线性椭圆方程课程大纲

Reference Books

[1] Elliptic Partial Differential Equations of second order, D. Gilbarg, N. Trudinger.
[2] Elliptic Partial Differential Equations, Han Qing, Lin Fanghua, Courant Lecture notes, Vol.1
[3] An Introduction to Elliptic Differential Equations, Han Qing
[4] Regularity Theory for Elliptic PDE, Xavier Fern´andez-Real, Xavier Ros-Oton
[5] 二阶椭圆型微分方程与椭圆型方程组，陈亚浙，吴兰成
[6] 椭圆与抛物型方程引论，伍卓群，尹景学，王春朋

Syllabus

1、
前面两三周我们将主要介绍一下调和函数，或者说是 Laplace 方程。
教学日历第 2 周，我们利用能量方法得到弱解的存在唯一性，介绍了弱解的极值原理和粘性解(viscosity solution)的极值原理。(见参考书 Regularity theory for elliptic pde,P10-19)
接着我们介绍了调和函数的平均值性质，并利用平均值性质得到了强极值原理，Harnack 不等式和梯度估计。参考 Gilbarg-Trudinger 和 Han-Lin 的书。
下一周，我们计划讲调和函数的解析性，之后讲 Green 函数和 Poisson 核。参考 Gilbarg-Trudinger 和 Han-Lin 的书。

2、
教学日历第 3-4 周，我们主要介绍了 Laplace 方程的基本解，Green 表示，Green 函数及其对称性，球内的 Green 函数，Poisson 核和 Poisson 积分公式。由 Poisson 积分公式可以得到平均值性质，弱解的光滑性，以及 Harnack 不等式。参考 G-T 和 H-L 的书。
未来的一周，我们将运用极值原理得到调和函数的梯度估计，对数梯度估计等。参考 H-L 的书 p15-10.
之后我们将介绍 Dirichlet 问题的 Perron 方法。参考 G-T 和 H-L 的书。

3、
教学日历第 5 周，我们运用极值原理得到调和函数的梯度估计，对数梯度估计和 Hopf 引理。我们还介绍 Dirichlet 问题的 Perron 方法，利用下调和函数我们可以得到一个调和函数，其在区域的边界上满足边界条件。
下一周我们将学习一些关于 Holder 正则性的内容。参考 Regularity Theory for Elliptic PDE, p26-31。

4、
教学日历第 6 周，我们开始学习关于 H\"{o}lder 正则性的一些内容。首先介绍了一个基本的 philosophy，即从 Harnack 不等式推导震荡衰减，再推出 H\"{o}lder 正则性，参考 Regularity

Theory for Elliptic PDE p26-31。之后我们给了线性椭圆方程的一个 f 连续但没有 C2 解的例子, 其中用到了一个调和函数的奇点可去定理, 见 Han 书中 Theorem 1.2.11 和 Example 2.1.4。
下一周我们讲完 H\"{o}lder 空间中的插值不等式，见 Han 书 Lemma 4.1.2。然后开始介绍 Schauder 估计，参考 Regularity Theory for Elliptic PDE p34-40。

5、
教学日历第 7 周，我们讲了 H\"{o}lder 空间中的插值不等式，见 Han 书 Lemma 4.1.2。然后讲了 Laplace 算子的 Schauder 内估计估计，参考 Regularity Theory for Elliptic PDE p34-40。接着我们将用凝固系数法给出一般非散度型线性椭圆方程的 Schauder 估计，参考 G-T 和 Han。一般区域上的内估计和边界估计我们讲述了大体思路，具体细节可参考 G-T。
下一周我们将介绍散度型方程的 Schauder 估计（C^1,alpha 估计），参考 Regularity Theory for Elliptic PDE p55-61。之后我们会再介绍一些相关的存在性和正则性定理，参考 G-T 和 Han。

6、
教学日历第 8 周，我们完成了非散度型 Schauder 估计，参考 Han。接着用爆破分析证明了散度型 Schauder 估计(C^1,alpha 估计)，参考 Regularity Theory for Elliptic PDE p55-61。
接下来的一周, 我们讲 Schauder 估计在解的存在性和正则性方面的应用, 参考 G-T 书上 6.3 节和 6.4 节。

7、
教学日历第 9 周，我们学习了连续性方法以及线性椭圆方程的几个存在性定理(c 小于等于 0，Fredholm 二择一，用逼近的办法减弱 phi 的条件)，参考 G-T 书 6.3 节和《椭圆与抛物型方程引论》p192。之后证明了两个正则性定理，参考 G-T 的 6.4 节。
下一周我们学习移动平面法(moving plane method)，然后介绍几个先验估计。参考 H-L 书 2.2 节和 2.6 节，以及 2.3 节和 2.4 节。

8、
教学日历第 10 周，我们回顾了极值原理，特别强调了两个 c 没有符号限制的情形，即窄区域和 u 非正的情况，由这些我们可以利用移动平面法来对方程的解作刻画，参考 H-L 书 2.2 节和 2.6 节。之后我们介绍了 Neumann 边值问题的最大模估计，参考 H-L 书 2.3 节。
接下来我们介绍梯度估计以及 Alexandroff 极值原理，参考 H-L 书 2.4 和 2.5 节。

9、
教学日历第 11 周和 12 周，我们学习了一般线性椭圆方程的梯度估计，参考 H-L 书 2.4 节。之后我们学习了 Alexandroff 极值原理参考 H-L 书 2.5 节和陈-吴的书。 之后，我们先介绍了 Marcinkiewicz 内插定理和 Caldron-Zygmund 分解, 然后将这些工具应用于 Newton 位势来得到 Poisson 方程的 W^{2,p}估计，参考 G-T 和陈-吴。
下一周, 我们介绍一般线性椭圆方程的 Lp 理论, 参考 G-T 和陈-吴。然后开始介绍 De Giorgi-Nash-Moser 迭代，参考 H-L 书第 4 章。

10、
教学日历 13 和 14 周，类似于 Schauder 理论，我们利用凝固系数法证明了一般线性椭圆方程的 W^{2,p}估计。之后，我们可以得到 c 小于等于 0 时方程的解的唯一性和存在性，这里

用到了 Alexandroff 极值原理，参考陈-吴。然后，我们用 De Giorgi 的方法证明散度型方程的弱解的局部有界性。 之后，我们利用 Moser 的方法给出局部有界性的另一个证明。并将不等式右边的解的 L^2 范数推广到一般的 L^p 范数。参考 H-L 书 4.2 节。
后面，我们将介绍弱 Harnack 不等式，其中将用到 John-Nirenberg 不等式。利用弱 Harnack 不等式和局部有界性，我们得到 Moser 的 Harnack 不等式，由此可以得到弱解的 H\"{o}lder 连续性。参考 H-L 书 4.4 节。之后，我们将介绍非散度型方程的 Krylov-Safonov 理论，参考 Han 书第 5 章和陈-吴。

Remark: 现在椭圆方程的 Schauder 理论已形成了多种证明。高老师上课，先按照[4]证明 Schauder 先验估计，再通过[1][6]上的连续性方法推得存在性定理。

线性椭圆方程作业 1

布置时间：2020/9/28

交作业时间：2020/10/10 上课前

习题 1. 证明：对任何 C^2 函数 w，我们有

$$\Delta w(x) = \lim_{r\to 0} \frac{c_n}{r^2} \fint_{B_r(x)} (w(y) - w(x))dy,$$

这里 c_n 为某个常数。

习题 2. 证明：假设 $u \in C(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega u\Delta\varphi = 0 \quad 对任意 \quad \varphi \in C_0^2(\Omega), \tag{1}$$

那么 u 是 Ω 中的调和函数（古典意义下，非弱导数意义）。

线性椭圆方程作业 2

布置时间：2020/10/16

交作业时间：2020/10/29 上课前

习题 1. 证明：设 u 为单位球 B_1 中的非负调和函数，那么

$$\sup_{B_\rho} u \leq \frac{C}{(1-\rho)^n} \inf_{B_\rho} u,$$

其中 $\rho \in (0,1)$，C 只依赖于 n。

习题 2. 证明：假设

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x)} u \leq C_0 r^\alpha, \quad \forall B_r(x) \subset \overline{B}_1,$$

这里 $\mathrm{osc} u := \sup u - \inf u$。那么，$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)} \leq CC_0$，其中 C 只依赖于 n 和 α。

习题 3. 证明：假设

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x)} u \leq C_0 r^\alpha, \quad \forall B_{2r}(x) \subset \overline{B}_1.$$

那么，$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{B}_1)} \leq CC_0$，其中 C 只依赖于 n 和 α。

线性椭圆方程作业 3

布置时间：2020/10/30

交作业时间：2020/11/12 上课前

习题 1. 证明：设 $u \in C^{2,\alpha}(B_1^+)$ 满足方程 $\Delta u = f$，且 $u = 0$ on $\{x_n = 0\}$，其中 $B_1^+ = B_1 \cap \{x_n \geq 0\}$，$\alpha \in (0,1)$，$f \in C^{0,\alpha}(B_1^+)$。那么，

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2}^+)} \leq C(n,\alpha)(\|u\|_{L^\infty(B_1^+)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_1^+)}).$$

线性椭圆方程作业 4

布置时间：2020/11/13

交作业时间：2020/11/26 上课前

习题 1. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域，$f \in L^\infty(\Omega)$，我们定义 *Newton* 位势如下：

$$w(x) := \int_\Omega \Gamma(|x-y|)f(y)dy,$$

其中 Γ 为 *Lapalace* 算子的基本解。求证：

(i) $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$。

(ii) 若 f 是局部 *Hölder* 连续的，$\Omega = B_1$ 为单位球，则 $w \in C^2(B_1)$ 且 $\Delta w = f$。

习题 2. 定义反演变换 $T(x) := \frac{x}{|x|^2}$，其中 $x \in \mathbb{R}^n$。定义球面 $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (x_n - R)^2 = R^2\}$。求证：

(i) $T(\Sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = \frac{1}{2R}\}$。

(ii) 定义函数 u 的 *Kelvin* 变换 $v(x) = |x|^{2-n}u(Tx)$。如果 $\Delta u = f$，验证

$$\Delta v(x) = |x|^{-n-2}f(Tx).$$

(在 G-T 书中 Theorem 4.13 可以看到 Kelvin 变换的应用。)

线性椭圆方程作业 5

布置时间：2020/12/4

交作业时间：2020/12/17 上课前

习题 1. 设 $\mu \in (0,1]$，我们定义 *Riesz* 位势如下：

$$(V_\mu f)(x) := \int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)} f(y)dy.$$

求证：$V_\mu : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ 是有界算子，其中 $0 \le \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \mu$，$1 \le q \le \infty$。若记 $\delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$，对任意 $f \in L^p(\Omega)$，我们有

$$\|V_\mu f\|_{L^q(\Omega)} \le \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

这里 ω_n 为单位球的体积。

习题 2. 设 $u \in H^1(\Omega)$ 为方程

$$-\partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) + c(x)u = f(x) \tag{1}$$

的弱解，即满足如下关系：

$$\int_\Omega (a_{ij}\partial_i u \partial_i \varphi + cu\varphi) = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

说明使上式积分有意义的最弱的条件为 $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$，$c \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$，$f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$。

线性椭圆方程作业 6

布置时间：2020/12/18

交作业时间：2020/12/31 上课前

习题 1. 请分别用 *De Girogi* 和 *Moser* 的方法证明以下结论。
设 $u \in H^1(B_1)$ 是方程 $\partial_j(a_{ij}\partial_i u) = 0$ 的弱解，其中 $a_{ij} \in L^\infty(B_1)$ 满足

$$\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in B_1,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

那么，

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u^+ \le C(n, \lambda, \Lambda)\|u^+\|_{L^2(B_1)}.$$