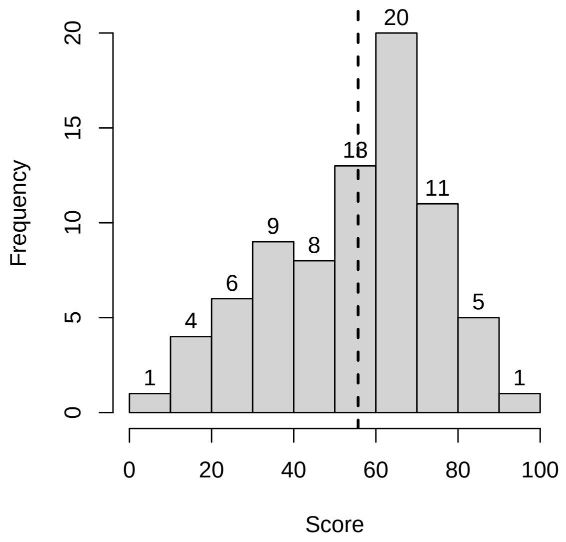
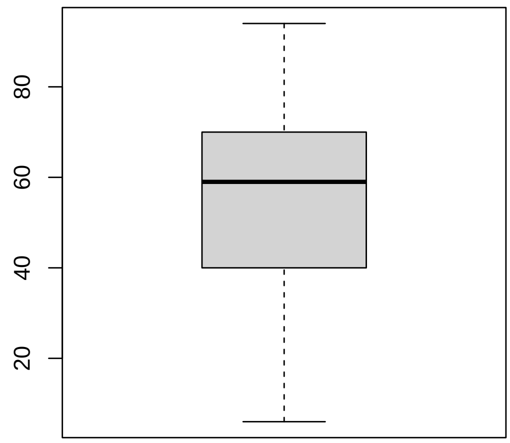
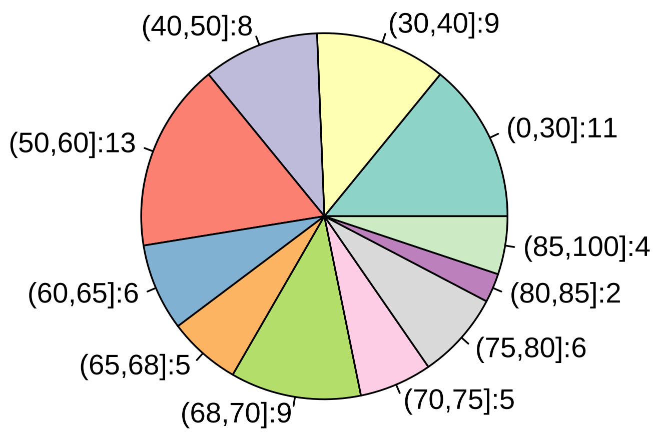
试卷分析

(期中考试, 2024 年 4 月 19 日)

本次试卷考试时间为 2 小时, 满分 100 分, 共参考 78 人, 平均分 55.68, 成绩分布统计如下:



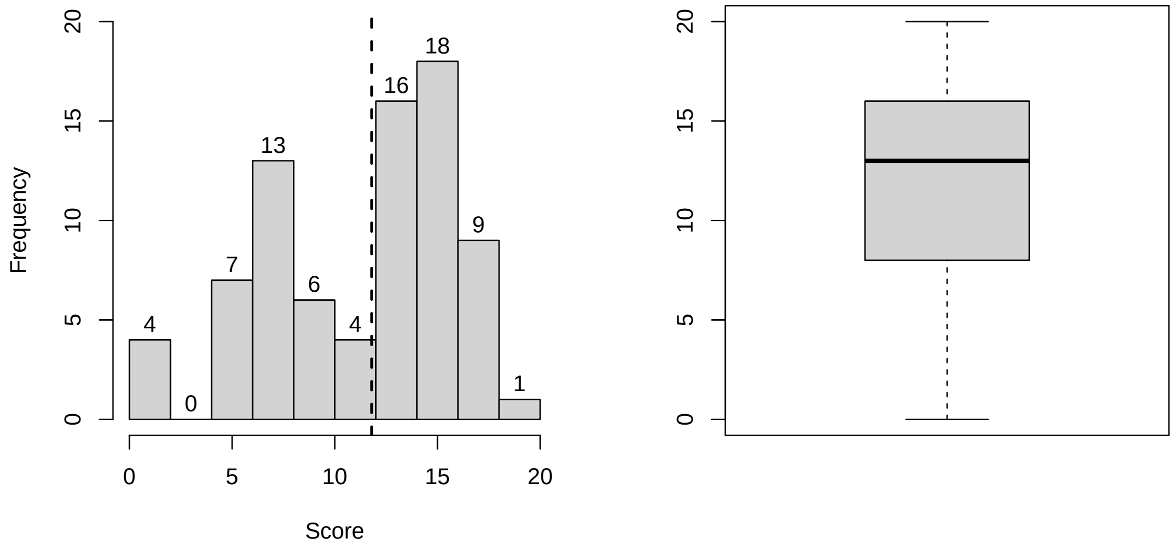




具体到每题的分布与评分标准如下.

一. 离散分布 (20 分)

本题满分 20 分, 成绩的分布统计如下:



具体的评分标准参考如下:

(4 分) 充分统计量:

- 联合密度函数: 2 分;
- 充分性 (利用定义或因子分解定理): 2 分.

(4 分) 不完全性:

- 完全性的定义: 1 分;
- 写出联合密度函数: 1 分;
- 说明充分统计量的不完全性: 2 分.

(5 分) 矩估计:

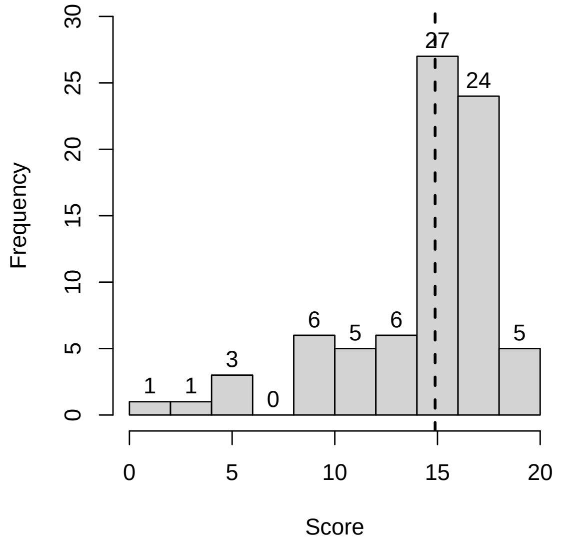
- 求出总体均值: 1 分;
- 求出矩估计: 2 分;
- 说明矩估计是无偏估计: 2 分.

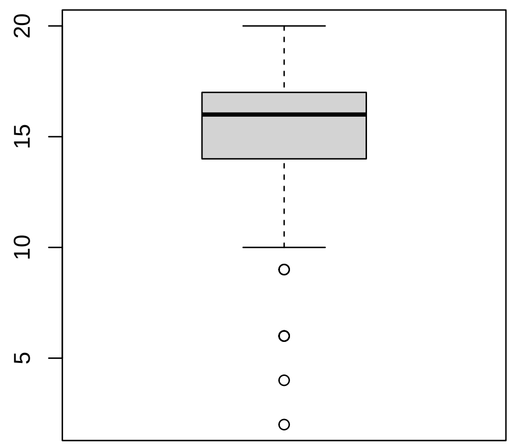
(7 分) 最大似然估计:

- 正确写出似然函数: 2 分;
- 求出最大似然估计: 2 分;
- 说明最大似然估计是无偏估计: 3 分.

二. 正态分布 (20 分)

本题满分 20 分, 成绩的分布统计如下:





具体的评分标准参考如下:

(7 分) 均值的置信区间:

- 取合适的枢轴量并给出其分布: 3 分;
- 写出均值的置信区间: 2 分;
- 代入数值计算区间的实现: 1 分;
- 解释该置信区间的意义: 1 分.

(7 分) 标准差的置信区间:

- 取合适的枢轴量并给出其分布: 3 分;
- 写出标准差的置信区间: 2 分;
- 代入数值计算区间的实现: 1 分;
- 解释该置信区间的意义: 1 分.

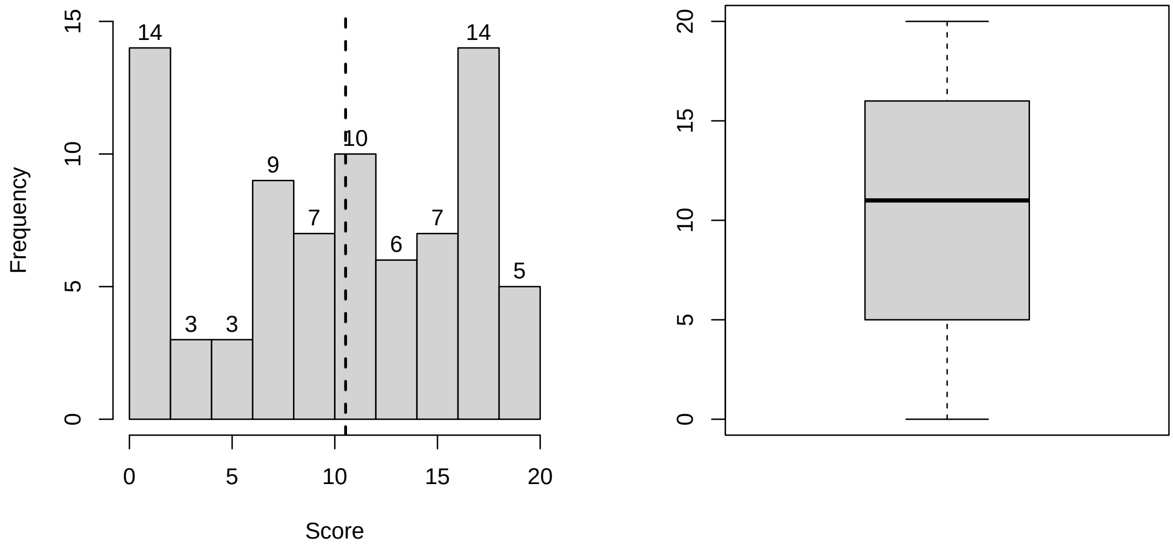
(6 分) 样本规模的计算:

- 求出置信区间长度: 2 分;
- 按照长度要求反解得到样本规模的要求: 2 分;
- 代入数值并给出结论: 2 分.

注: 均值的置信区间应含有 t 分布的分位数, 利用 t 分布与正态分布的性质将分位数转化为正态分布分位数; 在计算样本规模时同理.

三. 泊松分布 (20 分)

本题满分 20 分, 成绩的分布统计如下:



具体的评分标准参考如下:

(9 分) 最大似然估计:

- 似然函数及对数似然函数: 3 分;
- 利用对数似然方程得到 Poisson 分布参数的最大似然估计: 2 分;
- 利用最大似然估计的不变性, 得到 p 的最大似然估计;
  - 计算 $p = \mathsf{P}(X_1 = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$: 1 分;
  - 最大似然估计量 $\hat{p}_2$: 1 分.
- 代入数值计算得到估计值.
  - 样本均值 $\bar{x}$: 1 分;
  - 最大似然估计值 $\hat{p}_2$: 1 分.

(6 分) 最小方差无偏估计:

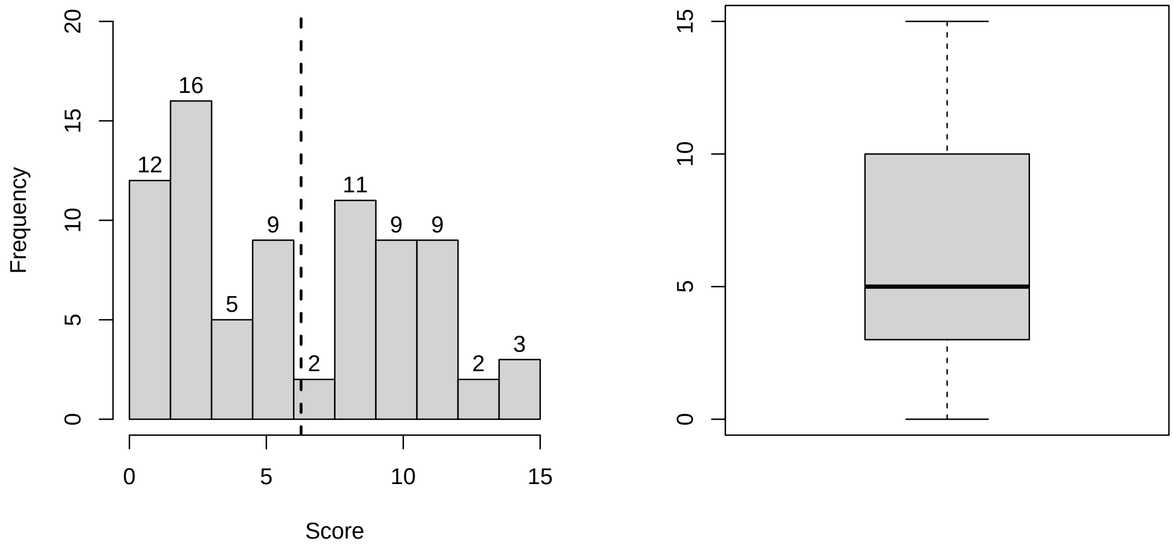
- 寻找充分完全统计量: 2 分;
- 将无偏估计 $I(X_1 = 0)$ 条件化得到估计量 $\hat{p}_1$: 3 分;
- 最小方差无偏估计值: 1 分.

(5 分) 置信上界:

- 构造枢轴量并给出其极限分布: 3 分;
- 据此给出置信上界及其值: 2 分.

四. 正态分布 (15 分)

本题满分 15 分, 成绩的分布统计如下:



具体的评分标准参考如下:

(6 分) 最小方差无偏估计:

- 样本的联合密度函数: 2 分;
- 充分完全统计量: 2 分;
- 最小方差无偏估计: 2 分.

(5 分) Cramér-Rao 下界:

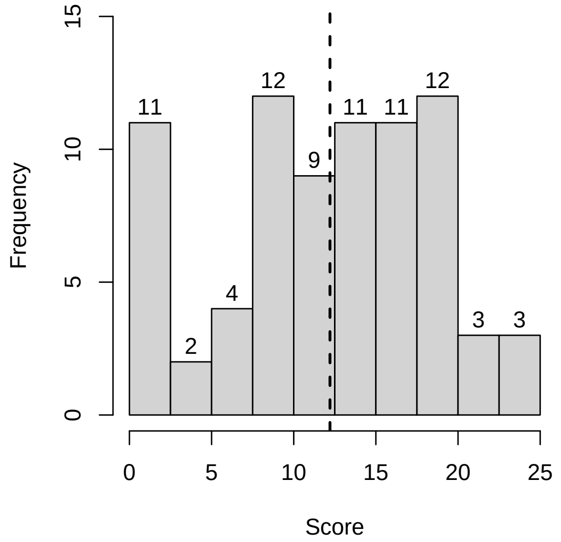
- 用 Cramér-Rao 不等式.
  - 求估计量的方差: 2 分;
  - 计算 Fisher 信息量: 1 分;
  - 求 Cramér-Rao 下界和估计量方差并比较: 2 分.
- 直接用 Cramér-Rao 不等式等号成立条件.
  - 写出样本的密度函数并指出 T 的形式: 2 分;
  - 指明等号成立的条件: 3 分.

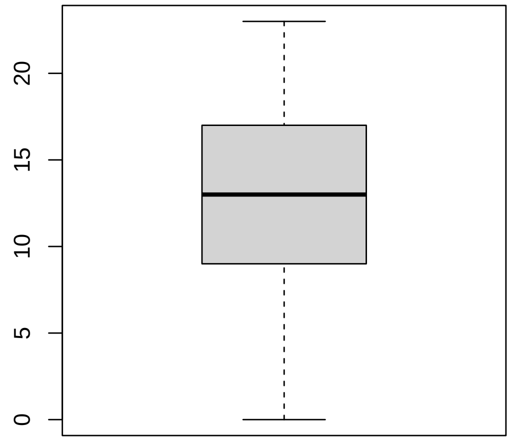
(4 分) 均方误差准则下更优估计:

- 说明何为均方误差准则下最优: 1 分;
- 构造出合理的点估计: 2 分;
- 需要计算点估计的均方误差: 1 分.

五. 指数分布 (25 分)

本题满分 25 分, 成绩的分布统计如下:





具体的评分标准参考如下:

(4 分) 最大似然估计:

- 似然函数: 2 分;
- a 的最大似然估计: 2 分.

(3 分) 相合性:

- 尝试进行弱相合性证明: 1 分.
  - 写出 Chebyshev 不等式表达式.
  - 或写出 $X_{(1)}$ 的分布.
- 完整证明出弱相合性: 2 分.

(3 分) 极限分布:

- (答案一) 说明 $n(X_{(1)} - a)$ 为指数分布: 3 分;
- (答案二) 说明 $X_{(1)}$ 极限分布为退化分布 a: 3 分.

(5 分) 充分性:

- 样本的联合密度函数: 2 分;
- 证明其为充分统计量: 3 分.

(5 分) 不完全性:

- 写出完全性的积分式: 1 分;
- 给出构造出的函数 $\psi(T)$ 必须满足的一些性质 (求导): 2 分;
- 构造出一个不恒为 0 的函数 (不唯一) 说明不完全性 (或者说明其存在性): 2 分.

(5 分) 最小方差无偏估计:

- 使用零无偏估计法: 1 分;
- 具体分析零无偏函数 $\varphi(T)$ 的性质: 2 分;
- 写出需要构造的无偏估计具有的性质 (必须写出积分表达式): 1 分;
- 给出最小方差无偏估计: 1 分.