

14.3.7 设E是$\mathbb{R}$的非空子集, 且y是两个数列$\{x_n\}, \{y_n\}$的共同极限, 其中$x_n \in E$, y_n是E的上界. 证明$y = \sup E$.

证明: 由$\{y_n\}$定义, y是E的一个上界. 由$\{x_n\}$定义, 任给$\epsilon > 0$, 存在$x_n \in E$使得$x_n \geq y - \epsilon$, 知y为E上确界. □

14.3.9 是否存在一个数列的极限点恰好为$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$?

解: 不存在这样的数列. 否则不妨设$\{x_n\}$为这样的一个数列, 我们来证明0也是它的极限点. 对任意的正整数n, 因为$\frac{1}{2n}$是极限点, 从而存在x_{k_n}使得

$$\left| x_{k_n} - \frac{1}{2n} \right| \leq \frac{1}{2n},$$

即$x_{k_n} \leq \frac{1}{n}$. 不妨取$k_n < k_{n+1}$, 则数列$\{x_{k_n}\}$收敛于0, 且为$\{x_n\}$的子列. 故0为$\{x_n\}$的极限点. □

注记: 极限点集是闭集, 且$\mathbb{R}$上的聚点集（或称导集）也为闭集.

14.3.10 约定$\sup \varnothing = -\infty$. 设$A, B$为$\mathbb{R}$的非空子集. 证明: $\sup(A \cup B) \geq \sup A, \sup(A \cap B) \leq \sup A$.

证明: (1) 显然$A\cup B$存在上界, 进而存在上确界. 进一步, 对任给的$\epsilon>0$, 存在$x\in A\subseteq A\cup B$使得$x\le \sup A-\epsilon$, 这就导出结论成立.

(2) 若$A\cap B=\varnothing$, 则结论已经成立. 否则不妨设$A\cap B$非空. 则对任意$x\in A\cap B$, $x\le \sup A$. 从而$\sup A$是$A\cap B$的一个上界, 它当然不小于$A\cap B$的上确界. □

14.3.11 证明: $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-x_n)$.

证明: $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{j>k}\{x_j\}=-\lim\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{j>k}\{-x_j\}=-\varliminf\limits_{n\to\infty}(-x_n)$. □

14.3.13 设$\{x_n\},\{y_n\}$是两个实数列, 且$\lim x_n=x\in\mathbb{R}$, 证明:

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$.

证明: (1) $x+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n=\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n\le\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n=x+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

(2) $x+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n=\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n\le\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n=x+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$. □

14.3.15 (1) 证明: 如果数列$\{x_j\}$满足$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{j>k}\{x_j\}=-\infty$, 那么$\lim\limits_{j\to\infty} x_j=-\infty$;

(2) 证明: 如果数列$\{x_j\}$在扩充的实数系中只有一个极限点, 并且该极限点为$+\infty$, 那么$\lim\limits_{j\to\infty} x_j=+\infty$.

证明: (1) 因$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\le\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$, 故$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$.

(2) 因为它仅一个极限点, 所以$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$. □

14.3.16 任取所有有理数的一个排列$r_1,r_2,\ldots$, 证明: 此数列的极限点集合是扩充的实数系.

证明:对扩充实数系中的任一a, 它有各项均不相同的有理Cauchy代表列$\{x_n\}$. 按照以下次序选取$\{r_n\}$的一个子列: 先取好$r_{k_1}=x_1$, 假设r_{k_n}已经取好且对应了x_{l_n}, 则在$x_{l_n},x_{l_n+k_n}$之间选取$x_{l_{n+1}}$作为$r_{k_{n+1}}$. 则按这样归纳选好的$\{r_{k_n}\}$是$\{r_n\}$的子列, 也是$\{x_n\}$的子列, 它收敛到了a. □

注记:事实上, 由有理数的稠密性, 本题是不证自明的.

14.3.20 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y, x, y \in \mathbb{R}$, 求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + ... + x_ny_1}{n}.$$

证明: 记$s_n = \frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+...+x_ny_1}{n}$, 设$\{x_n\}, \{y_n\}$有共同的界$M > 0$. 对任意正整数$n$, 存在$K > 0$, 对任何$k > K$, 有$y - \frac{1}{n} < y_k < y + \frac{1}{n}$. 则

$$\frac{(x_1 + ... + x_{k-K})(y - \dfrac{1}{n}) + x_{k-K+1}y_K + ... + x_ky_1}{k} \le s_k.$$

固定K, 有

$$\begin{aligned}
\varliminf_{k\to\infty} s_k &\ge \varliminf_{k\to\infty} \frac{(x_1 + ... + x_{k-K})(y - \dfrac{1}{n}) - KM^2}{k} \\
&= \varliminf_{k\to\infty} \frac{(x_1 + ... + x_{k-K})(y - \dfrac{1}{n})}{k} \\
&= \left(y - \frac{1}{n}\right) \varliminf_{k\to\infty} \frac{x_1 + ... + x_{k-K}}{k} \\
&= \left(y - \frac{1}{n}\right) \varliminf_{k\to\infty} \frac{x_1 + ... + x_k}{k} \\
&= x\left(y - \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

同理, 还有

$$\varlimsup_{k\to\infty} s_k \le x\left(y + \frac{1}{n}\right).$$

由于n的任意性, 我们就得到了要证的结论. □

14.3.21 设$\{x_n\}$是单调递减的正数列, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$收敛. 设$P$表示从级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$中任意抽取有限或无限项求和所得数的全体. 证明: P是一个区间当且仅当对任意n有

$$x_n \le \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j.$$

证明:先设P为一个区间. 若存在某个正整数n, 使得$x_n > \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j$, 我们可以断言, $I = (\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j, x_n)$中的正数不在$P$内. 若不然, 则存在集合$A \subset \mathbb{N}$, 使得$x_A := \sum_{j\in A} x_j \in I$. 若存在小于$n$的正整数$k \in A$, 则$x_n > x_A \le x_k \le x_n$矛盾; 若对所有$k < n$均不在$A$内, 则$\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j < x_A \le \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j$矛盾. 所以断言成立, P不是区间, 得到矛盾. 必要性得证.

又设对任意n有$x_n \le \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j$. 我们证明$P=(0,x_{\mathbb{N}}]$. 任取$a\in(0,x_{\mathbb{N}}]$, 我们按照如下规则选取集合$A$: 先选取$k_1$使得$x_{k_1} \le a < x_{k_1+1}$ (若不存在这样的k_1, 则选取$k_1=1$), 假设已经选好到k_n且前面各式均不取等号, 记$A_n=\{k_1,...,k_n\}$, 选取k_{n+1}使得$x_{k_{n+1}} \le a-x_A < x_{k_{n+1}+1}$ (同样地, 若不存在这样的k_{n+1}, 则选取$k_{n+1}=k_n+1$). 因$\{x_n\}$单调收敛到0, 故这样的选择不会在不因取等号之外的情况下终止. 下面我们只要证明$x_A=a$, 其中A是这样选好的集合. 不妨设上述各式均不取等号. 首先由选择过程可知, $x_A \le a$是显然的. 其次对任何的$\epsilon>0$, 由选取过程可知, 我们选出了一个k_n使得$x_{A_n} > a-\epsilon$, 因此$x_A > x_{A_n} > a-\epsilon$. 因$\epsilon$任意, 我们就得到了$x_A=a$. 充分性得证. □

14.3.23 设$0<x_1<1, x_{n+1}=x_n(1-x_n), \forall n\in\mathbb{Z}^+$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$.

证明: 注意到对任何$n>1$, $x_n \le 1/2$, 且函数$f(x)=x(1-x)$在$x\le 1/2$上单调递增, 因此我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_{n+1} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n(1-x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(1-x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot (1-\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n).$$

因此, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 进而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}(1-x_n)=1.$$

由Stolz定理, 就有

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1,$$

如所欲证. □

*注记:*本题的结论可以推广至:

设$0<x_1<1/q, 0<q\le 1, x_{n+1}=x_n(1-qx_n), \forall n\in\mathbb{Z}^+$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1/q$.

14.3.24 设非负数列$\{x_n\}$满足$x_{m+n}\le x_m x_n (\forall m,n)$, 证明: 数列$\{\sqrt[n]{x_n}\}$收敛.

*证明:*固定正整数k, 则任意的正整数n可以写为$n=kp+q, 0\le q<k$的形式. 设$M_k=\max\limits_{0\le i\le k-1} x_i$, 其中$x_0:=1$. 因此

$$\sqrt[n]{x_n} \le \sqrt[n]{x_{kp}x_q} \le \sqrt[n]{x_k^p x_q} = x_k^{p/(kp+q)} x_q^{1/n} \le M_k^{1/n} x_k^{p/(kp+q)}.$$

对n取上极限, 注意到这时$p \to \infty$, 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \le x_k^{1/k}.$$

再对k取下极限, 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \le \underline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{x_k}.$$

也即$\{\sqrt[n]{x_n}\}$的上下极限相等, 极限存在. □

14.4 实直线的拓扑

14.4.1 设A为(实数域上的)开集, 且B为A的有限子集. 证明: $A - B := \{x \in A \mid x \notin B\}$是开集. 若$B$是可数集合, 同样的结论是否仍成立?

证明:任给$x \in A - b$, 则$x \in A$. 存在$\delta > 0$使得$I := (x-\delta, x+\delta) \subset A$. 设$I - (A - B) = \{x_1, ..., x_N\}$, 则取$\delta' = \min\limits_i\{|x - x_i|\}$, 有$(x-\delta', x+\delta') \subset A - B$. 故$A - B$为开.

若B为可数集合, 该结论不一定成立. 有反例: $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{Q}$. 因有理数的稠密性, $A - B = B^c$既不是开集也不是闭集. □

14.4.2 设$\{I_\lambda \mid \lambda \in \Gamma\}$是一族开区间, 且它们的交集$\bigcap\limits_{\lambda\in\Gamma} I_\lambda$非空. 证明: 它们的并集$\bigcup\limits_{\lambda\in\Gamma} I_\lambda$是一个开区间.

证明;记$I = \bigcup\limits_{\lambda\in\Gamma} I_\lambda$. 我们只要证明这是一个区间. 设$i \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Gamma} I_\lambda$, 任取$a, b \in I$, 则存在$\lambda_1, \lambda_2$使得$a, i \in I_{\lambda_1}, b, i \in I_{\lambda_2}$. 故$(a,i), (b,i) \subset I$（或者$(i,a), (i,b)$）. 这就说明$(a,b) \subset I$, I是一个区间. □

14.4.3 设A是数列$x_1, x_2, ...$的附属集合.

(1) 证明: A的聚点是数列的极限点;

(2) 证明: 如果A中的每个点都在数列中只出现有限次, 那么数列的实数极限点是集合的聚点.

证明: (1) 若a是A的聚点, 则对任何n, 存在$a \ne y_n = x_{k_n} \in A$使得$|y_n - a| < \frac{1}{n}$. 可以不妨设$k_n < k_{n+1}$, 则$\{x_{k_n}\}$是$\{x_n\}$的以$a$为极限的子列. 故$a$为$\{x_n\}$的极限点.

(2) 设$\{x_n\}$的子列$\{x_{k_n}\}$有极限a, 因数列中的每项只出现有限次, 故可不妨设$\forall n, x_{k_n} \ne a$且数列中的项两两不等. 则任给正整数n, 存在$N > 0$, 使得自k_N之后的项都在$(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$中, 这说明$a$为$A$的聚点. □

14.4.6 证明: 一个数列的实数极限点集合为闭集.

证明:设数列$\{x_n\}$的极限点集为A. 任给$a \in A^c$, $\exists \epsilon > 0, \forall n$充分大都有$|x_n - a| > \epsilon$. 这说明$(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset A^c$, 即$A^c$为开集, A为闭集. □

14.4.9 证明: 有限个紧集的并是紧集, 任意个紧集的交是紧集.

证明:在$\mathbb{R}^1$中, 紧集等价于有界闭集. 因此这两条都是显然的. □

14.4.11 对于两个非空的实数集合A, B, 定义$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$.

(1) 证明: 如果A为开集, 则$A+B$为开集;

(2) 证明: 如果A, B均为紧集, 那么$A+B$为紧集;

(3) 给出一个A, B为闭集, 但是$A+B$不是闭集的例子.

证明:(1) 对任意$b \in B$, $A+b$是A的平移, 因此是开集. 所以$A+B = \bigcup\limits_{b \in B}(A+b)$是开集的并集, 也是开集.

(2) 任取数列$\{x_n\} \subset A+B$, 其中$x_n = a_n + b_n, a_n \in A, b_n \in B$. 则因为$A, B$都列紧, 所以可以先选取$\{a_n\}$的子列, 再在其中对应选取$\{b_n\}$的子列, 得到数列$\{a_{k_n}\}, \{b_{k_n}\}$. 从而$\{x_{k_n}\}$是一个收敛子列, $A+B$是紧集.

(3) 取两个闭集$A = \{n + \frac{1}{n} : n \geq 2\}, B = \{-n : n \geq 2\}$, 则$0 \notin A+B$但却是$A+B$的聚点. 这说明$A+B$不是闭集. □

14.4.15 如果$A \subset B_1 \cup B_2$, 这里B_1, B_2为不交的开集, 且A为紧集, 证明: $A \cap B_1$为紧集. 若B_1与B_2相交, 结论仍成立吗?

证明: 设$A \cap B_1$有任一开覆盖$\mathcal{F}$. 则A有开覆盖$\mathcal{F} \cup \{B_2\}$, 它有有限子覆盖$\mathcal{H}$. 因为$(A \cap B_1) \cap B_2 = \varnothing$, 故$\mathcal{H} - \{B_2\} \subset \mathcal{F}$也是$A \cap B_1$的有限子开覆盖, 这说明$A \cap B_1$是紧集.

若$B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, 结论不一定成立. 有反例: $B_1 = (1,4), B_2 = (3,6), A = [2,5]$. □

注记:不难看出, 此证明可以推广至一般的空间中.

Chapter 15

连续性与收敛性

15.1 连续函数

15.1.2 设$f_1, ..., f_n$为$\mathbb{R}$上的连续函数, 集合A与B定义如下

$$A := \{x \in \mathbb{R} : f_1(x) \geq 0, f_2(x) \geq 0, ..., f_n(x) \geq 0\},$$
$$B := \{x \in \mathbb{R} : f_1(x) > 0, f_2(x) > 0, ..., f_n(x) > 0\}.$$

证明A是闭集, 但B是开集.

*证明:*连续函数即开集的原像是开集. 而

$$A^c = \{f_1(x) < 0\} \cup \{f_2(x) < 0\} \cup ... \cup \{f_n(x) < 0\}$$
$$B = \{f_1(x) > 0\} \cap \{f_2(x) > 0\} \cap ... \cap \{f_n(x) > 0\}$$

分别是n个开集的并、n个开集的交, 故都是开集. 相应地, A为闭集. □

*注记:*本题也可以用15.1.1的结论.

15.1.3 给出$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y$的定义, 并证明: 它成立当且仅当对于取值在$f$的定义域中并且发散到$+\infty$的任意数列$\{x_n\}$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$.

证明:

定义: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y$是指, 对任给的$\epsilon > 0$, 存在$M$, 使得对任何$x > M$, 有$|f(x) - y| < \epsilon$.

先设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y$. 则对任给的$\epsilon > 0$, 取$N$使得$x_N > M$, 就有对任何$n > N$, 有$|f(x_n) - y| < \epsilon$. 反之, 若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y$不成立, 则存

在$\epsilon_0 > 0$, 对任何n, 均存在$x_n > n$使得$|f(x_n) - y| \geq \epsilon_0$. 这说明趋于无穷的数列$\{x_n\}$在$f$下的像不以$y$为极限, 矛盾. □

15.1.4 设点x_0是函数f的跳跃间断点. 证明: 如果$\{x_n\}$是定义域中收敛于x_0的点列, 那么数列$\{f(x_n)\}$至多有三个极限点.

证明:我们只要证明$\{f(x_n)\}$不会有$f(x_0-0), f(x_0), f(x_0+0)$以外的极限点即可. 不妨设三者不相等, 且$f(x_0-0) < f(x_0) < f(x_0+0)$. 再不妨考虑$\{f(x_n)\}$收敛于$a \in (f(x_0-0), f(x_0))$ (其它情形类似可证). 这意味着对$\epsilon_0 := \min\{(f(x_0-0)-a, a-f(x_0)\}/2 > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得在$x_0$的以$\delta$为半径的球形邻域内有无穷多项$x_n$, 且都满足$|f(x_n) - a| < \epsilon_0$. 但这是荒谬的, 因为

$$f(x_0-0) < \frac{f(x_0-0)+a}{2} < f(x_n) < \frac{f(x_0)+a}{2} < f(x_0) < f(x_0+0).$$

□

15.1.8 设f在$\mathbb{R}$上连续. 问下列等式是否成立?

$$f\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n).$$

解:不一定成立. 有反例:

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n\text{是偶数} \\ 1 & \text{if } n\text{是奇数} \end{cases}$$

$$f(x) = -x$$

则

$$f\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right) = -1 \neq 0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n).$$

□

注记:下列等式是成立的:

$$f\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n\right) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n).$$

15.1.10 证明对任意函数f, 有

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

若考虑函数的像(即原像的对立面), 问上面的等式是否对函数的像成立?

证明:对$\forall x \in f^{-1}(A \cup B)$, $f(x) \in A \cup B$, 不妨$f(x) \in A$, 则$x \in f^{-1}(A)$; 对$\forall x \in f^{-1}(A)$, $f(x) \in A \subset A \cup B$, 故$x \in f^{-1}(A \cup B)$, $x \in f^{-1}(B)$同理. 故$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

对$\forall x \in f^{-1}(A \cap B)$, $f(x) \in A \cap B$, 故$x \in f^{-1}(A)$且$x \in f^{-1}(B)$, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$; 对$\forall x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f(x) \in A$且$f(x) \in B$, 故$f(x) \in A \cap B$, $x \in f^{-1}(A \cap B)$. 因此$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

若考虑函数的像, 第一式仍然成立, 但第二式可能不成立. 第一式证明如下:

对$\forall x \in f(A \cup B)$, $\exists y \in A \cup B$使得$f(y) = x$. 若$y \in A$, 则$x \in f(A)$; 若$y \in B$, 则$x \in f(B)$. 反之的包含关系是显然的. 故$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

第二式有反例:

$$f(x) = f(-x)$$
$$\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^+, B = -A$$

则$f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing \neq f(A) = f(B) = f(A) \cap f(B)$. □

注记:对任意函数(映射)f, 有$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;若$f$还是单射, 则包含关系变为等式:$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

15.1.12 设f为区间$[a, b]$上的连续函数, g为区间$[b, c]$上的连续函数, 且$f(b) = g(b)$.证明

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & a \leq x \leq b \\ g(x) & b \leq x \leq c \end{cases}$$

在$[a, c]$上连续. 这种构造方法称为连续函数的粘合.

证明:$h(x)$在$[a, b) \cup (b, c]$上连续是显然的. 在b点处, 由f和g的连续性, 对任何的$\epsilon > 0$, 存在$\delta_1, \delta_2 > 0$, 使得在$(b-\delta_1, b]$上, 有$|f(x) - f(b)| < \epsilon$; 在$[b, b-\delta_2)$上, 有$|g(x) - g(b)| < \epsilon$. 因$f(b) = g(b)$, 取$\delta = \min \delta_1, \delta_2$即得$h$在$b$点的连续性. □

注记:也有一般连续函数(映射)的粘合, 它是对于有限闭覆盖或任意开覆盖均成立的.

15.1.14 设f在(a, b)上是C^1函数, 且f'在端点a和b的单边极限存在. 证明: f在端点的单边极限也存在, 且f可以扩充为$[a, b]$上的C^1函数.

证明:只要考虑端点处的情况即可. 因为f'在(a,b)上连续, 且存在单边极限, 故其有一致界M, 进而f满足Lipschitz条件, 是一致连续的. 由连续扩张定理, f可以唯一扩张为$[a,b]$上的一致连续函数; 同样的原因, 也有f'是一致连续的(在《数学分析(B1)》的习题中给出过证明), 它也可以唯一扩张为$[a,b]$上的一致连续函数. 它们显然是自洽的(由《数学分析(B1)》中的定理保证, 详细可参见导函数的介值性一部分). □

15.1.16 设f为区间I上的单调增函数, 该区间的左右端点分别为a,b, 端点可以在或不在区间I里. 证明: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$和$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$存在, 前者可以取$-\infty$, 后者可以取$+\infty$.

证明: 若$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$不存在, 则存在两个递增趋于$b$的数列$\{x_n\},\{y_n\}$, 使得$\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) < \lim\limits_{x\to\infty} f(y_n)$. 构造一个新的数列$\{z_n\}$: 从$x_1,y_1$中选出较小的一个作为$z_1$, 不妨设选取的是$x_1$, 再从$x_2$和$y_1$中选出较小的一个作为$z_2$, 如此往复. 则$z_n\uparrow b$, $\{f(z_n)\}$单调递增. 由选取过程知, $\{x_n\},\{y_n\}$每一项都在$\{z_n\}$中出现, 故$\{f(z_n)\}$有两个极限点, 与其递增性矛盾. 同理可证明另一侧. □

注记:本题的结论保证了单调函数在区间内部的间断点只能为第一类间断点.

15.1.17 设f为D上的函数. 取定x_0为D的聚点, 对任意$\delta>0$, 定义

$$M(\delta)=\sup\{f(x)|x\in D, 0<|x-x_0|<\delta\},$$
$$m(\delta)=\inf\{f(x)|x\in D, 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

证明以下命题:

(1) $M(\delta)$和$m(\delta)$在$(0,+\infty)$上分别单调增和单调减;

(2) 极限$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x):=\lim\limits_{\delta\to 0} M(\delta)$, $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x):=\lim\limits_{\delta\to 0} m(\delta)$均存在(包含$\infty$的情况), 它们分别称为函数$f$在$x_0$处的上极限和下极限.

(3) f在x_0处有极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$当且仅当

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)=\underline{\lim_{x\to x_0}} f(x).$$

证明:(1) 在$0<\delta_1<\delta_2$时, 有

$$\{x:0<|x-x_0|<\delta_1\}\subset\{x:0<|x-x_0|<\delta_2\}.$$

因此$M(\delta)$和$m(\delta)$分别单调增与减.

(2) 由Ex 15.1.16, 这两个极限存在.

(3) 必要性. 显然$M(\delta) \geq m(\delta)$, 从而$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) \geq \underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$. 若该式不取等号, 则存在趋于$x_0$的两个点列$\{x_n\},\{y_n\}$使得$f(x_n) \to \overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$, 而$f(y_n) \to \underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$, 这与$f(x)$在$x_0$处极限存在相矛盾.

充分性. $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$使得$0 \leq M(\delta) - m(\delta) < \epsilon$. 设$\{x_n\}$是收敛于$x_0$但与$x_0$不相等的任意点列. 则$\exists N$, 使得$n > N$时就有$|x_n - x_0| < \delta$. 取$k, l > N$, 则$m(\delta) \leq f(x_k), f(x_l) \leq M(\delta)$. 故$|f(x_n) - f(x_m)| \leq M(\delta) - m(\delta) < \epsilon$. 这说明$\{f(x_n)\}$是Cauchy列, 自然收敛. 由$\{x_n\}$的任意性, f在x_0处是连续的. □

15.1.18 设f是D上的函数, 称f上(下)半连续, 是指对D与其聚点集之交的任意点x_0, 有

$$f(x_0) \geq \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \quad (f(x_0) \leq \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)).$$

证明: 若f是开集D上的函数, 那么f上半连续当且仅当对任意$a \in \mathbb{R}$, $\{x \in D : f(x) < a\}$是开集.

证明: 记集合$E := \{x \in D : f(x) < a\}$. 首先考虑$f$上半连续. $\forall a \in \mathbb{R}$, 若$x_0 \in E$, 则存在$\delta > 0$, 使得在x_0点处, $M(\delta) < a$, 此即$B(x_0, \delta) \cap D \subset E$, E为开集. 反之, 设E为开集. 若存在x_0, 使得$f(x_0) < \overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$, 取$f(x_0) < a < \overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$立即有$\forall\delta > 0$, $M(\delta) > a$, 即$B(x_0, \delta)$不包含于E. 因为D是开集, 我们就得到了矛盾. □

15.1.19 证明: 如果区间上的连续函数f只能取有限个值, 那么f是常值函数.

*证明:*令f的定义域为区间I, 并设f取值分别为$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. 对任何的$a < b \in I$, 若$f(a) = a_i, f(b) = a_j, (1 \leq i < j \leq n)$, 则由介值定理, 对$\forall y_0 \in [a_i, a_j]$, 总存在$c \in [a, b]$使得$f(c) = y_0$. 取$y_0$不为$a_1$到$a_n$这$n$个值之外的任何值即得矛盾. 因此$n = 1$, 即$f$常值. □

15.1.20 设f是定义在闭区间$[a, b]$上的函数, 对任意$\delta > 0$, 证明函数f振幅大于或等于δ的点集$D_\delta := \{x \in [a, b] \mid \omega(x, f) \geq \delta\}$是闭集.

证明: $\forall x_0 \in D_\delta^c$, $\omega(x_0, f) < \delta$, 从而存在$r > 0$使得$\sup - \inf\{f(x) - f(y) : x, y \in B(x_o, \delta)\} < 3\delta$. 这就说明$B(x_0, r) \subset D_\delta^c$. 故$D_\delta$是闭集. □

15.1.21 设f是区间上的单调函数. 证明: 如果它的像集是一个区间, 那么它是连续函数. 举出一个定义在区间上的函数, 它既不是单调函数, 也不是连续函数, 但是它的像集是一个区间.

证明:设$f: I \to J$为从区间I到区间J的满射. 对任何开区间$(\tilde{a}, \tilde{b}) \subset \mathring{J}$, 令$a, b \in I$使得$f(a) = \tilde{a}, f(b) = \tilde{b}$. 则

- 因为f单调, 所以对任何$x \in I \backslash (a, b)$, $f(x) \notin (\tilde{a}, \tilde{b})$;
- 因为I是区间, 所以对任何$x \in (a, b)$, $f(x) \in (\tilde{a}, \tilde{b})$;
- 因为f是满射, 所以对任何$y \in (\tilde{a}, \tilde{b})$, 总存在$x \in I$是它的原像, 且由第一条可见此$x \in (a, b)$.

这说明$f^{-1}(\tilde{a}, \tilde{b}) = (a, b)$, 即开区间的原像为开区间. 由实数轴上开集的结构定理, 开集的原像也均为开集. 故f连续.

不单调不连续, 但从区间映到区间的函数的例子:

$$f = \begin{cases} 1 - x & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

□

15.1.25 实数$\mathbb{R}$上的Riemann函数$R(x)$定义为:

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x\text{是无理数;} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}\text{是有理数,} \end{cases}$$

这里p, q是整数, $q > 0$且$(|p|, q) = 1$. 证明: 在任意点x, 该函数的极限都是0, 从而Riemann函数R在所有无理点处连续, 但在任意有理点处都不连续.

证明: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall \epsilon > 0$, 仅有有限个q使得$q^{-1} \geq \epsilon$. 故在区间$(x_0 - 1, x_0 + 1)$内, 仅有有限个点(记作$a_1, \cdots, a_n$)使得$f(a_i) \geq \epsilon$. 取充分小的$\delta < \min\{|x_0 - a_i| : 1 \leq i \leq n\}$, 则$f(x) < \epsilon$对所有$x \in B(x_0, \delta) \backslash \{x_0\}$成立. 即$f$有极限0. 从而它当且仅当在无理点处连续. □

15.1.26 证明: $\mathbb{R}$上连续的周期函数一致连续.

证明:设连续函数f定义在$\mathbb{R}$上, 且具有正周期T, 则f在$[0, 2T]$上一致连续, 即$\forall \epsilon > 0$, $\exists 0 < \delta < T$使得$\forall x, y \in [0, 2T]$, 且$|x - y| < \delta$, 有$|f(x) - f(y)| < \epsilon$. 则$\forall s < t \in \mathbb{R}$且$|s - t| < \delta$, 存在$N = \lfloor s/T + 1/2 \rfloor \in \mathbb{N}$, 使得$s - NT, t - NT \in [\frac{1}{2}T, \frac{3}{2}T]$. 从而$|f(s) - f(t)| = |f(s - NT) - f(t - NT)| < \epsilon$. 这说明$f$在$\mathbb{R}$上面是一致连续的. □

15.1.27 设函数f在区间$[a,b]$上单调增, $x_1 < x_2 < \cdots$是f的间断点, 定义$[a,b]$上的函数$h(x)$如下: $h(a)=0$; 当$x>a$时,

$$h(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(x)-f(x-0)].$$

证明:

(1) $h(x)$是单调函数;

(2) $g(x)=f(x)-h(x)$是连续函数.

证明: (1) $\forall x<y, x,y\in[a,b]$, 由f的单调性,

- 若存在$x_{k_0}\in[x,y)$, 则

$$\begin{aligned}h(y)-h(x)&=[f(y)-f(y-0)]-[f(x)-f(x-0)]+\sum_{x\le x_k<y}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]\\&\ge[f(y)-f(x)]-[f(y-0)-f(x-0)]+[f(x_{k_0}+0)-f(x_{k_0}-0)]\\&\ge 0.\end{aligned}$$

- 若不存在$x_k\in[x,y)$, 则

$$h(y)-h(x)=f(y)-f(y-0)\ge 0.$$

综合以上两种情形即可得h的单调性.

(2) 记$A=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 因数列$\{x_n\}$单调有界, 从而收敛. 若令$z=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 则$\bar{A}=A\cup\{z\}$. $\forall x\in[a,b]$,

- 若$x\notin\bar{A}$, 则存在$\delta>0$, 使得$(x-\delta,x+\delta)\subset[a,b]\backslash A$. 由$f$在该区间上的连续性, f在x处也连续.

- 在$x=x_k$处, 根据上面讨论过的情况, 我们有

$$g(x)=\begin{cases}f(x)-[f(a+0)-f(a)]-\sum\limits_{i=1}^{k-1}[f(x_i+0)-f(x_i-0)] & \text{if } x_{k-1}<x<x_k\\ f(x_k-0)-[f(a+0)-f(a)]-\sum\limits_{i=1}^{k-1}[f(x_i+0)-f(x_i-0)] & \text{if } x=x_k\\ f(x)-[f(a+0)-f(a)]-\sum\limits_{i=1}^{k}[f(x_i+0)-f(x_i-0)] & \text{if } x_k<x<x_{k+1}.\end{cases}$$

进而得到

$$g(x)-g(x_k)=\begin{cases} f(x)-f(x_k-0) & \text{if } x_{k-1}<x<x_k \\ f(x)-f(x_k+0) & \text{if } x_k<x<x_{k+1}. \end{cases}$$

根据左右极限的定义, 显见g在x_k处连续.

- 在$x=z$处, 类似有

$$g(x)=\begin{cases} f(x-0)-[f(a+0)-f(a)]-\sum\limits_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } x<z \\ f(z-0)-[f(a+0)-f(a)]-\sum\limits_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0)-f(x_k-0)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } x=z \\ f(x)-[f(a+0)-f(a)]-\sum\limits_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0)-f(x_k-0)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } x>z. \end{cases}$$

从这里可以看出g同f一样, 也是单调递增的. 以及

$$g(x)-g(z)=\begin{cases} f(z-0)-f(x_k+0)-\sum\limits_{i=k+1}^{\infty}[f(x_i+0)-f(x_i-0)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } \exists x_k=x<z \\ f(z-0)-f(x)-\sum\limits_{i=k+1}^{\infty}[f(x_i+0)-f(x_i-0)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } x_k<x<x_{k+1}<z \\ f(x)-f(z-0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } z<x\le b. \end{cases}$$

一方面, 由f在z处的连续性, 有$f(z-0)=f(z)$, 故g在z处右连续.

另一方面, 仍然由f在z处的连续性, $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall z-\delta<x<z$, 有$f(z)-f(x)<\epsilon$. 注意到$x_k\to z$, 故$\exists N$使得$x_N<z-\delta\le x_{N+1}<\cdots$. 进而, 在$x_k\le x<x_{k+1}$时(因为对任何前述的$x$均存在这样相应的$k\ge N$), 有

$$0<\sum_{i=k+1}^{\infty}[f(x_i+0)-f(x_i-0)]\le\sum_{i=N+1}^{\infty}[f(x_i+0)-f(x_i-0)]\le f(z)-f(x)<\epsilon.$$

这说明了

$$0 \geq g(x) - g(z) \geq (f(z) - f(x_k)) - \epsilon > -2\epsilon.$$

即g在z处左连续. 综合两方面可见g在z处的连续性.

根据以上三种情况的讨论, g在$[a,b]$上连续. □

15.2 级数的收敛性

15.2.2 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$为每项都为正的收敛级数. 证明: 存在绝对收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

证明:令$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i, S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n, A_n = S - S_n$. 则$A_n$单调递减趋于0. 取$b_n = a_n/\sqrt{A_n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{A_n} = 0.$$

而$b_n = (A_{n-1} - A_n)/\sqrt{A_n}$, 与积分

$$\int_0^S \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{S} < +\infty$$

同收敛. 因$b_n > 0$, 它也绝对收敛. □

15.2.3 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$收敛.

证明: 注意到

$$\frac{1}{m+1} < \sum_{n=m^2}^{m^2+2m} \frac{1}{n} < \frac{1}{m},$$

因为该级数仅在完全平方数处改变符号, 故在n充分大时, 对任意p有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}-1},$$

即该级数收敛. □

15.2.4 设

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|\right) < +\infty.$$

证明:

(1) 可数集合$\{a_{mn} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$的任意排列求和均收敛;

(2) $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}\right)$.

证明: (1) 记$\mathcal{A} = \{a_{mn} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$. 对任给的$\epsilon > 0$, 可以固定$M > 0$, 使得

$$\sum_{m=M+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{15.1}$$

注意到$1 \le m \le M$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{mn}| < +\infty$, 故可以固定$N$, 使得

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_{mn}| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{15.2}$$

对任给的$\mathcal{A}$的一个排列$\varphi : k \mapsto (m,n)$, 令$\varphi(K)$为$a_{11},\cdots,a_{1N},\cdots,a_{M1},\cdots,a_{MN}$最后一次出现的位置, 则当$k > K$时, 对任意$p \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}
|a_{\varphi(k+1)} + \cdots + a_{\varphi(k+p)}| &\le |a_{\varphi(k+1)}| + \cdots + |a_{\varphi(k+p)}| \\
&\le \sum_{\varphi(i)_1 > M}|a_{\varphi(i)} + \sum_{\substack{\varphi(i)_1 \le M \\ \varphi(i)_2 > N}}|a_{\varphi(i)}| \\
&\le \sum_{m=M+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}| + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_{mn}| \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

由Cauchy准则, $\mathcal{A}$的任意排列求和均收敛.

(2) 由题设, 左端二重级数收敛; 由$\mathcal{A}$任意排列均收敛, 可按反对角线选取排列, 得到右端每个$\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}$收敛. 根据(15.1)(15.2)两式, 对任给的$\epsilon > 0$,

存在M, N, 使得对任意$n_0 > N$, 有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{n_0}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right| &= \left|\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_{mn}\right| \\
&\le \left|\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_{mn}\right| + \left|\sum_{m=M+1}^{\infty}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_{mn}\right| \\
&\le \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_{mn}| + \sum_{m=M+1}^{\infty}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_{mn}| \\
&\le \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{mn}| + \sum_{m=M+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

故两端的二重级数相等. □

15.2.9 设f_n一致收敛于f, 且对所有的n极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$均存在. 证明: 两个极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$和$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)\right)$均存在且相等(注意这里不假定任何的连续性).

证明: (i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在.

由一致收敛性, 对$\forall\epsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当$n > N$时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{15.3}$$

对任意x成立. 又由$\lim\limits_{x\to x_0} f_{N+1}(x)$存在知$\exists\delta > 0$, 当$0 < |x_1 - x_0| < \delta, 0 < |x_2 - x_0| < \delta$时, 有

$$|f_{N+1}(x_1) - f_{N+1}(x_2)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{15.4}$$

则综合(15.3)(15.4)两式可见

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_1) - f_{N+1}(x_1) + f_{N+1}(x_1) - f_{N+1}(x_2) + f_{N+1}(x_2) - f(x_2)| \\
&\le |f(x_1) - f_{N+1}(x_1)| + |f_{N+1}(x_1) - f_{N+1}(x_2)| + |f_{N+1}(x_2) - f(x_2)| \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

故$\omega_f(x_0, \delta) \le \epsilon$. 进而$\omega_f(x_0) \le \epsilon$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)\right)$均存在且与$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$相等.

事实上, 由(15.3)式立即有

$$\left|\lim_{x\to x_n} f_n(x) - \lim_{x\to x_0} f(x)\right| = \lim_{x\to x_0} |f_n(x) - f(x)| \le \lim_{x\to x_0} \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

由ϵ的任意性即得. □

15.2.10 设f_n一致收敛于f, 且所有的函数f_n均仅有第一类间断点. 证明: f亦仅有第一类间断点.

证明: 将Ex 15.2.9的结论分别应用于左右极限的情况即得. □

15.2.11 设f_n在$[a,b]$上一致收敛于f. 设$F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t, F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 证明: F_n在$[a,b]$上一致收敛于F. 如果把$[a,b]$换为$\mathbb{R}$结论是否成立?

证明:由一致收敛性, $\forall\epsilon>0$, $\exists N>0$使得$\forall n>N$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{b-a}.$$

故

$$|F_n(x)-F(x)|\le\int_a^x|f_n(t)-f(t)|\mathrm{d}t\le\int_a^x\frac{\epsilon}{b-a}\mathrm{d}t\le\epsilon.$$

即$F_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于F.

若将$[a,b]$换为$\mathbb{R}$, 结论不一定成立. 有反例:

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{if } |x|\le n\\ 0, & \text{if } |x|>n\end{cases}$$

f_n一致收敛于$f\equiv 0$, 但其积分值恒等于2. □

15.2.12 一个集合$A\subset\mathbb{R}$的特征函数χ_A为$\mathbb{R}$上的函数, 定义为

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & 若x\in A,\\ 0, & 若x\notin A.\end{cases}$$

称形如

$$f(x)=\sum_{j=1}^n c_j\chi_{[a_j,b_j)}$$

的函数为阶梯函数, 其中$[a_j,b_j)$为两两不交的区间. 证明: 紧致区间上的连续函数是阶梯函数的一致极限.

证明:由定义域紧致性, 存在分割T使得$\|T\|\to 0$. 因为f连续, 又可见f一致连续. 故$\forall 1/n>0$, $\exists\delta_n>0$, $\forall|x_1-x_2|<\delta$均有$|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$. 取分割T_n使得$\|T_n\|<\min\{\delta_n/2,1/n\}$, 记其中各区间为$[a_j^{(n)},b_j^{(n)}]$ $(j=1,...,j_n)$, 取

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{j_n}f(a_j^{(n)})\chi_{[a_j^{(n)},b_j^{(n)})}.$$

则由选取过程, 即有f_n一致趋于f. □

15.2.13 称紧致区间$[a,b]$上的连续函数为线性样条, 是指存在区间的一个分割, 该函数限制在每个子区间上为一次函数. 证明$[a,b]$上的每个连续函数都是线性样条的一致极限.

证明: 将Ex 15.2.12中的各个区间端点用直线段连接即可. □

15.2.14 给出$[0,1]$上的一列连续函数列$\{f_n\}$, 它们逐点收敛于0, 但是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \neq 0.$$

解: 令$f_n(x)=nx^n(1-x^n)$, 则它们逐点收敛于0, 但

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \to \frac{1}{2} \neq 0.$$

□

15.2.16 设$\mathbb{R}$上的函数f定义为$f(0)=0$, $f(x)=e^{-1/x^2}$ $(x\neq 0)$. 证明:

(1) f是$\mathbb{R}$上的光滑函数;

(2) f关于原点无幂级数展开.

证明: (1) 我们归纳地证明

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases}0, & \text{if } x=0\\ P\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}. & \text{if } x\neq 0\end{cases}$$

其中$P(x)$为多项式函数.

$k=1$时显然成立, 若$k=n$成立, 通过求导, 不难验证$k=n+1$仍然成立. 故$f(x)$是$\mathbb{R}$上的光滑函数.

(2) 若f在原点处有幂级数展开, 应有形式:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \equiv 0.$$

但在$x=0$的任意小邻域内, f都不恒为0, 矛盾. 故f在原点处无法展开成幂级数. □

15.2.17 对于任意不等于1的实数x_0, 给出$\dfrac{1}{1-x}$的关于x_0的幂级数展开, 并写出收敛区间.

解: 我们有

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x_0)-(x-x_0)}=\frac{1}{1-x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^n.$$

其收敛半径为$R=|1-x_0|$. □

注记: 从这里我们可以看出, 同一个具有幂级数展开的函数(解析函数), 在不同点处展开的幂级数具有不同的收敛半径, 但在这里, 收敛域均在$x=1$(原函数的发散点)处终止. 在不同点处作展开时, 其新的收敛域不一定能覆盖整个区间.

实际上, 我们有下面一般的结果(这也是Ex 15.2.18做法正确性的保证):

命题 设函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

的收敛半径为$R>0$, 则$f(x)$在$\forall y_0\in(x_0-R,x_0+R)$处也可以展开成收敛到其自身的幂级数, 且具有展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(y_0)}{n!}(x-y_0)^n.$$

这个新的幂级数的收敛半径至少为$r=R-|x_0-y_0|$.

15.2.18 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$在区间$(-R,R)$ $(R>0)$内收敛, 集合E定义为

$$E=\left\{x\in(-R,R)\,\middle|\,\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right\}.$$

证明: 若集合E有一个聚点属于$(-R,R)$, 则$a_n=b_n$, $n=0,1,2,\cdots$.

证明: 记$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)x^n$, 则$E$是$f$的根集合.

(i) 此聚点为0. 由幂级数的连续性, 有$f(0)=a_0-b_0=0$. 注意到$E\backslash\{0\}$中的任何点仍然为$f_1(x)=f(x)/x=\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-b_{n+1})x^n$的根, 故再次由幂级数的连续性就有$f_1(0)=a_1-b_1=0$. 如此循环往复即得$a_n-b_n=0$对任何$n$成立.

(ii) 此聚点为$x_0\neq 0$ (不妨考虑$x_0>0$). f在x_0附近仍然可以展开成幂级数, 从而有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

它有收敛半径$r\geq R-x_0$. 则由(i)的讨论可知$f(x)\equiv 0$, $\forall x\in(x_0-r,x_0+r)$. 若$0\in(x_0-r,x_0+r)$, 则结论已经成立. 否则, 进一步考虑在$x_1=(x_0-r)/2$处

展开, 其有收敛半径$r_1 \geq R - x_1 \geq 2R - 3x_0/2 > 2(R - x_0)$. 因此如此循环往复, 必然能包含0点在内. 故结论成立. □

*注记:*也可以使用Rolle定理得到(i)与(ii)中的结果.

15.2.19 设$\{b_n\}$是单调递减的非负数列. 证明: 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$一致收敛的充分必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$.

*证明:*必要性. 由一致收敛性可知, 对任给的$\epsilon > 0$, 存在N, 使得当$n > N$时对任何x均成立

$$\left|\sum_{j=n}^{2n-1} b_j \sin jx\right| < \epsilon.$$

对任意固定的$n > 2N$, 取$x = \pi/4n$. 注意到数列b_n递减, 有

$$2nb_{2n} \leq 2b_{2n}\left(\sum_{j=n}^{2n-1} \frac{\sin[(j\pi)/(4n)]}{\sin \pi/4}\right) \leq 2\sqrt{2}\left(\sum_{j=n}^{2n-1} b_j \sin\frac{j\pi}{4n}\right) < 2\sqrt{2}\epsilon.$$

同时, 对$(2n-1)b_{2n-1}$也可做类似的估计, 这就说明$nb_n \to 0$.

充分性. 由$\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, 有$\sup\limits_{n>N} nb_n < \epsilon$. 因为所证级数有周期$2\pi$, 因此我们只要证明对任何$p$, 有

$$\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} b_j \sin jx\right| < C\epsilon \tag{15.5}$$

对任何$x \in [0, 2\pi]$成立, 其中C为常数.

(i) 若$x \in [0, \pi/(n+p)]$, 则

$$0 \leq \sum_{j=n+1}^{n+p} b_j \sin jx \leq \sum_{j=n+1}^{n+p} b_j jx \leq \frac{\pi}{n+p}\sum_{j=n+1}^{n+p} jb_j \leq \pi \sup_{n>N} nb_n < \pi\epsilon.$$

(ii) 若$x \in [\pi/n, \pi]$, 则

$$\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} \sin jx\right| = \left|\frac{\cos(n+1/2)x - \cos(n+p+1/2)x}{2\sin(x/2)}\right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x} \leq n.$$

进而

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} b_j \sin jx\right| &= \left|\left(b_{n+p}\sum_{j=n+1}^{n+p}\sin jx\right)+\left[\sum_{j=n+1}^{n+p-1}(b_j-b_{j+1})\left(\sum_{k=n+1}^{j}\sin kx\right)\right]\right| \\
&\le b_{n+p}\left|\sum_{j=n+1}^{n+p}\sin jx\right|+\sum_{j=n+1}^{n+p-1}(b_j-b_{j+1})\left|\sum_{k=n+1}^{j}\sin kx\right| \\
&\le nb_{n+p}+n\sum_{j=n+1}^{n+p-1}(b_j-b_{j+1}) \\
&\le nb_{n+p}+n(b_{n+1}-b_{n+p}) \\
&\le 2\sup_{n>N} nb_n \\
&< 2\epsilon
\end{aligned}$$

(iii) 若$x\in[\pi/(n+p),\pi/n]$, 注意到(i)(ii)的放缩分别与上下限有关, 可记$k=\lfloor\pi/x\rfloor\in[n,n+p]$, 则

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} b_j\sin jx\right| &\le \left|\sum_{j=n+1}^{k} b_j\sin jx\right|+\left|\sum_{j=k+1}^{n+p} b_j\sin jx\right| \\
&< \pi\epsilon+2\epsilon \\
&= (\pi+2)\epsilon
\end{aligned}$$

(iv) 若$x\in[\pi,2\pi]$, 则由

$$\sum_{j=n+1}^{n+p} b_j\sin jx=\sum_{\substack{n+1\le j\le n+p\\ j=2i}} b_{2i}\sin[2i(x-\pi)]-\sum_{\substack{n+1\le j\le n+p\\ j-1=2i}} b_{2i-1}\sin[2i(x-\pi)]$$

亦化为以上形式.

综合以上, 只要取$C=\pi+2$即得(15.5)式. □

15.2.20 设$\{f_n\}$为紧致区间$[a,b]$的一致收敛的连续函数列. 证明: $\{f_n\}$一致有界且一致等度连续.

证明: 注意到事实: f作为f_n的一致极限, 它连续且一致连续; f与f_n作为紧致区间的连续函数均有界, 将之依次记为M_0, M_n.

(1) 因一致收敛, 存在固定的N, 使得$\forall n>N$有$|f_n(x)-f(x)|\le 1$, 故$|f_n(x)|\le M_0+1$. 则$\max\{M_1,\cdots,M_N,M_0+1\}$即为$\{f_n\}$的一致上界.

(2) 同样因一致收敛, $\forall\epsilon>0$, 存在固定的N, $\forall n>N$有$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon/4$对$\forall x$成立. 由f一致连续, 存在$\delta_0>0$, $\forall|x-y|<\delta$有$|f(x)-f(y)|<$

$\epsilon/2$. 同样地, $f_1,\cdots,f_N$也分别一致连续, 对应地存在$\delta_1,\cdots,\delta_N$, 分别使得$f_1,\cdots,f_N$满足上式. 令$\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_N\}$, $\forall|x-y|<\delta$, 当$n\le N$时, 根据δ_n的取法即有

$$|f_n(x)-f_n(y)|<\epsilon;$$

当$n>N$时, 亦有

$$|f_n(x)-f_n(y)|\le|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f(y)|+|f(y)-f_n(y)|<\epsilon.$$

因此$\{f_n\}$一致等度连续. □

15.2.21 证明: $[0,1]$上的函数列$\{\sin nx\}$不存在一致收敛子列.

证明: 由Ex 15.2.20的结论, 只要证明$\{\sin nx\}$不存在一致等度连续的子列. 注意到$\forall\epsilon<1$, $\forall\delta>0$, $\forall n>(2\delta)/\pi$, $\exists x=0,y=\frac{\pi}{2n}<\delta$, 有

$$|\sin nx-\sin ny|=1>\epsilon.$$

故$\{\sin nx\}$的任一子列均不等度连续. □

15.2.23 设$\{f_n\}$是紧致区间上一致等度连续的函数列, 且$\{f_n\}$逐点收敛于f. 证明: f_n一致收敛于f.

证明: 因$\{f_n\}$一致等度连续, 故$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall n,\forall|x-y|<\delta$有$|f_n(x)-f_n(y)|<\epsilon$. 对该紧致区间上的任意收敛点列$x_n\to x$, 一方面, 存在$N_1$, $\forall n>N_1$有$|x_n-x|<\delta$; 另一方面, 因f_n在x处趋于f, 故存在N, $\forall n>N$有$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$.因此

$$|f_n(x_n)-f(x)|\le|f_n(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|<2\epsilon.$$

这说明$f_n(x_n)\to f$. 由**定理***15.36*即有f_n一致收敛于f. □

15.2.27 证明: 由$[0,1]$上次数不超过N, 且满足$|P(x)|\le1$, $\forall x\in[0,1]$的多项式$P(x)$全体构成的函数族一致等度连续.

证明: 注意到每一个$[0,1]$上次数不超过N的多项式可以被$0,1/N,\cdots,1$处的值唯一确定, 反之这些点处的值也可以唯一确定一个次数不超过N的多项式(见15.3节的*Lagrange***插值多项式**). 我们令$y_0,\cdots,y_N$为$(N+1)$个介于-1到1之间的实数, 表示多项式在以上$(N+1)$个点处所有可能的取值. 则任意多项式$P(x)$均可以写为

$$P(x)=\sum_{k=0}^{N}\left(y_k\prod_{\substack{0\le j\le N\\ j\ne k}}\frac{x-\frac{j}{N}}{\frac{k}{N}-\frac{j}{N}}\right)=\sum_{k=0}^{N}\left(y_k\prod_{\substack{0\le j\le N\\ j\ne k}}\frac{Nx-j}{k-j}\right).$$

令

$$Q_k(x) = \prod_{\substack{0\le j\le N\\ j\ne k}} \frac{Nx-j}{k-j},$$

则$Q_k(x)$ $(k=0,\cdots,N)$在$[0,1]$上连续且一致连续. 因这里只有有限个函数, 故$\forall\epsilon>0$, 存在一个一致的$\delta>0$, $\forall k,\forall|x-y|<\delta$, 有

$$|Q_k(x)-Q_k(y)|<\epsilon.$$

因此, 对任何满足题设的多项式$P(x)$有

$$|P(x)-P(y)|\le\sum_{k=0}^{N}|y_k||Q_k(x)-Q_k(y)|\le\sum_{k=0}^{N}|Q_k(x)-Q_k(y)|<N\epsilon.$$

这便说明, 该多项式族是一致等度连续的. □

*注记:*不难看出, 这里对多项式定义域和值域在$[0,1]$上的限制不是本质的.

15.3 连续函数的多项式逼近

15.3.2 设f是$[a,b]$上的C^1函数. 证明: 存在一个次数不超过3的多项式P使得$f-P$及其导数在区间端点为0.

证明: 设多项式$P(x)=px^3+qx^2+sx+t, P'(x)=3px^2+2qx+s$.则只需要

$$\begin{bmatrix}P(a) & P'(a) & P(b) & P'(b)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}f(a) & f'(a) & f(b) & f'(b)\end{bmatrix}^T.$$

也即

$$\begin{bmatrix}a^3 & a^2 & a & 1\\ 3a^2 & 2a & 1 & 0\\ b^3 & b^2 & b & 1\\ 3b^2 & 2b & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ s\\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(a)\\ f'(a)\\ f(b)\\ f'(b)\end{bmatrix}.$$

这是一个线性非齐次方程组. 因

$$\det\begin{bmatrix}a^3 & a^2 & a & 1\\ 3a^2 & 2a & 1 & 0\\ b^3 & b^2 & b & 1\\ 3b^2 & 2b & 1 & 0\end{bmatrix}=(a-b)^4\ne 0.$$

故其可逆, 方程组有解, 多项式P存在. □

注记:本题可以视作Ex 15.3.1的一个特例.

15.3.3 设f在$[a,b]$上是C^1函数. 构造一个f到整个$\mathbb{R}$上的C^1扩充, 使得它在区间$[a-1,b+1]$之外为0.

证明: 由Ex 15.3.2(上题), 存在多项式P,Q分别使得$P^{(k)}(a-1)=0$, $P^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$, $Q^{(k)}(b)=f^{(k)}(b)$, $Q^{(k)}(b+1)=0$, 其中$k=0,1$. 则

$$\tilde{f}=\begin{cases}0 & \text{if } x<a-1 \text{ or } x>b+1\\ P & \text{if } a-1\le x<a\\ f & \text{if } a\le x\le b\\ Q & \text{if } b<x\le b+1\end{cases}$$

即符合所需. □

15.3.6 定义$\mathbb{R}$上的函数f的支集为集合$\{x:f(x)\neq 0\}$的闭包, 记为 $\mathrm{supp}f$.

(1) 证明: $\mathbb{R}$上的连续函数f的支集为紧集当且仅当f在一个有限区间之外为0;

(2) 设f与g为连续函数, 且其中之一函数有紧致支集. 证明:

$$\mathrm{supp}f*g\subset \mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g.$$

证明: (1) $\mathrm{supp}f$是紧集$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{supp}f$有界$\Longleftrightarrow$ f在一个有限区间之外为0;

(2) 首先证明$\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$是闭集, 其中已不妨设$\mathrm{supp}f$是紧集. 事实上, 对任意$\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$的聚点$x$, 令$\{x_n=y_n+z_n\}\subset \mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$为收敛于它的子列, 其中$\{y_n\}\subset \mathrm{supp}f$, $\{z_n\}\subset \mathrm{supp}g$. 则存在$\{y_n\}$的子列$\{y_{n_k}\}$收敛至$y\in \mathrm{supp}f$, 进而$z_{n_k}=x_{n_k}-y_{n_k}$作为收敛数列的差, 也是收敛数列. 由$\mathrm{supp}g$是闭集, z_{n_k}收敛至$z\in \mathrm{supp}g$. 故$x_{n_k}\to y+z$, 也即$x_n\to y+z\in \mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$, $\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$是闭集.

以下任取$x_0\in(\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g)^c$, 均存在$\delta>0$, 使得$N:=(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset \mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$. $\forall x\in N$, 对$\forall y\in\mathbb{R}$, 或者$x-y\notin \mathrm{supp}f$, 或者$y\notin \mathrm{supp}g$. 也即, 或者$f(x-y)=0$, 或者$g(y)=0$. 这说明

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y=0.$$

故$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset\{x:f*g(x)=0\}$, 即$x_0\in\{x:f*g(x)=0\}^\circ=\overline{\{x:f*g(x)\neq 0\}}^c$, 也即$x_0\in\overline{\{x:f*g(x)\neq 0\}}=(\mathrm{supp}f*g)^c$.

综合以上, 有$(\text{supp}f+\text{supp}g)^c \subset (\text{supp}f*g)^c$, 即$\text{supp}f*g \subset \text{supp}f+\text{supp}g$. □

注记:本题前半部分的证明可以视作Ex 14.4.11(2)的一个推广.

15.3.9 设f为$[a,b]$上的连续函数, 且$\exists c$, $f(c)=0$. 证明: f在$[a,b]$上的近似多项式可以取得在c点为零.

证明: 设多项式$P_\epsilon(x)$为f的一致逼近多项式, 即

$$|P_\epsilon(x)-f(x)|<\epsilon.$$

对任何x成立. 则$Q_\epsilon(x)=P_\epsilon(x)-P_\epsilon(c)$在$c$点取零, 且也是$f$在$[a,b]$上的一致逼近, 因

$$|P_\epsilon(x)-P_\epsilon(c)-f(x)|\le|P_\epsilon(x)-f(x)|+|P_\epsilon(c)-f(c)|<2\epsilon.$$

□

15.3.10 设f为$[-1.1]$上的连续偶函数. 证明: 若

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^{2k}\mathrm{d}x=0,$$

其中$k=0,1,2,\cdots$, 则$f\equiv 0$.

证明: 因$[-1,1]$关于原点对称, f是偶函数, 故f的奇次矩也为0. 由Page 99例子, 立即有$f\equiv 0$. □

15.3.11 设在区间$[a,b]$上多项式列$\{P_n\}$一致收敛到函数F, 且P_n的次数不超过N, $\forall n$. 证明: f也是次数不超过N的多项式.

证明: 首先来寻找连续函数h_k使得

$$\int_a^b h_k(x)x^j\mathrm{d}x=\delta_{jk},$$

其中$j=0,1,\cdots,N$, δ_{jk}为Kronecker符号. 事实上, 对于任意给定的k, 可以设$h_k(x)=a_o+\cdots+a_Nx^N$. 由$j=0,1,\cdots,\hat{k},\cdots,N$所确定的$N$个方程必有一组非零解, 记作$(c_0,\cdots,c_N)$. 若

$$b_0:=\int_a^b\left(\sum_{i=0}^{N}c_ix^i\right)x^k\mathrm{d}x=0,$$

则

$$\int_a^b \left(\sum_{i=0}^N c_i x^i\right)^2 \mathrm{d}x = 0,$$

与$(c_0, \cdots, c_N)$为非零解矛盾. 故$b_0 \neq 0$, 我们可以取$a_i = c_i/b_0$, $\forall i$, 得到的即为所需要的函数h_k.

通过上面h_k的性质, 我们可以把多项式列$\{P_n\}$写作

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^N x^k \cdot \int_a^b h_k(x) P_n(x) \mathrm{d}x.$$

因f是P_n的一致极限, 我们还有

$$\sup |h_k(x)P_n(x) - h_k(x)f(x)| \leq M_k \sup |P_n(x) - f(x)| \to 0,$$

其中M_k为连续函数h_k在$[a,b]$上的上界. 因上式对任何$0 \leq k \leq N$成立, 故对任何k有$P_n h_k$一致收敛于$f h_k$. 由**定理***15.31*, 立即有

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to\infty} P_n(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^N x^k \cdot \int_a^b h_k(x) P_n(x) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^N x^k \cdot \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_k(x) P_n(x) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^N x^k \cdot \int_a^b h_k(x) \lim_{n\to\infty} P_n(x) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^N x^k \cdot \int_a^b h_k(x) f(x) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

这就说明f是次数不超过N的多项式. □

15.3.12 计算$\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$.

证明: 我们有

$$
\begin{aligned}
\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}(x) &= \int_0^1 \chi_{[0,1]}(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{x-1}^{x} \chi_{[0,1]}(y)\mathrm{d}y \\
&= m([0,1]\cap[x-1,x]) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \text{ or } x \ge 2 \\ x & \text{if } 0 < x \le 1 \\ 2-x & \text{if } 1 < x < 2 \end{cases},
\end{aligned}
$$

式中$m(\cdot)$表示某线段的长度(测度). □

15.4 Fourier级数的收敛性

若无特别说明, 以下15.4节的各题中的函数都是周期为2π的连续函数.

15.4.1 证明: 存在常数$c > 0$使得

$$
\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t \ge c\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \ge c\ln n.
$$

证明: 因为

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \int_{(k\pi)/(2n+1)}^{[(k+1)\pi]/(2n+1)} \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| \mathrm{d}t \\
&\ge \sum_{k=0}^{2n} \frac{2n-1}{(k+1)\pi} \int_{(k\pi)/(2n+1)}^{[(k+1)\pi]/(2n+1)} |\sin(2n+1)t|\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \frac{2}{\pi(k+1)} \\
&\ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},
\end{aligned}
$$

第一个不等号成立.

又因为

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{n}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

第二个不等号成立. □

15.4.3 设f Riemann可积且在点x_0连续. 证明: $\sigma_n f(x_0) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

证明: 模仿定理15.51即可证明.

由f在x_0处的连续性, 对任意$\epsilon > 0$, 存在固定的$\delta > 0$, 当$|t| \le \delta$即有$|f(x_0) - f(x_0+t)| < \epsilon/(2\pi)$. 由于$\{K_n\}$是单位近似, 对于这个$\delta$, 对充分大的$n$均有$\int_{\delta\le|t|\le\pi} K_n(t)\mathrm{d}t < \epsilon/(4M)$. 注意到$f$ Riemann可积而有上界M, 我们有

$$\begin{aligned}
|\sigma_n f(x_0) - f(x_0)| &\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x_0-t)-f(x_0)|K_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{0\le|t|\le\delta} + \int_{\delta\le|t|\le\pi}\right)|f(x_0-t)-f(x_0)|K_n(t)\mathrm{d}t \\
&< \frac{1}{\pi}\int_{0\le|t|\le\delta}\frac{\epsilon}{2\pi}K_n(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{\delta\le|t|\le\pi}2MK_n(t)\mathrm{d}t \\
&< \frac{1}{\pi}(\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}) \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

如所欲证. □

15.4.4 设f在点x_0之外都连续且x_0是跳跃间断点. 证明:

$$\sigma_n f(x_0) \to \frac{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)}{2}, n \to \infty$$

.

证明: 注意到函数f, K_n均有周期2π, 由积分在一个周期上的不变性, 不妨设$x_0 = 0$, 令

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } -\pi \le x < 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) & \text{if } x = 0 \\ \left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right) & \text{if } 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

则$h(x) := f(x) - g(x)$是$[-\pi, \pi]$上的连续函数. 从而

$$\begin{aligned}
\sigma_n f(x_0) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x_0 - t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)K_n(x_0 - t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)K_n(x_0 - t)\mathrm{d}t \\
&= \sigma_n h(x_0) + \frac{1}{2\pi}\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) - \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right)\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \sigma_n h(x_0) + \frac{\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right)}{2} \\
&\to \frac{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)}{2} + \frac{\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right)}{2} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)}{2}.
\end{aligned}$$

这其中已用到K_n是偶函数以及**定理**15.51. □

15.4.6 证明: 若连续函数列$\{f_k\}$一致收敛于f, 则f_k的Fourier系数收敛于f的Fourier系数.

证明: 设$a_n, b_n, a_n^{(k)}, b_n^{(k)}$分别是$f$, f_k的Fourier系数. 则由一致收敛性, $\forall\epsilon > 0$, $\exists N$, $\forall k > N$, $\forall x$, 有$|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$. 故

$$|a_n^{(k)} - a_n| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_k(x) - f(x)||\cos nx|\mathrm{d}x < \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \epsilon|\cos nx|\mathrm{d}x \le 2\epsilon.$$

对任何$n \ge 1$成立. 同理也有$a_0^{(k)} \to a_0$与$b_n^{(k)} \to b_n$. □

15.4.8 对于周期为2π的连续函数f, g, 设

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y)g(y)\mathrm{d}y.$$

问f, g和$f * g$的Fourier系数之间有何关系?

证明: 设f, g的Fourier系数分别为$a_{1n}, a_{2n}, b_{1n}, b_{2n}$, $f * g$的Fourier系数

为A_n, B_n. 则

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\cos nx\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\cos(ny+nt)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\pi}^{\pi} a_{1n}g(y)\cos ny - b_{1n}g(y)\sin ny\mathrm{d}y \\
&= \pi(a_{1n}a_{2n} - b_{1n}b_{2n}).
\end{aligned}$$

其中$b_{10} = b_{20} := 0$.

同理可得$B_n = \pi(a_{1n}b_{2n} + b_{1n}a_{2n})$, $\forall n \geq 1$. □

Chapter 16

度量空间的连续函数

16.1 $\mathbb{R}^n$与度量空间

16.1.4 证明: 若$\|\cdot\|$为$\mathbb{R}^n$上的范数, 则存在正常数M使得$\|x\| \le M|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 其中$|x|$是Euclid范数.

证明: 设$e_1, \cdots, e_n$为$\mathbb{R}^n$的标准正交基, 并不妨令$M = \sqrt{n}\max\limits_i\{\|e_i\|\} > 0$, 则

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|\|e_i\| \le \frac{M}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n |(x, e_i)| \le M\sqrt{\sum_{i=1}^n (x, e_i)^2} = M|x|.$$

□

16.1.5 称集合M上的两个度量d_1, d_2等价, 是指存在两个正常数c_1, c_2, 使得$\forall x, y \in M$, $d_1(x, y) \le c_2 d_2(x, y)$且$d_2(x, y) \le c_1 d_1(x, y)$同时成立. 证明: 若$d_1$与$d_2$等价, 则按$d_1$度量$x_n \to x$, 当且仅当按$d_2$度量$x_n \to x$.

证明: 按d_1度量$x_n \to x \Longleftrightarrow d_2(x_n, x) \le c_1 d_1(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow d_1(x_n, x) \le c_2 d_2(x_n, x) \to 0 \Longleftrightarrow$ 按d_2度量$x_n \to x$. □

16.1.9 设$1 \le p < \infty$,

$$\ell_p := \left\{(x_1, x_2, \cdots) \,\middle|\, \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty,\ x_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

对于$x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots) \in \ell_p$, 定义

$$d(x, y) := \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}.$$

证明: (ℓ_p, d)是完备度量空间, 且依度量收敛蕴含每个坐标分量收敛. 举例说明每个坐标分量收敛不蕴含依度量收敛.

证明: 定义ℓ_p空间到$\mathbb{R}$的映射:

$$\|x\| := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p},$$

容易验证这是一个范数(其中三角不等式是由Ch 14.2的Minkowski不等式保证), 且它自然诱导该度量d. 该空间有等价的定义$\ell_p := \{x : \|x\| < \infty\}$.

(i) 这是一个完备赋范空间(进而为完备度量空间).

任取Cauchy列$\{x^{(n)}\} \subset \ell_p$, 则$\forall n$, $\exists N_n$, 使得$\forall k > N_n$有$\|x^{(k)} - x^{(N_n)}\| \leq 2^{-n}$. 不妨令$N_{n+1} > N_n$, 我们得到了一个子列$\{x^{(N_n)}\}$, 下面来说明它收敛. 为此, 记

$$y^{(n)} := x^{(N_1)} + \sum_{i=1}^{n} \left(x^{(N_{i+1})} - x^{(N_i)}\right) = x^{(N_n)}.$$

则$y^{(n)} \to y$, 其中

$$\|y\| = \left\| x^{(N_1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(x^{(N_{i+1})} - x^{(N_i)}\right) \right\| \leq \|x^{(N_1)}\} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \|x^{(N_1)}\| + 1 < \infty,$$

即$y \in \ell_p$. 故点列$\{x^{(N_n)}\}$收敛. 由Ex 16.2.4, 该空间完备.

(ii) 因为对任何K, 有$|x_K - y_K| \leq \|x - y\|$, 故依度量收敛蕴含各分量收敛.

(iii) 对任何的p, 取$x^{(n)} = (n^{-1/p}, \cdots, n^{-1/p}, 0, \cdots)$, 其中前$n$个分量非0, 则其各个分量均收敛于0, 但$\|x^{(n)}\| \equiv 1$. □

16.1.11 设$A \in \mathbb{M}(n)$. 证明:

(1) 若$A = A^T$, 则它的范数

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$$

等于矩阵A的特征值绝对值的最大值.

(2) 对于一般的A, $\|A\|^2$等于对称矩阵$A^T A$特征值绝对值的最大值.

证明: 我们首先要注意到性质: 对任何正交阵O及向量x, 有$|Ox| = |x|$.

(1) 设$A = O^T D O$, 其中O为正交阵, $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$为由$A$的全部特征值构成的对角阵. 则

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|O^T D O x|}{|Ox|} = \sup_{y = Ox \neq 0} \frac{|Dy|}{|y|} = \max_i |\lambda_i|.$$

(2) 设$A = PEQ$, 其中P, Q为正交阵, $E = \mathrm{diag}\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$为由$A$的全部奇异值构成的对角阵. 则

$$\|A\|^2 = \left(\sup_{x\neq 0} \frac{|PEQx|}{|Qx|}\right)^2 = \left(\sup_{y=Qx\neq 0} \frac{|Ey|}{|y|}\right)^2 = \left(\max_i \mu_i\right)^2 = \max_i \lambda_i,$$

其中λ_i为A^TA的特征值. □

16.2 度量空间的拓扑

16.2.1 证明度量空间中的开集有类似于$\mathbb{R}^1$中开集和闭集的性质(对应于性质16.9, 16.12, 16.13).

证明: 略. 只要将第14章中相关证明中绝对值改为一般的度量即可. □

16.2.2 证明完备度量空间的子空间完备性与闭性等价(对应于性质16.15).

证明: 设完备度量空间(X, d)有子集M. 则X中的任何Cauchy列均收敛至X中的点. 注意到收敛点列必为Cauchy列, 我们有:

M是闭集$\Longleftrightarrow M$中的任何收敛列收敛至M中的点$\Longleftrightarrow M$中的任何Cauchy列均收敛至M中的点$\Longleftrightarrow M$完备. □

16.2.4 证明: 如果度量空间里的Cauchy列有极限点, 那么它有极限.

证明: 设$\{x_n\} \subset X$为度量空间中的一列Cauchy列, 它有一个子列$\{x_{n_k}\}$收敛到$x \in X$. 则对任意充分大的n, 有相应的充分大的n_k, 使得

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \to 0.$$

□

16.2.5 设A为度量空间M的子空间, 那么A作为M的子空间的Heine-Borel性质与A作为自身的子空间的Heine-Borel性质等价.

证明: 必要性. 设$\{U_\alpha\}$是相对于A的开集, 且构成A的一个覆盖, 则存在相对于X的开集族$\{V_\alpha\}$使得$V_\alpha \cap A = U_\alpha$对任何$\alpha$成立. $\{V_\alpha\}$构成A的一个开覆盖, 它存在有限子覆盖$\{V_i\}_{i=1}^n$, 进而$\{U_i\}_{i=1}^n$是有限子覆盖.

充分性. 设$\{V_\alpha\}$是相对于M的开集, 且构成A的一个覆盖. 令$U_\alpha = V_\alpha \cap A$是相对于$A$的开集, 则$\{U_\alpha\}$构成$A$的一个开覆盖, 它存在有限子覆盖$\{U_i\}_{i=1}^n$, 进而$\{V_i\}_{i=1}^n$是有限子覆盖. □

注记: 由此可见, 更为简洁地直接定义X本身是一个紧集也是合理的, 这也将是以后定义紧集的一种方式.

16.2.7 设$\|\cdot\|$为$\mathbb{R}^n$的范数, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. $B_r(x_0)$是范数$\|\cdot\|$诱导的距离所定义的开球. 证明: $B_r(x_0)$是一个凸集.

证明: 设$x, y \in B_r(x_0)$, 则$\forall t \in [0,1]$, 有

$$\|tx + (1-t)y - x_0\| \le t\|x - x_0\| + (1-t)\|x - x_0\| < tr + (1-t)r = r,$$

从而$tx + (1-t)y \in B_r(x_0)$, 这是一个凸集. □

16.2.8 证明: 度量空间$(C[a,b], \sup)$的紧致子空间作为连续函数族一致等度连续.

证明: 设M是$C[a,b]$的一个紧致子空间. $\forall \epsilon > 0$, $\forall f \in M$, 因为紧致区间上的连续函数一致连续, $\exists \delta_f > 0$, 使得$\forall |x-y| < \delta_f$, 有$|f(x) - f(y)| < \epsilon/3$. 而$\{B(f, \epsilon/3) : f \in M\}$构成了$M$的一个开覆盖, 其存在有限子覆盖$\{f_1, \cdots, f_n\}$, 令$\delta := \min\{\delta_{f_i} : 1 \le i \le n\} > 0$, 则$\forall f \in M$, $\exists f_i \in M$使得$\|f_i - f\| < \epsilon/3$. 故$\forall |x-y| < \delta$, 有

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f_i(x)| + |f(y) - f_i(y)| + |f_i(x) - f_i(y)| \\ &\le 2\|f - f_i\| + |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon,\end{aligned}$$

其中$\|\cdot\|$表示$C[a,b]$上的范数. 故M是一致等度连续函数族. □

16.2.9 设ℓ^∞为有界复数列$\{x_n\}$的集合, 定义$d(\{x_n\}, \{y_n\}) := \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$. 证明:

(1) (ℓ^∞, d)是完备度量空间;

(2) 由收敛于0的复数列构成的子空间完备;

(3) 度量空间(ℓ^∞, d)无可数稠密子集.

证明: (1) 类似Ex 16.1.9, 我们可以定义范数$\|x\| := \sup\{|x_n| : n\}$, 则$d$由该范数自然诱导且有等价定义$\ell^\infty := \{x : \|x\| < \infty\}$. 类似即可证明其完备性.

(2) 由Ex 16.2.6, 我们只要证明这是一个闭集. $\forall \{y_n\}$不收敛于0, $\exists \epsilon > 0$, 使得$\forall N$, $\exists n > N$, 使得$y_n > \epsilon$. 则$\forall x \in B(y, \epsilon/2)$, 有

$$|x_n| \ge |y_n| - |x_n - y_n| \ge |y_n| - \|x - y\| > \epsilon,$$

即$\{x_n\}$并不收敛于0. 这说明由不收敛于0的复数列构成的子空间是开集, 其补集即为闭集.

(3) 构造映射$f: 2^{\mathbb{N}} \to \ell^\infty$如下:

$$f(A) = \{x_n\}, \quad \text{其中} x_n = 1 \Longleftrightarrow n \in A,\ x_n = 0 \Longleftrightarrow n \notin A.$$

则f从$2^{\mathbb{N}}$到$X := f\left(2^{\mathbb{N}}\right)$是双射, 从而$X$是一个不可数子集. 若$(\ell^\infty, d)$存在可数稠密子集$A$, 则$\forall x \in X$, $\exists a_x \in A$, 使得$\|x - a_x\| < 1/3$. 注意到$\forall x \neq y \in X$, $\|x - y\| \equiv 1$. 故$x \neq y \in X \Longrightarrow a_x \neq a_y$. 这说明$\{a_x : x \in X\}$作为$A$的子集, 是一个不可数的集合, 矛盾. □

16.2.12 设$\cdots \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1$是一个度量空间的非空紧致子集列. 证明: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$.

证明: 略. 将课本P48**性质***14.53*中的绝对值改为一般的度量即可. □

16.2.15 设A, B是$\mathbb{R}^n$的任意非空子集, 定义它们的距离为

$$d(A, B) = \inf\{|x - y| : \forall x \in A, \forall y \in B\}.$$

(1) 证明: 若E_1, E_2是两个非空紧集, 则$d(E_1, E_2) > 0 \Longleftrightarrow E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

(2) 请举例说明, 当E_1, E_2为闭集时, 上述结论不成立.

证明: (1) 必要性显然, 下证充分性. 若$d(E_1, E_2) = 0$, 则$\forall n > 0$, $\exists x_n \in E_1, y_n \in E_2$使得$|x_n - y_n| < 1/n$. 因$E_1, E_2$均紧致, 故存在收敛子列$\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$. 记它们的极限分别为$x \in E_1$, $y \in E_2$, 则

$$d(x_{n_k}, y_{n_k}) \to d(x, y) = 0.$$

这说明$x = y \in E_1 \cap E_2$, 矛盾.

(2) 可以令$n = 1$, 取两个不相交的闭集$E_1 = \{n + \dfrac{1}{n} : n \geq 2\}, E_2 = \{n - \dfrac{1}{n} : n \geq 2\}$, 但有$d(E_1, E_2) = 0$. □

16.2.16 证明: $\mathbb{R}^2$的开集与x轴的交是实直线的开集.

证明: 可不妨设$\mathbb{R}^2$的开集U与x轴(记作X)相交非空. 则$\forall x \in U \cap X$, $\exists r > 0$使得$\forall |y - x| < r$, $y \in U$. 则区间$(x - r, x + r) \subset U \cap X$, 即$U \cap X$为开集. □

16.2.17 设D为$\mathbb{R}^2$的开集, D^c为其余集, I为$\mathbb{R}^2$的闭矩形. 证明:

(1) $\mathbb{R}^2$可以写成无交并: $\mathbb{R}^2 = D^\circ \cup \partial D \cup (D^c)^\circ$.

(2) 若I与D有交但是不包含于D, 则I与∂D有交.

证明: (1) 由性质*16.23*, $\mathbb{R}^2 = \overline{D} \cup \overline{D}^c = D^\circ \cup \partial D \cup (D^c)^\circ$.

(2) 若无交, 由(1)可见$I \subset D^\circ \cup (D^c)^\circ$, 从而$I = (D^\circ \cap I) \cup ((D^c)^\circ \cap I)$是两个相对于$I$的开集之并, 这与$I$连通矛盾. □

16.2.18 (1) 求下列$\mathbb{R}^2$的子集的边界: $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}, B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, C = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

(2) 证明: 对任意子集$A \subset \mathbb{R}^2$, $\partial A = \partial A^c$;

(3) 证明: ∂A是闭集.

证明: (1) $\partial A = A$, $\partial B = S^1$, $\partial C = \mathbb{R}^2$.

(2) $\forall x \in \partial A$, 有$\forall r > 0$, $B_r(x)$与A, A^c相交均非空, 也即与$(A^c)^c, A^c$相交均非空. 因此$x \in \partial A^c$, $\partial A \subset \partial A^c$. 反之亦然, $\partial A = \partial A^c$.

(3) 设$\{x_n\} \subset \partial A$敛于$x$的点列, 下面证明$x \in \partial A$. $\forall r > 0, \exists N, |x_N - x| < r/2$. 又$B_{x_N}(r/2) \subset B_x(r)$与$A, A^c$相交均非空, 我们得到$x \in \partial A$. □

16.3 度量空间上的连续函数

16.3.7 设映射$T : C([0,1]) \to C([0,1])$定义为

$$T(f(x)) = x + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$

证明: T是压缩映射, 且不动点是微分方程$f'(x) = xf(x) + 1$的解.

证明: 我们有以下事实:

- $C([0,1])$是完备度量空间(其中自动赋予了度量$d(f,g) = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$);
- f是压缩映射. 因为$\forall f, g \in C([0,1])$, 有

$$d(Tf, Tg) = \max \left| \int_0^x t|f(t) - g(t)|\mathrm{d}t \right| \leq d(f,g) \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2} d(f,g).$$

由压缩映像原理, T存在不动点, 记作$f(x)$, 它满足

$$f(x) = x + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$

因$f(t) \in C([0,1])$, 故$tf(t)$是连续函数. 由《数学分析(B1)》的知识, 右侧的变上限积分可导, 进而$f(x)$也可导. 对上式两边求导就有

$$f'(x) = xf(x) + 1.$$

□

注记: 为严谨起见, 本题应先说明此不动点是可导的(这里要用到连续函数的变上限积分), 再对两边进行求导.

16.3.8 设E是Euclid空间$\mathbb{R}^n$的有界闭集, 映射$f : E \to E$满足:

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \ \forall x \neq y \in E.$$

证明: f有唯一的不动点.

证明: 构造函数$g(x) = |f(x)-x|$, 则$|g(x)-g(y)| \leq |f(x)-x-f(y)+y| \leq |f(x) - f(y)| + |x - y| < 2|x - y|$, 故$g$连续. 而$E$是有界闭集, 进而是紧集, 这说明$g$在$E$上可以取得最小值, 即$\exists x_0$使得$g(x_0)$最小. 若$g(x_0) = 0$, 则$x_0$即为不动点; 若$g(x_0) > 0$, 因为$f(x_0) \in E$, 有$g(f(x_0)) = |f(f(x_0)) - f(x_0)| < |f(x_0) - x_0| = g(x_0)$, 矛盾. □

16.3.15 证明: 映射$f : [0, 2\pi) \to S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$是一到一的连续映射, 但它的逆映射f^{-1}不是连续的.

证明: 显然f是双射, 且f在$(0, 2\pi)$上面连续, 下面只验证在$f(x) = (1, 0)$处的连续性. 事实上, 对任意的包含了$(1, 0)$的一段(逆时针定向的)开圆弧$\widehat{AB}$, 设a, b分别为A, B的唯一原像, 则$f^{-1}(\widehat{AB}) = (a, 2\pi) \cup [0, b)$是$[0, 2\pi)$的开集. 故$f$在$x = 0$处连续, 进而$f$在$[0, 2\pi)$上连续. 反之, 注意到$f(0+) = f(2\pi - 0) = (1, 0)$, 故$f^{-1}$在点$(1, 0)$处不连续. □

注记: 本题给出了一个连续双射但不同胚的例子. 事实上, 同胚是一种非常强的关系. 如本题中, 相当于将$x = 0$和$x = 2\pi$处的点粘合起来, 得到了一个二维球面S^1. 粘起来之前, 在这个区间上"走动", 本质上是没有太大的差别的(总是可以连续地把所走动的路径变为从a到b的一段线段); 然而在粘起来之后, 在S^1上走动的时候, 按照绕圆圈走动的圈数不同, 可以将这样的路径分成很多种, 同时我们也可以找到"基"(即只走了一圈的路径)去描述所有"不同"路径的差别. 从此可见, 这一映射改变了这个空间的拓扑结构, 自然不会是一个同胚.

16.3.19 设I为区间. 证明: 连续函数$f : I \to \mathbb{R}$的图像M是$\mathbb{R}^2$的连通子集.

证明: 对任意$(a, f(a)), (b, f(b)) \in M(a < b)$, 令$\lambda(t) = ((1-t)a + tb, f((1-t)a+tb))$, $t \in [0,1]$. 则由于其各分量连续, λ也是连续函数, 从而是从$(a, f(a))$到$(b, f(b))$的一条道路. 这说明M是道路连通的, 它自然也是连通的. □

注记: 映射$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$的图(graph)是$\mathbb{R}^{n+1}$的子集, 它可以自然地投影到$\mathbb{R}^n$中. 详见17.5节.

16.3.20 设A是$\mathbb{R}^n$的非空开集且$\partial A \neq \varnothing$, $E \subset A$是一个非空紧致子集. 证明:

(1) $d(E, \partial A) = \inf\{|x-y| \mid x \in E, y \in \partial A\} > 0$;

(2) 存在$\delta > 0$使得集合$E_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in E, |x-y| < \delta\} \subset A$.

证明: (1) 此题实际上是第七次作业Ex 15.3.6的一个注记的特殊情况. 因为A是开集, 故$\forall x \in E$, $\exists r_x > 0$, s.t. $B_{r_x}(x) \subset A$. 所以$\{B_{r_x}(x)\}$构成了E的一个开覆盖. 由于E是紧集, 所以它存在有限子覆盖, 记为$E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i) \subset A$. 因此$d(E, \partial A) \geq d(E, A^c) \geq \min\limits_i r_i > 0$.

(2) 取$\delta = \dfrac{1}{2} d(E, \partial A)$. 则$\forall x \in E_\delta$, $\exists y \in E$, s.t. $|x-y| < \delta$. 故$d(x, A^c) \geq d(y, A^c) - d(x,y) > \dfrac{1}{2} d(E, \partial A) > 0$, 这就说明$x \in A$. □

16.3.21 设$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$是一列非空紧致连通集合.

(1) 证明$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$连通.

(2) 假设每个集合A_n弧连通, (1)中的交集是否仍弧连通?

(3) 如果去掉紧致性条件, 以上命题是否成立?

证明: (1) 我们采用反证法. 否则可设U, V为$A := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$的非空不交开子集. 则存在开集$U_1, V_1 \subset A_1$使得$U = U_1 \cap A$, $V = V_1 \cap A$, 且$U_1 \cap V_1 = \varnothing$(这里可以由Ex 16.3.20保证). 则对任何i, $A_i \cap (U_1 \cup V_1)^c$在非空时是一个紧集. 注意到

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i \cap (U_1 \cup V_1)^c) = A \cap (U_1 \cup V_1)^c = \varnothing,$$

由Ex 16.1.12, 存在n使得

$$\bigcap_{j=1}^{n} (A_j \cap (U_1 \cup V_1)^c) = \varnothing,$$

这说明

$$A_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j \subset U_1 \cup V_1.$$

因为$U_1 \cap V_1 = \varnothing$, 且$U_1 \cap A_n$与$V_1 \cap A_n$为相对于$A_n$的不交开集, 由$A_n$的连通性知, 它必然包含于其中之一(否则$A_n = (A_n \cap U_1) \cup (A_n \cap V_1)$). 不妨设$A_n \subset U_1$, 则$A \subset A_n \subset U_1$, $V_1 = \varnothing$, 矛盾.

(2) 不一定. 我们可以取$A_n = \left\{\left(x, \sin\dfrac{1}{x}\right) : 0 < x \le 1\right\} \bigcup \left(\left[0, \dfrac{1}{n}\right] \times [-1, 1]\right)$, 则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{\left(x, \sin\dfrac{1}{x}\right) : 0 < x \le 1\right\} \bigcup \{(0, y) : -1 \le y \le 1\}$, 不是弧连通的.

(3) 不成立. 我们可以取$A_n = \left\{(x, y) : 0 < y < \dfrac{1}{n}\right\} \bigcup \{(x, 0) : x \ne 0\}$, 则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}^1 \backslash \{0\}$不连通.

16.3.23 设$n > 1$, F是$\mathbb{R}^n$的闭子集且$F^\circ \ne \varnothing$. 证明: ∂F为无限闭子集, 除非$F = \mathbb{R}^n$.

证明: 我们采用反证法. 若∂F有限, 则$\exists a \in \partial F$, $R > 0$使得$B(a, 3R) \cap \partial F = \{a\}$. $\forall x \in \partial B(a, R)$, 令

$$r_x = \begin{cases} \sup\{r : B(x, r) \subset F^\circ\} & \text{if } x \in F^\circ \\ \sup\{r : B(x, r) \subset F^c\} & \text{if } x \in F^c \end{cases}.$$

则$r_x \le R$.

首先我们可以断言$\exists y \in \partial B(x, r_x) \cap \partial F$, 同时根据$R$的取法, 可见$y$唯一, $y = a$且$r_x = R$, $\forall x$. 否则若第一条不成立, $\forall y \in \partial B(x, r_x)$, $\exists r_y > 0$使得$B(y, r_y) \subset F^\circ$或者$B(y, r_y) \subset F^c$. 这两种情况不会同时发生, 因为$\partial B(x, r_x)$弧连通; 若只有前者, 则$B(x, r_x)$取遍了所有$x \in \partial B(x, r_x)$时构成了$\partial B(x, r_x)$的一个开覆盖, 其存在有限子覆盖, 于$r_x$定义矛盾.

又注意到$\partial B(a, R)$的连通性, 且$F^\circ \ne \varnothing \ne F^c$, 故我们可以顺次选出$x$(例如对每个$x \in \partial B(a, R)$均选取半径为$R$的开球), 使得对于某个$\delta > R$有要么$B(a, \delta) \backslash \{a\} \subset F^\circ$, 要么$B(a, \delta) \backslash \{a\} \subset F^c$. 下面分别考虑这两种情形:

(i) 若$B(a, \delta) \backslash \{a\} \subset F^\circ$, 则$B(a, \delta) \subset F$, 这与$a$的定义矛盾;

(ii) 若$B(a, \delta) \backslash \{a\} \subset F^c$, 则我们可以不妨设对于任意$a \in \partial F$均有此情形成立. 下面来证明$F = \partial F$. 否则, $\exists t \in F^\circ$使得$B(t, r) \subset F^\circ$对某个$r > 0$成立, 由于∂F中仅有有限个点, 我们可以令a为∂F中距离t最近的那一个点. 取矩体$I \cap \partial F = \varnothing$, 其两个对角顶点分别为$t$与某个$s \in B(a, \delta) \backslash \{a\}$, 则由Ex 16.2.18即得矛盾. 这说明了$F = \partial F$, 与$F^\circ \ne \varnothing$矛盾. □

Chapter 17

映射的微分

17.1 线性映射

17.1.2 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是连续函数, $f(e_j)=a_j$, $j=1,2,\cdots,n$. 证明:

$$\|f\|=\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明: 由Cauchy-Schwarz不等式, 有

$$\left|\sum_{j=1}^n a_jx_j\right|\le\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

且在x与$(a_1,\cdots,a_n)$共线时可以取到等号. 故

$$\|f\|=\sup_{\sum x_i^2=1}\left|\sum_{j=1}^n a_jx_j\right|=\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

17.1.3 设Euclid空间$\mathbb{R}^n$上的线性变换$\mathcal{A}$在标准基下的矩阵表示为$\mathcal{A}(e_j)=\sum\limits_{j=1}^n a_{jk}e_j$. 证明:

(1) $\|\mathcal{A}\|=\|A\|$, 其中矩阵$A=(a_{jk})$;

(2) $\|\mathcal{A}\|\le\sqrt{\sum\limits_{j,k}|a_{jk}|^2}$;

(3) 若$\mathcal{A}$是对称变换, 则

$$\|\mathcal{A}\|=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\},$$

其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$为$\mathcal{A}$的特征值.

证明: (1) 注意到在$\mathbb{R}^n$中, 对任何向量的唯一表示$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, 有$\|x\| = \sqrt{\sum x_j^2}$. 因此$\|\mathcal{A}x\| = \|Ax\|$, $\|\mathcal{A}\| = \|A\|$.

(2) 仍然由Cauchy-Schwarz不等式有

$$\|\mathcal{A}x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^2\right) \sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{\sum_{j,k=1}^n a_{jk}^2}\|x\|.$$

因此$\|\mathcal{A}\| \leq \sqrt{\sum\limits_{j,k} |a_{jk}|^2}$.

(3) 由Ex 16.1.11及本题(1), 这是显然的. □

17.1.4 证明: 设$\mathcal{A}^{(k)}$为度量空间$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$中的点列, 它收敛于线性变换$\mathcal{A}$当且仅当$\mathcal{A}^{(k)}$在$\mathbb{R}^n$的标准基$e_1, \cdots, e_n$下的矩阵$\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$的各个元素构成的数列$\{a_{ij}^{(k)}\}$收敛于$a_{ij}$, 其中$(a_{ij})$为$\mathcal{A}$在标准基下的矩阵.

证明: 根据Ex 17,1,3, 我们有不等式

$$\max_{i,j} |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \leq \|\mathcal{A}^{(k)} - \mathcal{A}\| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}|^2}.$$

若线性变换收敛, 根据第一个不等式有矩阵中的各元素收敛; 反之若矩阵中的各元素收敛, 则根据第二个不等式有线性变换收敛. □

17.1.5 设$\mathcal{A}(t), t \in (a, b)$是从区间$(a, b)$到$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$的一个映射, $(a_{ij}(t))$是映射$\mathcal{A}(t)$在标准基下的矩阵表示. 证明: $\mathcal{A}(t)$是连续映射当且仅当对任意的i, j, $a_{ij}(t)$是连续函数.

证明: 由Ex 17.1.4, $\mathcal{A}(t)$是连续映射$\Longleftrightarrow \forall t_n \to t$, 有$\mathcal{A}(t_n) \to \mathcal{A}(t) \Longleftrightarrow \forall i, j, \forall t_n \to t$, 有$a_{ij}(t_n) \to a_{ij}(t) \Longleftrightarrow \forall i, j$, $a_{ij}(t)$是连续函数. □

17.2 映射的微分

17.2.4 求下列映射的微分和Jacobi矩阵:

(1) $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$;

(2) $f(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$.

解: (1) $\mathrm{d}f(x,y)=(2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y)e_1+(2y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)e_2$,

$$Jf(x,y)=\begin{bmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{bmatrix}.$$

(2) 因f为线性映射, 故$\mathrm{d}f(x,y,z)=f$,

$$Jf(x,y,z)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

□

17.2.5 设开集$D\subset\mathbb{R}^n$, $f,g:D\to\mathbb{R}^m$是可微映射, 证明$\langle f,g\rangle:D\to\mathbb{R}$亦为可微映射, 并求$\mathrm{d}\langle f,g\rangle$.

证明: 固定$x\in D$, 注意到f,g的可微性, 有

$$\begin{aligned}f(y)-f(x)&=\mathrm{d}f_x(y-x)+o_1(y-x)\\ g(y)-g(x)&=\mathrm{d}g_x(y-x)+o_2(y-x).\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&\langle f(y),g(y)\rangle-\langle f(x),g(x)\rangle\\ &=\langle f(y),g(y)-g(x)\rangle+\langle f(y)-f(x),g(x)\rangle\\ &=\langle f(x),\mathrm{d}g_x(y-x)\rangle+\langle \mathrm{d}f_x(y-x),g(x)\rangle+R(x,y),\end{aligned}$$

其中, $R(x,y)=\langle f(y)-f(x),g(y)-g(x)\rangle+\langle f(x),o_2(y-x)\rangle+\langle o_1(y-x),g(x)\rangle$. 因为这里的$x$已经固定, 故

$$\begin{aligned}&|\langle f(y)-f(x),g(y)-g(x)\rangle|\\ &\le|f(y)-f(x)||g(y)-g(x)|\\ &\sim|y-x|^2|\mathrm{d}f_x(e)||\mathrm{d}g_x(e)|=o(y-x).\end{aligned}$$

其中e表示沿$y-x$方向的单位向量, $\mathrm{d}f_x$, $\mathrm{d}g_x$作为两个固定的线性映射, 在$\mathbb{R}^n$的单位球面上取值有界. 对于第二个部分也有$|\langle f(x),o_2(y-x)\rangle|\le|f(x)||o_2(y-x)|=o(y-x)$. 类似地, $|\langle o_1(y-x),g(x)\rangle|=o(y-x)$. 综合这三式就得到$R(x,y)=o(y-x)$. 因此$\langle f,g\rangle$可微, 且$\mathrm{d}\langle f,g\rangle=\langle f(x),\mathrm{d}g_x\rangle+\langle \mathrm{d}f_x,g(x)\rangle$. □

17.2.6 设开集$D \subset \mathbb{R}^n$, $f, g : D \to \mathbb{R}^3$是可微映射, $x \in D$, 证明:

$$\mathrm{d}(f \times g)(x) = \mathrm{d}f(x) \times g(x) + f(x) \times \mathrm{d}g(x).$$

证明: 本题计算过程完全同于上题. 在此不赘. □

17.2.7 设开集$D \subset \mathbb{R}^n$, 线段$\{(1-t)x+ty \mid t \in [0,1]\} \subset D$, $f : D \to \mathbb{R}$是C^1映射, 证明: 该线段上存在一点z满足

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(z), y - x \rangle.$$

证明: 设映射$\gamma : [0,1] \to \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$, $\gamma(t) = (1-t)x + ty$, 则γ是有限维的线性映射, 进而是C^1映射. 令映射$g := f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, 则$g$作为$C^1$映射的复合, 也是$C^1$映射. 故由Lagrange中值定理, 存在$t_0 \in (0,1)$, 使得$g'(t_0) = g(1) - g(0)$. 记$z = (1-t_0)x + ty_0$, 此即

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(t_0) = \mathrm{d}f(\gamma(t_0))\mathrm{d}\gamma(t_0) = \langle f(z), y - x \rangle.$$

□

17.2.8 设M为$\mathbb{R}^n$的连通子集, $f : M \to \mathbb{R}^m$是可微映射, 如果存在一个线性映射$\mathcal{L} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$使得$\mathrm{d}f(x) = \mathcal{L}$, $\forall x \in M$, 证明: $f(x) = \mathcal{L}(x) + c$, 其中$c \in \mathbb{R}^m$为常向量.

证明: 令映射$g := f - \mathcal{L}$, 则$\mathrm{d}g(x) = \mathrm{d}f(x) - \mathrm{d}\mathcal{L}(x) \equiv 0$. 由**推论***17.11*, 存在常向量$c$, 使得$g(x) \equiv c$, 即$f(x) = \mathcal{L}(x) + c$. □

17.2.9 设$f : \mathrm{R}^n \to \mathbb{R}$是可微函数, $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n$是$\mathbb{R}^n$的一组单位正交基, 用$\dfrac{\partial f}{\partial \tilde{e}_j}$表示$f$沿$\tilde{e}_j$方向的方向导数. 证明:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_j} \right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2.$$

证明: 存在正交阵P, 使得

$$\begin{bmatrix} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \cdots & \tilde{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} P.$$

则

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \tilde{e}_1} & \dfrac{\partial f}{\partial \tilde{e}_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial \tilde{e}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial e_1} & \dfrac{\partial f}{\partial e_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial e_n} \end{bmatrix} P.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_j}\right)^2 &= \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_1} & \frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_1} & \frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial \tilde{e}_n}\end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial e_1} & \frac{\partial f}{\partial e_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial e_n}\end{bmatrix} PP^T \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial e_1} & \frac{\partial f}{\partial e_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial e_n}\end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial e_1} & \frac{\partial f}{\partial e_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial e_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial e_1} & \frac{\partial f}{\partial e_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial e_n}\end{bmatrix}^T \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2.\end{aligned}$$

□

17.2.10 在$\mathbb{R}^n$的一个凸区域M上的函数$f: M \to \mathbb{R}$称为凸函数是指: $\forall x, y \in M$, $\forall t \in [0,1]$, 有

$$f((1-t)x+ty) \le (1-t)f(x)+tf(y).$$

设f是可微函数, 证明: f是凸函数当且仅当对任意$x, y \in M$,

$$f(y)-f(x) \ge \mathrm{d}f_x(y-x).$$

证明: 首先设f是凸函数, 则对任何$t \in (0,1)$有

$$\frac{f((1-t)x+ty)-f(x)}{t} \le f(y)-f(x).$$

注意到f的可微性, 令$t \to 0$即得

$$\mathrm{d}f_x(y-x) \le f(y)-f(x).$$

反之, 任意固定$x, y \in M$及$t \in (0,1)$, 有

$$f(x)-f((1-t)x+ty) \ge \mathrm{d}f_{(1-t)x+ty}(t(x-y)) \tag{17.1}$$

$$f(y)-f((1-t)x+ty) \ge \mathrm{d}f_{(1-t)x+ty}((1-t)(y-x)). \tag{17.2}$$

在(1)式两边分别乘$(1-t)$, (2)式两边分别乘t, 两者相加, 并注意到$\mathrm{d}f$的线性性, 就有

$$(1-t)f(x)+tf(y)-f((1-t)x+ty) \ge 0,$$

即f为凸函数. □

17.2.11 设$\Omega \subset \mathbb{M}(n)$是可逆矩阵的全体. 定义映射$\varphi : \Omega \to \Omega$, $\varphi(A) = A^{-1}$, 证明φ是可微映射, 并且求它的微分.

证明: 因行列式映射$\det : \mathbb{M}(n) \to \mathbb{R}$是连续映射, 故$\Omega = \det^{-1}(\mathbb{R}\backslash 0)$是开集, 下述运算是合理的.

对给定的$A \in \Omega$, $\forall B \in \mathbb{M}(n)$使得$\|A - B\|$充分小, 有

$$\varphi(B) - \varphi(A) = B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(A - B)A^{-1} + R(A, B),$$

其中$R(A, B) = A^{-1}(A - B)B^{-1}(A - B)A^{-1}$. 因$\varphi$是连续映射, 且$A$已经固定, 故在$t \to 0$时, 有

$$\|R(A, B)\| \leq \|A^{-1}\|^2\|B\|\|A - B\|^2 = o(A - B).$$

这就说明φ是可微映射, 且它的微分为$\mathrm{d}\varphi_A(X) = -A^{-1}XA^{-1}$. □

17.3 逆映射定理

17.3.2 举例说明存在同胚映射$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$使得$f$是$C^1$映射, 但$f^{-1}$不是$C^1$映射.

解: $f(x) = x^3$. □

注记: 类似同胚映射, 微分同胚映射也需要保证f^{-1}的相应性质.

17.3.3 设$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) = f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$.

(1) 求f的值域$V = \mathrm{Im}(f)$;

(2) 求f的临界点集合$W = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \det Jf(P) = 0\}$;

(3) 设$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$, 证明$f|_U$是单射, 且$f(U) = V^\circ$, 并求$f^{-1}$.

证明: (1) 由$2x^2 = u + v \geq 0$, $2y^2 = u - v \geq 0$就有$V = \{(u, v) \mid u \geq |v| \geq 0\}$.

(2) 设$P(x, y)$, 则有

$$Jf(P) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix},$$

$\det Jf(P) = -8xy$. 故临界点集合为$W = \{(x, y) \mid xy = 0\}$.

(3) 设$f(x,y)=0$, 则有$x=y=0$, 从而$\ker f|_U=0$, $f|_U$为单射. 再由(1)中类似的方法也可以算出$f(U)=V^\circ$, 及$(x,y)=f^{-1}(u,v)=(\sqrt{\frac{u+v}{2}},\sqrt{\frac{u-v}{2}})$. □

17.3.4 证明:

(1) 同胚保持(弧)连通性和紧致性;

(2) $\mathbb{R}^n$与$D^n:=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x|<1\}$同胚.

证明: (1) 因为同胚是最理想的几何关系, 故这两条显然.

(2) 我们可以构造同胚映射$f:\mathbb{R}^n\to D^n$为

$$f(x)=\frac{x}{2}\chi_{\{|x|\le 1/2\}}+\left(1-\frac{1}{2|x|}\right)x\chi_{\{|x|>1/2\}}.$$

□

17.3.5 设$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(u,v)=f(x,y)$是C^1映射, 满足Cauchy-Riemann方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证明: 如果df在一点可逆, 则在该点附近的逆映射f^{-1}也满足Cauchy-Riemann方程.

证明: 设$Jf(x)=(a_{ij})$, $Jf^{-1}(x)=(a^{ij})$. 则$a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=-a_{21}$. 由$Jf(x)Jf^{-1}(x)\equiv I_2$知, Jf^{-1}元素也具有相同性质, 即$a^{11}=a^{22}$, $a^{12}=-a^{21}$. 这就是f^{-1}的Cauchy-Riemann方程. □

*注记:*本题说明, 复全纯函数具有比实可微函数更好的性质. 即双全纯映射(全纯的双射)的逆映射也为全纯映射, 但可微双射的逆则不一定可微.

17.3.6 证明对每个与单位矩阵I_n很靠近的n阶方阵M都存在平方根(即方程$A^2=M$的解), 并且若A与I_n很靠近, 那么方程$A^2=M$的解是唯一的.

证明: 设映射$\varphi:\mathbb{M}(n)\to\mathbb{M}(n)$定义为$\varphi(A)=A^2$. 则有

$$\varphi(A+X)-\varphi(A)=AX+XA+X^2,$$

余项$R(X)=X^2=o(X)$. 故d$\varphi_A(X)=AX+XA$连续, d$\varphi_{I_n}=2\,\mathrm{Id}$可逆, 其中Id表示恒同映射. 这说明存在$I_n$的邻域$U$与$V$使得$\varphi|_U:U\to V$可逆, 且逆映射$\varphi^{-1}(A)=\sqrt{A}$连续. 由双射也知这唯一. □

17.4 隐映射定理

17.4.2 设$a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$是一个非零向量, 定义多项式

$$f_a(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

证明: 如果$a^*\in\mathbb{R}^n$满足: 方程$f_{a^*}(x)=0$有n个互不相同的实根, 则存在a^*的邻域U使得方程$f_a(x)=0(\forall a\in U)$也有n个互不相同的实根, 且它的根是系数的光滑函数.

证明: 考虑映射$F:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^n$, $F(a,x):=(f_a(x_1),\cdots,f_a(x_n))$, 这显然是一个可微映射. 设$a^*\mathbb{R}^n$使得$f_{a^*}(x)=0$有$n$个互不相同的实根$b_1,\cdots,b_n$, 则我们有分解

$$f_{a^*}(x)=\prod_{i=1}^n(x-b_i).$$

记$b:=(b_1,\cdots,b_n)$, 在点(a^*,b)处, 有

$$(JF_{(a^*,b)})_x=\mathrm{diag}\{f'_{a^*}(b_1),\cdots,f'_{a^*}(b_n)\}$$

可逆(因b_i不再是f_{a^*}的根, 否则与重数矛盾). 在点(a^*,b)处应用隐映射定理, 由F的连续性, 存在一个充分小的邻域U使得$x=\varphi(a)$, $F(a,\varphi(a))=0$, $b=\varphi(a^*)$, 且x的分量各不相同. 由于F是一个光滑映射, 对它求相应阶次的微分即得φ在U上的光滑性. □

17.4.3 设$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$是$C^1$映射, 那么由命题$f(x,y,z)=0$推出

$$\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}=-1$$

需要什么条件?

证明: 根据隐映射定理可知, 只要保证∇f的各个分量均不为零即可. □

17.4.4 设f是定义在$\mathbb{R}^3$上的光滑函数, $a\in\mathbb{R}^3$, $f(a)=0$, $\nabla f\neq 0$, 则$f=f(x_1,x_2,x_3)=0$在点a附近定义了一张曲面. 证明: 存在点a附近的新坐标系, 在新坐标系下曲面$f=0$表示为平面.

证明: 由f的光滑性, 可以不妨设$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\neq 0$. 定义$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(u_1,u_2,u_3):=\varphi(x_1,x_2,x_3):=(f(x_1,x_2,x_3),x_2,x_3)$. 则

$$J\varphi_a=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & * \\ 0 & I_2\end{bmatrix}$$

可逆. 这说明φ在a附近是C^1同胚. 将(u_1, u_2, u_3)作为新坐标系, 则曲面$f = 0$即为$u_1 = 0$, 是平面. □

17.4.5 设$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是$C^1$映射, 证明: 对任意$x^0 \in \mathbb{R}^n$, 在$x^0$的一个邻域内

$$\mathrm{rank} f(x) \geq \mathrm{rank} f(x^0)$$

成立.

证明: 否则, 存在$x^0 \in \mathbb{R}^n$, 以及$\{x^n\} \to x^0$, 使得$\mathrm{rank} f(x^n) < \mathrm{rank} f(x^0)$, $\forall n$. 因为f为C^1映射, 故对Jf_{x^n}的任意大于等于$\mathrm{rank} f(x^0)$阶子式均为x的连续函数, 且它的值为0. 而这对任何n成立, 令$n \to \infty$, 就有Jf_{x^0}的任意大于等于$\mathrm{rank} f(x^0)$阶子式为0. 这是矛盾. □

17.4.6 设$f = f(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$是$C^3$函数.

(1) 证明: 若$f(0,0) = 0$, 则存在C^2函数g_1, g_2满足

$$f(x_1, x_2) = x_1 g_1(x_1, x_2) + x_2 g_2(x_1, x_2),$$

且$g_i(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0,0)$, $i = 1, 2$.

(2) 设$P(x_1^0, x_2^0)$是f的驻点, 并且f的二阶导数矩阵在点P处非退化, 证明: 存在P的一个邻域U上的参数变换$\varphi : U \to V$, $\varphi(P) = (0,0)$, 使得对任意$(u_1, u_2) \in V$, 有

$$f \circ \varphi^{-1}(u_1, u_2) = f(P) + \epsilon_1 u_1^2 + \epsilon_2 u_2^2,$$

其中$\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{\pm 1\}$.

证明: (1) 注意到

$$f(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(tx_1, tx_2)\mathrm{d}t = x_1 g_1(x_1, x_2) + x_2 g_2(x_1, x_2).$$

其中已经令

$$g_1(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1, tx_2)\mathrm{d}t, g_2(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(tx_1, tx_2)\mathrm{d}t,$$

符合所需.

(2) 不妨设$x_1^0 = x_2^0 = 0$, 以及$f(P) = 0$(否则考虑作平移即可). 注意到P为f的驻点, 类似(1), 我们可以令

$$\begin{aligned}
h_{11}(x_1, x_2) &= \int_0^1 \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(stx_1, stx_2)\mathrm{d}t\mathrm{d}s, \\
h_{12}(x_1, x_2) &= \int_0^1 \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(stx_1, stx_2)\mathrm{d}t\mathrm{d}s, \\
h_{21}(x_1, x_2) &= \int_0^1 \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(stx_1, stx_2)\mathrm{d}t\mathrm{d}s, \\
h_{22}(x_1, x_2) &= \int_0^1 \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(stx_1, stx_2)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

且有$g_1(x_1, x_2) = x_1 h_{11}(x_1, x_2) + x_2 h_{12}(x_1, x_2)$, $g_2(x_1, x_2) = x_1 h_{21}(x_1, x_2) + x_2 h_{22}(x_1, x_2)$, 以及

$$\begin{aligned}
h_{11}(P) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P), \\
h_{12}(P) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P), \\
h_{21}(P) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P), \\
h_{22}(P) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P).
\end{aligned}$$

记$H(x_1, x_2) := (h_{ij}(x_1, x_2))_{2\times 2}$. 则

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} H(x_1, x_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

由f是C^3映射, H是对称阵; 由f的Hesse阵在P点处非退化, $\det H(P) \neq 0$. 因此$h_{11}h_{22}|_P$与$h_{12}h_{21}|_P$不同时为零. 不妨设$h_{11}(P) \neq 0$, 否则考虑作C^1同胚的参数变换

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

同理不妨设$h_{22}(P) \neq 0$. 再不妨设$h_{11}(P) > 0$, 否则考虑作C^1同胚的参数变换

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

同理不妨设$h_{22}(P) > 0$. 由f是C^3的, 故h是C^1的. 因此存在点P的一个邻域U, 使得$h_{11}, h_{22}(x_1, x_2) > 0$, 且$\det H(x_1, x_2)$不变号(不妨设为正)对$U$中所

有点成立. 我们可以对$\forall(x_1,x_2)\in U$作C^1同胚的参数变换φ:

$$(u_1,u_2)=\varphi(x_1,x_2)$$
$$=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{-\sqrt{h_{11}(x_1,x_2)}} & 0\\ 0 & \dfrac{\sqrt{h_{11}(x_1,x_2)}}{\sqrt{h_{22}h_{11}-h_{12}h_{21}(x_1,x_2)}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{h_{21}}{h_{11}}(x_1,x_2) & 1\end{bmatrix},$$

利用$H(x_1,x_2)$的对称性, 可见在这组(u_1,u_2)坐标下, $f\circ\varphi^{-1}(u_1,u_2)=u_1^2+u_2^2$, 如所欲证. □

17.5 条件极值

17.5.1 下面方程中实常数取何值时, 方程定义了一个C^1曲面? 如果可以, 请找出局部的函数图像表示.

(3) $xyz=c$.

解: 在$c\neq 0$时方程定义了C^1曲面, 其局部函数图像表示为$f(x,y)=(x,y,\dfrac{c}{xy})$. 而$c=0$时, 在原点处其各偏导数均取值为0, 故不是$C^1$曲面. □

17.5.3 设$M\subset\mathbb{R}^n$是m维C^1曲面, $f:M\to\mathbb{R}$是C^1函数. 证明: 对于M上的每点, 存在一个$\mathbb{R}^n$中的邻域U, 使得存在C^1函数$F:U\to\mathbb{R}$满足$F(y)=f(y)$, $\forall y\in M\cap U$.

证明: 对M上的任意点(x_1,x_2), 存在$\mathbb{R}^m$中的邻域V, 使得在V上各点有表示$(x_1,\varphi(x_1))$, 其中$x_1\in\mathbb{R}^m$, $\varphi\in C^1(U,\mathbb{R}^{n-m})$. 将$V$视作$\mathbb{R}^n$中的集合, 再取它的邻域$U$, 并定义$U$上的函数$F(x_1,x_2):=f(x_1,\varphi(x_1))$. 则$F$是$C^1$函数, 且$\forall y\in M\cap U$, $F(y)=f(y)$. □

17.5.7 证明: $\mathbb{R}^{n_1}$中的m_1维曲面M_1和$\mathbb{R}^{n_2}$中的m_2维曲面M_2的直积$M_1\times M_2$是$\mathbb{R}^{n_1+n_2}$中的m_1+m_2维曲面. 并且用M_1上点x的切空间与M_2上点y的切空间表示$M_1\times M_2$上点(x,y)的切空间.

证明: 任取$(x,y)\in M_1\times M_2$, 则可以不妨设存在x与y的开邻域U_1与U_2, 使得在U_1, U_2上分别有局部表示$x=(x_1,\varphi_1(x_1))$, $y=(y_1,\varphi_2(y_1))$, 其中$\varphi_1\in C^1(\mathbb{R}^{m_1},\mathbb{R}^{n_1-m_1})$, $\varphi_2\in C^1(\mathbb{R}^{m_2},\mathbb{R}^{n_2-m_2})$. 对$(x,y)$在$\mathbb{R}^{n_1+n_2}$中的邻域$V:=U_1\times U_2$, $(x,y)=(x_1,\varphi_1(x_1),y_1,\varphi_2(y_2))$, 也即有局部的$C^1$表示: $\varphi(x_1,y_1)$, $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^{m_1+m_2},\mathbb{R}^{n_1+n_2-m_1-m_2})$, 故$M_1\times M_2$是$m_1+m_2$维$C^1$曲面.

注意到(x,y)处的切向量由坐标表示为

$$\{(e_1,(\varphi_1)_{x_1},0,0),\cdots,(e_{m_1},(\varphi_1)_{x_{m_1}},0,0),$$
$$(0,0,e_1,(\varphi_2)_{y_1}),\cdots,(0,0,e_{m_2},(\varphi_2)_{y_{m_2}})\}$$

的向量组张成, 而x,y处的切向量恰好由坐标表示为

$$\{(e_1,(\varphi_1)_{x_1}),\cdots,(e_{m_1},(\varphi_1)_{x_{m_1}})\},\{(e_1,(\varphi_2)_{y_1}),\cdots,(e_{m_2},(\varphi_2)_{y_{m_2}})\}$$

的向量张成, 其中下标表示对相应的变元求偏导数. 将后者自然地视作前者的子空间, 则$T_{M_1\times M_2}(x,y)=T_{M_1}x\times T_{M_2}y$, 其中各切向量采用相应的坐标记法. □

17.5.9 证明: 行列式等于1的n阶方阵全体是$\mathbb{R}^{n^2}$中的n^2-1维C^1曲面.

证明: 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则$\det A=P(a_{11},\cdots,a_{nn})$是关于$A$全体元素的多项式. 注意到$\operatorname{rank}\det\leq 1$, 且$\operatorname{rank}\det_A=0\iff A=0$, 故这是$n^2-1$维$C^1$曲面. □

17.5.10 证明: n阶正交方阵的全体是$\mathbb{R}^{n^2}$中的$\dfrac{n(n-1)}{2}$维C^1曲面.

证明: 定义映射$F:\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$为$f_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}-\delta_{ij}(1\leq i\leq j\leq n)$, $F(A)=(f_{12},\cdots,f_{1n},\cdots,f_{n-1,n},f_{11},\cdots,f_{nn})$, 其中$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n^2}$. 则$n$阶正交方阵的全体即为$F\equiv 0$. 容易计算

$$JF_A=\begin{bmatrix}\alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \alpha_n & 0 & \cdots & \alpha_1\\ 0 & \alpha_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \alpha_n & \cdots & \alpha_2\\ \vdots & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \alpha_n & \alpha_{n-1}\\ 2\alpha_1 & & & \\ & 2\alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2\alpha_n\end{bmatrix},$$

其中$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$依次为$A$的$n$个行向量.

由$\{\alpha_i\}_i$的正交性知, 任何α_k不可被其它向量线性表出, 故JF_A是行满秩的. 因为F定义在$|\alpha_1|\cdots|\alpha_n| \neq 0$的开集上, 故这是$n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$维$C^1$曲面. □

17.5.11 设M是$\mathbb{R}^n$中的C^1曲面, $y^0 \in \mathbb{R}^n \backslash M$. 设$x$是$M$上与$y^0$的距离最大或者最小的点. 证明: 连接$x$与$y$的线段与曲面$M$垂直(即与$x$点的切空间垂直).

证明: 设在x^0的局部M有方程表示$f(x) = 0$. 令函数$F(x) = \sum_i (x_i - y_i^0)^2$表示曲面上点$x$到点$y^0$距离的平方, Lagrange辅助函数$H(x, \lambda) = F(x) + \lambda f(x)$, 则两者都是$C^1$的. 因$x$为最值, 它必然也是局部极值, 即为驻点. 则有$\langle 2(x^0 - y^0), Jf_{x^0}\rangle = 0$, 即$x^0 - y^0$与$f(x) = 0$的任意分量的梯度场垂直, 进而与切空间垂直. □

17.5.13 利用Lagrange乘数法决定下列函数f在约束条件$G = 0$下的极值:

(3) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $G(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 1$.

证明: 构造Lagrange函数$H(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda G(x, y, z)$. 则驻点方程组

$$\begin{cases} 2x(1+\lambda) = 0 \\ 2y(1+4\lambda) = 0 \\ 2z(1-2\lambda) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

Hesse阵 $\mathrm{diag}\{2 + 2\lambda, 2 + 8\lambda, 2 - 4\lambda\}$. 容易得到驻点有解为$(x, y, z, \lambda) = (\pm 1, 0, 0, -1), (0, \pm 1/2, 0, -1/4)$. 分别代入Hesse阵后发现, 在约束在切空间内取值时, 前者的二次型不定, 后者的二次型正定. 故前者不是极值点而后者是极小值点, f有极小值为$1/4$. □

17.5.16 证明: 定义熵(entropy)$E := \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \ln x_j$, 则在约束条件$\sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1$下, 熵在点$\left(\dfrac{1}{n}, \cdots, \dfrac{1}{n}\right)$取最小值.

证明: 作Lagrange辅助函数

$$H(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} x_j \ln x_j + \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1 \right).$$

有驻点方程组

$$\begin{cases} 1+\ln x_j+\lambda=0 \quad \forall j \\ \sum_{j=1}^{n} x_j=1 \end{cases}$$

与Hesse阵 $\operatorname{diag}\left(\frac{1}{x_1},\cdots,\frac{1}{x_n}\right)$. 故唯一驻点对应二次型正定, 该点处为极小值$-\ln n\leq 0$. 下面我们归纳地证明这是最小值. 在$n=2$时, 在有定义的集合$\{(x_1,x_2):x_1+x_2=1,x_j>0\ \forall j\}$的边界处, $E\to 0$, 故这是最小值. 以下假定对$n-1$已经成立, 则考虑上面相应集合的边界处, E的最小值就是$-\ln(n-1)$, 这说明n时也成立. □

17.5.17 设$x=(x_{ij})\in\mathbb{M}(n)$是$n$阶实方阵, $v_1,\cdots,v_n$是它的n个行向量, 证明:

$$|\det x|\leq\prod_{i=1}^{n}|v_i|.$$

证明: 通过伸缩变换可以不妨设$|x_j|=1$对所有j成立, 那么我们只要证明有$|\det x|\leq 1$. 作Lagrange辅助函数

$$F(x)=\det x+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}^2-1).$$

则有驻点方程组

$$\begin{cases} X_{ij}+2\lambda_j x_{ij}=0 & \forall i,j \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2=1 & \forall i \end{cases},$$

其中X_{ij}表示x的代数余子式. 则在驻点处$\det x=-2\lambda_j:=-2\lambda$对所有$j$成立. 注意到$x^*=(X_{ij})=(-2\lambda x_{ij})$, 从而由

$$x^*x=\ \operatorname{diag}(\det x,\cdots,\det x),$$

可见$(\det x)^n=(-2\lambda)^n(\det x)^2$. 这说明了在驻点处有$\det x=-2\lambda=\pm 1$. 注意到我们所定义的曲面是紧致的, 故det作为连续函数可以取到最值. 因此这极大值和极小值就分别为最值, $|\det x|\leq 1$. □

Chapter 18

Riemann积分

18.1 $\mathbb{R}^2$的有面积集合

18.1.2 证明: $(0,1]$上函数$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$的图像在$\mathbb{R}^2$中的Jordan测度为0.

证明: $\forall\epsilon>0$, 由例*18.1.1*, 存在有限个矩形$Q_1,\cdots,Q_N$, 使得

$$\{(x,f(x)\mid \frac{\epsilon}{4}\le x\le 1\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}Q_i,\ \text{且}\ \sum_{i=1}^{n}|Q_i|<\frac{\epsilon}{2}.$$

再添加上矩形$Q_0:=[0,\dfrac{\epsilon}{4}]\times[-1,1]$, 则$Q_0,\cdots,Q_N$构成函数图像的一个覆盖, 且

$$\sum_{i=0}^{N}|Q_i|<\epsilon,$$

这就说明了$f(x)$图像Jordan零测. □

18.1.3 设D为$\mathbb{R}^2$的有界子集, 证明下述三个结论等价:

(1) D是零测集;

(2) 对任意$\epsilon>0$, 存在有限个区间$I_1,\cdots,I_n(n=n(\epsilon))$使得

$$D\subset\bigcup_{k=1}^{n}I_k\ \text{且}\ \sum_{k=1}^{n}\sigma(I_k)<\epsilon;$$

(3) 对任意$\epsilon>0$, 存在有限个开区间$I_1,\cdots,I_n(n=n(\epsilon))$使得上式成立.

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2). 显然.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 由(2), $\forall\epsilon>0$, 存在有限个闭区间$I_1,\cdots,I_n$使得

$$D\subset\bigcup_{k=1}^{n}I_k\ \text{且}\ \sum_{k=1}^{n}\sigma(I_k)<\frac{\epsilon}{2}.$$

将这其中的每个矩形向外扩张为一个开矩形, 且面积之差小于$\dfrac{\epsilon}{2n}$即可.

(3) $\Longrightarrow$ (1). 因为$\sigma(I_k)=\sigma(\overline{I_k})$, 故这显然. □

18.1.4 设D可测, 且$D^\circ=\varnothing$, 证明: $\sigma(D)=0$.

证明: 显然对任何固定分割π, $\sigma_\pi^-(D)=0$, 故$\sigma^-(D)=0$. 因为D可测, 故$\sigma(D)=\sigma^-(D)=0$. □

18.1.5 设D可测, 证明: 对任意$\epsilon>0$, 存在紧致集合$E\subset D$, 且$\sigma^+(D\backslash E)<\epsilon$.

证明: 不妨设D有界. 因为$\sigma(\partial D)=0$, 由Ex 18.1.3知, $\forall\epsilon>0$, 存在有限个能够覆盖∂D的开区间$I_1,\cdots,I_n$, 使得

$$\sigma^+(U)\le\sum_{k=1}^n|I_k|<\epsilon,$$

其中$U:=\bigcup\limits_{k=1}^n I_k$是开集. 令$E=D\backslash U\subset D$, 则$E=D\cap U^c=\overline{D}\cap U^c$是紧集, 且$\sigma^+(D\backslash E)\le\sigma^+(U)<\epsilon$. □

18.1.6 设D是$\mathbb{R}^2$的一个开集. 一个开子集列$\{D_n,n=1,2,\cdots\}$称为D的竭尽递增列, 如果满足

1° 每个D_n是有界开集, 且Jordan可测;

2° $D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots$, 且$\bigcup\limits_{n=1}^\infty D_n=D$.

证明: 如果D是有界可测集, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(D_n)=\sigma(D).$$

证明: 对可测集合D, 由Ex 18.1.5知, $\forall\epsilon>0$, 存在紧致子集$E\subset D$, 使得$\sigma(D)=\sigma^+(D)\le\sigma^+(E)+\sigma^+(D\backslash E)$, $\sigma^+(E)\ge\sigma(D)-\sigma^+(D\backslash E)>\sigma(D)-\epsilon$. 因为$\{D_n\}$构成了紧集$E$的一个开覆盖, 故存在$N$, 使得$E\subset D_N$, 从而$\forall n>N$, $\sigma(D_n)=\sigma^+(D_n)\ge\sigma(D_N)\ge\sigma^+(E)>\sigma(D)-\epsilon$. 又$\sigma(D_n)\le\sigma(D)$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(D_n)=\sigma(D)$. □

18.1.10 设E是$\mathbb{R}^2$的紧致子集, $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n$, 并且每个$E_n$是零测集. 证明: E也是零测集.

证明: $\forall\epsilon>0$, $\forall n$, 存在有限个能够覆盖E_n的开区间$I_{n1},\cdots,I_{nk_n}$, 且满足

$$\sum_{i=1}^{k_n}|I_{ni}|<\frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

记$U_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} I_i$是开集, 则$U_1, \cdots, U_n, \cdots$构成$E$的一个开覆盖, 它有有限子覆盖, 即有有限个开矩形$J_1, \cdots, J_m$可以覆盖E, 且满足

$$\sum_{i=1}^{m} |J_i| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} |I_i| < \epsilon.$$

由Ex 18.1.3, $\sigma(E) = 0$. □

18.2 Riemann积分

18.2.1 设A, B是平面的子集, 证明:

(1) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$;

(2) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

证明: 显然, 在此不赘. □

18.2.2 设A, B是平面的可测子集, 证明: $A \cup B, A \cap B, A\backslash B$都是可测集, 且

$$\sigma(A \cup B) + \sigma(A \cap B) = \sigma(A) + \sigma(B),$$
$$\sigma(A\backslash B) = \sigma(A) - \sigma(A \cap B).$$

证明: 注意到对任意可测子集D, χ_D可积, 且

$$\iint \chi_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma(D).$$

故由Ex 18.2.1立得. □

注记: 以上两题的结论在概率论中比较十分常见. 其中Ex 18.2.1在取n个集合时可以用来证明容斥原理和它的一些相关不等式.

18.2.3 设D_1, D_2是平面的可测集, 且$D_1 \cap D_2$零测. 函数f在D_1和D_2上分别可积, 证明: f在$D_1 \cup D_2$上可积, 且

$$\int_{D_1\cup D_2} f\mathrm{d}\sigma = \int_{D_1} f\mathrm{d}\sigma + \int_{D_2} f\mathrm{d}\sigma.$$

证明: 由性质*18.18*及Ex 18.2.1, 有f的可积性以及

$$\int_{D_1\cup D_2} f\mathrm{d}\sigma = \int_{D_1} f\mathrm{d}\sigma + \int_{D_2} f\mathrm{d}\sigma - \int_{D_1\cap D_2} f\mathrm{d}\sigma = \int_{D_1} f\mathrm{d}\sigma + \int_{D_2} f\mathrm{d}\sigma.$$

□

18.2.4 设D可测, D_1是D的可测子集, f是定义在D上的可积函数. 证明: f在D_1上可积.

证明: 因D_1可测, χ_{D_1}可积. 由于$f\cdot\chi_D$可积, 故$f\cdot\chi_{D_1}=f\cdot\chi_D\cdot\chi_{D_1}$作为可积函数的积, 仍然可积. □

18.2.5 设开集D可测, f是定义在D上的连续非负可积函数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_D f^n\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{n}}=\sup_{P\in D}f(P).$$

证明: 因为f可积, 故f^n可积. 令$M:=\sup f(P)<\infty$. $\forall\epsilon>0$充分小, 存在$P\in D$使得$f(P)>M-\epsilon$. 由f连续性, 存在$r>0$使得$\forall Q\in B_r(P)\subset D$, $f(Q)>M-2\epsilon$. 注意到$B_r(P)$可测, 由Ex 18.2.4, f^n在其上可积, 故

$$\begin{aligned}\left(\int_D f^n\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{n}}&\geq\left(\int_{B_r(P)}f^n\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{n}}\\&\geq\left(\int_{B_r(P)}(M-2\epsilon)^n\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{n}}\\&=\sigma(B_r(P))^{\frac{1}{n}}\cdot(M-2\epsilon);\\\left(\int_D f^n\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{n}}&\leq\left(\int_D M^n\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{n}}=\sigma(D)^{\frac{1}{n}}\cdot M.\end{aligned}$$

两式结合, 令$n\to\infty$并注意到ϵ的任意性, 即得欲证之式. □

18.2.6 设f是可测集D上的可积函数, $P\in D$是一个内点且f在点P处连续, 证明:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\sigma(B_r(P))}\int_{B_r(P)}f\mathrm{d}\sigma=f(P).$$

证明: $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得$\forall Q\in B_\delta(P)$, $|f(P)-f(Q)|<\epsilon$. 则$\forall r<\delta$,

$$\left|\frac{1}{\sigma(B_r(P))}\int_{B_r(P)}f\mathrm{d}\sigma-f(P)\right|\leq\frac{1}{\sigma(B_r(P))}\int_{B_r(P)}|f(Q)-f(P)|\mathrm{d}\sigma<\epsilon.$$

□

18.2.7 设f是定义在一个可测集D上的函数, 设$f^+(P)=\max\{f(P),0\}$, $\forall P\in D$, $f^-(P)=-\min\{f(P),0\}$. 证明: f可积当且仅当f^+与f^-可积, 且

$$\int_D f\mathrm{d}\sigma=\int_D f^+\mathrm{d}\sigma-\int_D f^-\mathrm{d}\sigma.$$

证明: 充分性显然.

为证明必要性, 我们首先证明: 若f可积, 则$|f|$可积. 事实上, 对任何矩形I_{kl}, 记$f, |f|$在其上的最值分别为$M_{kl}, m_{kl}, M'_{kl}, m'_{kl}$, 则

$$M'_{kl} - m'_{kl} \leq M_{kl} - m_{kl}.$$

因此由定义就得到了$|f|$的可积性. 注意到

$$f^+ = \frac{f + |f|}{2} \text{ 以及 } f^- = \frac{|f| - f}{2},$$

故这两者均可积. 由$f^+ - f^- = f$, 也有

$$\int_D f \mathrm{d}\sigma = \int_D f^+ \mathrm{d}\sigma - \int_D f^- \mathrm{d}\sigma.$$

□

18.2.11 将Ex 18.1.6中的开集条件去掉, 证明相同的结论.

证明: 据Ex 18.1.6及Ex 18.2.2, 我们要证明$E := \overline{D} \backslash \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n^\circ \right)$是一个零测集, 那么就有$\sigma(D) = \sigma(\overline{D}) = \sigma(\overline{D} \backslash E) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(D_n^\circ) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(D_n)$.

注意到

$$\begin{aligned} E &= \left[\partial D \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^\circ \right)^c \right] \bigcup \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^\circ \right)^c \right] \\ &= \partial D \bigcup \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[D_n \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^\circ \right)^c \right] \right\} \\ &\subset \partial D \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial D_n \right), \end{aligned}$$

因此E也有界. 由E的定义知它还是闭集, 故E是紧集. 由于$D, D_1, \cdots, D_n, \cdots$均可测, 故它们的边界测度均为零. 而$E$能够被它们完全包含, 根据Ex 18.1.10, 立即有$\sigma(E) = 0$. □

注记: 以上证明的所有的结论, 将成为以后Lebesgue积分时十分自然的结果, 其中18.2.7结论将用来定义(如在Lebesgue测度上)任意函数的积分.

18.3 可积函数类

18.3.2 设$f(x,y)$是区间$I=[a,b]\times[c,d]$上的可积函数, 设

$$\varphi(x)=\underline{\int_c^d} f(x,y)\mathrm{d}y \text{ 以及 } \psi(x)=\overline{\int_c^d} f(x,y)\mathrm{d}y$$

分别是f关于变量y的下积分和上积分, 证明: $\varphi(x)$和$\psi(x)$可积, 且

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x.$$

证明: 容易发现

$$\begin{aligned}
\underline{S}(\varphi)&=\sup_{\pi_x}\sum_{\pi_x}\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k}(\varphi)(x_k-x_{k-1})\\
&=\sup_{\pi_x}\sum_{\pi_x}\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k}\left\{\sup_{\pi_y}\sum_{\pi_y}\inf_{y_{l-1}\le y\le y_l}(f)(y_l-y_{l-1})\right\}(x_k-x_{k-1})\\
&\ge\sup_{\pi_x}\sum_{\pi_x}\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k}\left\{\sup_{\pi_y}\sum_{\pi_y}m_{kl}(f)(y_l-y_{l-1})\right\}(x_k-x_{k-1})\\
&\ge\sup_{\pi_x}\sum_{\pi_x}\sup_{\pi_y}\sum_{\pi_y}m_{kl}(f)(y_l-y_{l-1})(x_k-x_{k-1})\\
&\ge\sup_{I_{kl}}\sum_{I_{kl}}m_{kl}(f)(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})\\
&=\underline{S}(f).
\end{aligned}$$

同理也有$\overline{S}(\varphi)\le\overline{S}(f)$. 由$f$的可积性即得$\varphi$的可积性, 且两者积分值相等; 同理也有$\psi$可积且与$f$的积分值相等. □

注记: 本题说明了累次积分与多重积分的关系.

18.3.5 设D是一个平面可测集, $\sigma(D)>0$, f是D上一个可积函数且$f>0$. 证明:

$$\int_D f\mathrm{d}\sigma>0.$$

证明: 不妨设D是一个紧集, 否则依据Ex 18.1.5的证明过程, 我们可以选取一个可测紧集$D'\subset D$, 且$\sigma(D')>0$. 若$\int_D f\mathrm{d}\sigma=0$, 由Ex 18.2.8, D_n均为Jordan零测. 由Ex 18.1.10, 紧集D作为可数个Jordan零测集的并, 它也是零测集. 矛盾. □

18.3.6 设D是平面Jordan可测集, $\{f_n\}$是定义在D上的可积函数列, 一致收敛到函数f. 证明: f在D上可积且

$$\int_D f\mathrm{d}\sigma = \lim_{n\to\infty}\int_D f_n\mathrm{d}\sigma.$$

证明: 将Thm 15.31中各个一维区间换为二维区间即可. □

18.3.7 设D_n是一列非空Jordan可测开集, 满足$D_n \subset D_{n+1}(n=1,2,\cdots)$, 并且$D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$也是Jordan可测集. 设$f$在$D$上可积, 证明:

$$\int_D f\mathrm{d}\sigma = \lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f\mathrm{d}\sigma.$$

证明: 由Ex 18.2.4, 右侧各个积分均有意义. 设f有界M, 则由Ex 18.1.6, 有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int f(\chi_D-\chi_{D_n})\mathrm{d}\sigma\right| \le M\lim_{n\to\infty}\sigma(D)-\sigma(D_n)=0.$$

□

18.3.8 设E是一个紧致集合, 证明: E是Jordan零测集当且仅当它是Lebesgue零测集.

证明: 必要性是显然的, 下面只证明充分性. 由于E为Lebesgue零测集, 故可以取到一列区间$\{I_n\}$覆盖E, 且$\sum\sigma(I_n)<\epsilon/2$, $\forall\epsilon>0$. 我们可以不妨将每个区间适当扩大为开区间$\tilde{I}_n$, 使得$\sum\sigma(\tilde{I}_n)<\epsilon$, 且$\{\tilde{I}_n\}$仍然覆盖$E$. 因为$E$为紧集, 故存在有限子覆盖, 这就说明$\sigma^+(E)<\sum_{i=1}^N\sigma^+(\tilde{I}_n)<\epsilon$. □

18.3.9 设f是可测集D上的非负可积函数, 且$\int_D f\mathrm{d}\sigma=0$, 证明: 集合$D_0:=\{P\in D\mid f(P)>0\}$是Lebesgue零测集.

证明: 由Ex 18.2.8, $D_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n$是可数个Jordan零测集之并. 由Cor 18.24的证明过程可见它就是Lebesgue零测的. □

18.4 重积分换元公式*

18.4.1 设$GL(n,\mathbb{R})$是$n\times n$可逆矩阵全体, 可以将它看作$\mathbb{R}^{n^2}$的开集. 设$f:\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}$是连续非负具有紧致支集的函数. 证明: 对于任意$y\in GL(n,\mathbb{R})$,

$$\int_{GL(n,\mathbb{R})} f(xy)|\det x|^{-n}\mathrm{d}x = \int_{GL(n,\mathbb{R})} f(x)|\det x|^{-n}\mathrm{d}x$$

成立. 又问如果把xy换成yx, 结论是否成立?

证明: 考虑线性映射$x=\varphi(u)=uy^{-1}$, 则它连续且C^1. 可以计算$J(u)=|\det(\mathrm{d}\varphi(u))|=|\det y|^{-n}$. 则

$$\int_{GL(n,\mathbb{R})} f(xy)|\det x|^{-n}\mathrm{d}x=\int_{GL(n,\mathbb{R})} f(u)|\det xy^{-1}|^{-n}J(u)\mathrm{d}u=\int_{GL(n,\mathbb{R})} f(x)|\det x|^{-n}\mathrm{d}x.$$

若把xy换成yx, 结论仍然成立, 只要采用$x=\psi(v)=y^{-1}v$, 或将yx取转置即可. □

18.4.3 设f为$\mathbb{R}^n$上具有紧致支集的连续函数.

(1) 对任意$t>0$, $tx=(tx_1,\cdots,tx_n)$, 证明:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(tx)\mathrm{d}x=t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 再设f在原点的一个邻域内恒为0, 证明:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(tx)}{|x|^n}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x)}{|x|^n}\mathrm{d}x,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x/|x|^2)}{|x|^n}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x)}{|x|^n}\mathrm{d}x.$$

证明: (1) 令$x=\varphi(u)=\dfrac{u}{t}$, 则$\varphi$是连续$C^1$映射(因$t>0$). 可以计算, $J(u)=|\det(\mathrm{d}\varphi(u))|=\dfrac{1}{u^n}$. 则由换元公式,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(tx)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n} f(u)J(u)\mathrm{d}u=t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 第一式采用(1)相同的换元, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(tx)}{|x|^n}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n} t^n\frac{f(u)}{|u|^n}J(u)\mathrm{d}u=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x)}{|x|^n}\mathrm{d}x,$$

其中$t>0$.

由于f在原点的一个邻域内恒为0, 故$d(0,\mathrm{supp}f)>0$. 令$u=\varphi(x)=\dfrac{x}{|x|^2}$, 则它在$\mathrm{supp}f$上是$C^1$函数. 再利用换元公式就有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x/|x|^2)}{|x|^n}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}|u|^n f(u)J(u)\mathrm{d}u=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x)}{|x|^n}\mathrm{d}x,$$

其中已应用$J(u)=|u|^{-2n}$. □