

# 中国科学技术大学

2019—2020学年第二学期期末试卷

考试科目 概率论与数理统计B 得分 \_\_\_\_\_

院系 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

## 一. 填空题(每题3分, 共30分, 答案请写在答题纸上):

1. 若事件  $A$  和事件  $B$  相互独立, 已知  $P(B) = 0.3$ ,  $P(\bar{A} \cup B) = 0.8$ , 则  $P(A) =$  \_\_\_\_\_.
2. 设随机变量  $X$  与  $Y$  独立, 且  $EX = EY = 0$ ,  $VarX = VarY = 1$ . 若记  $W_1 = X + Y$ ,  $W_2 = X - Y$ , 则  $W_1$  与  $W_2$  的相关系数为 \_\_\_\_\_.
3. 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是相互独立的标准正态随机变量, 若要使得  $T = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 + 4X_4)^2$  服从卡方分布, 则非零常数  $a$  和  $b$  的值应为 \_\_\_\_\_.
4. 随机抽查 9 辆从中国科大西校区到合肥南站的搭乘出租车所用的时间, 算得样本均值  $\bar{x} = 20$  (分钟), 无偏方差的标准差  $s = 3$  (分钟). 若假设此样本来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu, \sigma^2$  均未知, 则参数  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间为 \_\_\_\_\_.
5. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 如分别用  $2X_2 - X_1, \bar{X}, X_1$  作为  $\mu$  的估计量时, 其中最有效的是 \_\_\_\_\_.
6. 某总体是一个离散分布, 它有 10 个不同的取值, 且其分布中含有 2 个未知参数. 若采用拟合优度检验判断一组简单随机样本是否服从该离散总体, 所使用的卡方检验统计量的自由度应为 \_\_\_\_\_.
7. 将数字  $1, 2, 3, \dots, n$  任意排成一列, 定义  $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个位置恰是数字 } i, \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个位置不是数字 } i. \end{cases}$   
令  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ . 则随机变量  $Y$  的数学期望为 \_\_\_\_\_.
8. 设  $P(X \geq 0, Y \geq 0) = 3/7$ ,  $P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = 4/7$ , 则  $P(\max\{X, Y\} \geq 0) =$  \_\_\_\_\_.
9. 若  $F(x)$  和  $G(x)$  都是分布函数, 则以下函数中不一定是分布函数的为 \_\_\_\_\_.  
(A)  $F(x)G(x)$ ;            (C)  $aF(x) + (1-a)G(x)$ , 其中,  $0 < a < 1$ ;  
(B)  $[F(x)]^6[G(x)]^8$ ;    (D)  $bF(x) + \frac{1}{b}G(x)$ , 其中,  $b > 1$ ;
10. 在一次假设检验中, 下列说法正确的是 \_\_\_\_\_  
(A) 既可能犯第一类错误也可能犯第二类错误.  
(B) 如果备择假设是正确的, 但作出的决策是拒绝备择假设, 则犯了第一类错误.

订 装 线

- (C)增大样本容量, 则犯两类错误的概率都不变.  
 (D)如果原假设是错误的, 但作出的决策是接受备择假设, 则犯了第二类错误.

二. (10分) 设市区某公寓楼有100户居民用电, 各户用电情况相互独立. 已知每户每日用电量 $X_i$  (单位: 度) 服从区间  $[0, 12]$  上的均匀分布, 请运用中心极限定理求这100户居民每日总用电量超过500度的概率. (结果可用标准正态分布函数 $\Phi(\cdot)$ 的值表示).

三. (15分) 设随机变量  $X$  和  $Y$  独立同分布于参数为 1 的指数分布, 他们的密度函数为  $f(x) = e^{-x}, x > 0$ . 记  $U = X + Y, V = X/(X + Y)$ .

- (1) 求随机向量  $(U, V)$  的联合密度;  
 (2) 分别求出随机变量  $X$  和  $Y$  的边缘密度, 并判断随机变量  $U$  和  $V$  是否相互独立.

四. (20分) 设  $X_1, \dots, X_n$  为来自于均匀分布总体  $U(0, \theta)$  的一个样本容量为  $n$  的简单随机样本.

- (1) 求  $\theta$  的矩估计  $\hat{\theta}_1$  和最大似然估计  $\hat{\theta}_2$ ;  
 (2) 验证  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$  是否具有无偏性, 若为有偏估计请将其修正为无偏估计.

五. (15分) 为了解甲、乙两家企业基层职工的工资水平, 分别从两家企业各随机抽取若干名基层职工进行调查, 得如下月收入数据 (单位: 元):

甲企业: 2800, 3100, 2900, 2900, 3200, 3100, 3000

乙企业: 3000, 2900, 3100, 2800, 3200, 3600, 3900, 3100

设两家企业基层职工工资分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma^2)$ , 两个总体独立且均值和方差皆未知. 试根据以上数据检验: 甲企业基层职工平均工资是否低于乙企业基层职工平均工资? (显著性水平  $\alpha = 0.05$ )

六. (10分) 为了解男性和女性对三种类型的啤酒: 淡啤酒、普通啤酒和黑啤酒的偏好有没有差异, 分别调查了180位男士和120位女士的喜好, 得如下数据

	淡啤酒	普通啤酒	黑啤酒
男性	49	31	100
女性	51	20	49

请问男性和女性对这三种类型的啤酒的偏好有显著差异吗? ( $\alpha = 0.05$ )

附录: 参考分位数的数值如下:

$u(0.05) = 1.64, u(0.025) = 1.96, t_8(0.05) = 1.86, t_8(0.025) = 2.30, t_9(0.05) = 1.83, t_9(0.025) = 2.26, t_{13}(0.05) = 1.77, t_{13}(0.025) = 2.16, t_{14}(0.05) = 1.76, t_{14}(0.025) = 2.15, t_{15}(0.05) = 1.75, t_{15}(0.025) = 2.13, \chi_2(0.05) = 5.99, \chi_2(0.025) = 7.38, \chi_5(0.05) = 11.07, \chi_5(0.025) = 12.83, \chi_6(0.05) = 12.59, \chi_6(0.025) = 14.45.$