函数项级数的一致收敛

定义 1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在 E 上的函数项级数, $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. 如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $S(x)$, 那么就称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛于 $S(x)$.

定理 1 (**函数项级数一致收敛的 Cauchy 准则**) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛的充分必要条件是: 对任给的正数 ε, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, 对任何正整数 p 和 $x\in E$ 都有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

推论 1 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛, 则 $\{u_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 0.

例 1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,1)$ 上是否一致收敛?

解 因为

$$\sup_{x\in(0,1)} |ne^{-nx}| \geqslant ne^{-1} \not\to 0,$$

所以通项在 $(0,1)$ 上不一致收敛于 0, 因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

例 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e^{-nx}$ 在 $(0,1)$ 上是否一致收敛?

解 因为当 $p > n$ 时,

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x} + \frac{1}{n+2}e^{-(n+2)x} + \cdots + \frac{1}{n+p}e^{-(n+p)x}\right| \\ \geqslant& \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \\ >& \frac{p}{n+p} > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e^{-nx}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

定理 2 (Weierstrass) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；又在 E 上恒有

$$|u_n(x)| \leqslant a_n,$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

证明 利用条件和 Cauchy 准则, 即可.

例 3 若 $\alpha > 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

证明 因为

$$\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 在 $\alpha > 1$ 时收敛, 所以原级数一致收敛.

定义 2 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的函数列. 若存在 $M > 0$ 使得

$$|f_n(x)| \leqslant M$$

对一切 $n \in \mathbb{N}$ 及一切 $x \in E$ 成立, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致有界. 若对每个 $x \in E$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 有界, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上逐点有界.

例 4 讨论函数列 $\{nx^n\}$ 在 $(0,1)$ 上的有界性.

解 对每个 $x \in (0,1)$ 数列 $\{nx^n\}$ 收敛于 0. 因此, 该函数列逐点有界.

若该函数列一致有界, 则存在 $M > 0$ 使得

$$|nx^n| \leqslant M$$

对对一切 $n \in \mathbb{N}$ 及一切 $x \in (0,1)$ 成立. 特别有

$$\sqrt{n} = n\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{n}}\right)^n \leqslant M$$

对一切 n 成立. 这不可能. 因此该函数列在 $(0,1)$ 上不是一致有界的.

定理 3 (Dirichlet) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 是定义在 E 上的函数项级数. 若

1° $\{b_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 0, 且对每个固定的 x, 是单调递减的;

2° $A_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ 在 E 上一致有界,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

证明 设 $|A_n(x)| \leqslant M$, 对一切 x 及 n 成立, 则

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| = |A_{n+p}(x)-A_n(x)| \leqslant 2M.$$

由 Abel 引理, 得 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2M(|b_{n+1}(x)|+2|b_{n+p}(x)|)$. 由第一个条件知, 对任意 $\varepsilon>0$, $\exists N$ 使得当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in E$, 有 $|b_n(x)|<\frac{\varepsilon}{8M}$. 所以当 $n>N$ 时, $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| < \varepsilon$ 对一切 $x\in E$ 及 $p\in\mathbb{N}$ 成立. 根据 Cauchy 准则, 结论得以证明.

|◄ ►| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

例 5 设 $\{a_n\}$ 单调减趋于 0, $\delta \in (0, \pi)$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致收敛.

证明 因为

$$A_k(x) = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos kx$$
$$= \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

所以

$$|A_k(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

这说明 $\{A_n(x)\}$ 在所给区间上一致有界. 又 $\{a_n\}$ 显然单调减一致趋于 0. 所以根据 Dirichlet 判别法可知原级数在定义的区间上是一致收敛的.

定理 4 (Abel) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 是定义在 E 上的函数项级数. 若

1° $\{b_n(x)\}$ 在 E 上一致有界, 且对每个固定的 x, 是单调的;

2° $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ 在 E 上一致收敛,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

证明 设 $|b_n(x)| \leqslant M$. 由条件 2°, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 对一切 x 及 p 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

根据 Abel 引理, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}(|b_{n+1}(x)| + 2|b_{n+p}(x)|) < \varepsilon$$

对一切 x 及 p 成立. 于是根据 Cauchy 准则, 结论得以证明.

例 6 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 关于 x 一致收敛 (它与 x 根本毫无关系), 而函数列 $\{\frac{1}{n^x}\}$ 对固定的 $x \geqslant 0$ 单调递减, 而且 $|\frac{1}{n^x}| \leqslant 1$ 关于 x 一致有界. 所以根据 Abel 判别法可知原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

7.2.3 一致收敛级数的性质

定理 5 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 E 上一致收敛于 $S(x)$, 且求和项 $u_n(x)$ 在区间 E 上连续, 则 $S(x)$ 也在 E 上也连续.

定理 6 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项都在在区间 E 上连续, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$, 那么 $f(x)$ 也在 E 上连续.

证明 任取 $x_0 \in E$, 只要证明 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 即可. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛性可知, 存在 N, 使对任何 $x \in E$ 都有 $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. 再由 $f_N(x)$ 在 x_0 连续性可知, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$. 所以, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ &\quad + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

定理 7 (Dini **定理**) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且在 $[a,b]$ 上收敛于连续函数 $f(x)$. 如果对每个固定的 x, 数列 $\{f_n(x)\}$ 是递减的, 那么函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 不妨设 $f(x)=0$, 不然考虑 $g_n(x)=f_n(x)-f(x)$. 用反证法证明. 若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上不一致收敛于 0, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $x_n\in[a,b]$ 满足

$$f_n(x_n)\geqslant\varepsilon_0.$$

因为 $\{x_n\}$ 是有界的, 所以存在收敛子列. 不妨设 $\{x_n\}$ 本身收敛. 设 $x_n\to y\in[a,b]$. 因此对一切 $n,p\in\mathbb{N}$ 有

$$\varepsilon_0\leqslant f_{n+p}(x_{n+p}).$$

由 $\{f_n(x)\}$ 的递减性, 得

$$\varepsilon_0\leqslant f_n(x_{n+p}).$$

因为 $f_n(x)$ 是连续的, 在上式中令 $p \to \infty$ 得

$$\varepsilon_0 \leqslant f_n(y).$$

再令 $n \to \infty$ 得 $\varepsilon_0 \leqslant 0$. 矛盾!

定理 8 (Dini **定理**) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的通项在有限闭区间 $[a, b]$ 上连续且非负. 如果该级数在 $[a, b]$ 上收敛于连续函数 $S(x)$, 那么该级数在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

注意, Dini 定理中的区间 $[a, b]$ 不能换成开区间 (a, b), 也不能换成无穷区间.

例 7 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(0, 1)$ 上不一致收敛.

例 8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}x,\ x \in [0, +\infty)$ 不一致收敛.

例 9 函数列 $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ 在 $(0, 1)$ 上递减趋于 0, 但不一致收敛.