9.1.2 多变量函数

函数就是量与量之间的一种关系 (或一种对应). 可以将函数看成是映射.

1° 映射 设有两个非空的集合 X, Y, 及一个规则 f. 若任意给定 X 中一个元素 x, 都可以按照规则 f, 找到 Y 中唯一确定的元素 y (记成 $y = f(x)$) 与 x 对应, 则称 f 是 X 到 Y 的一个映射, 记成

$$f: X \to Y.$$

y 称为是 x 在 f 下的像, x 称为 y 的原像. 记

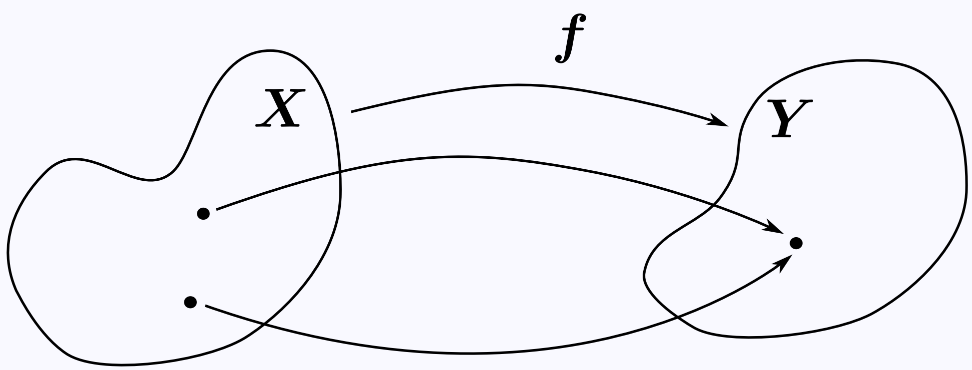
$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

称为 X 的像集. 显然, $f(X) \subset Y$.

如果映射是一个单射, 即, 一个像只有一个原像, 那么可以定义一个从 $f(X)$ 到 X 的映射:

$$f^{-1}: f(X) \to X.$$

它的映射规则 f^{-1} 是: 任给 $y \in f(X)$, 必有唯一 $x \in X$ 使 $y = f(x)$. 这个 x 就是 y 在 f^{-1} 下的象. 即是说如果 $y = f(x)$, 则 $x = f^{-1}(y)$. 这时称 f 为可逆映射, f^{-1} 称为 f 的逆映射. 它相当于一元函数的反函数.



2° **多元函数** 设 $D \subset \mathbb{R}^n$. 则从 D 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射 $f: D \to \mathbb{R}$ 称为一个 n 元函数. 因为 $\mathbb{R}^n$ 中的点有坐标 $(x_1, x_2, \cdots x_n)$, 所以可以写成 $z = f(x_1, \cdots, x_n)$. 因为 $\mathbb{R}^n$ 的点对应一个 n 维向量 $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, 所以多元函数是向量到数量的一个映射 (对应关系), 这里 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的坐标向量.

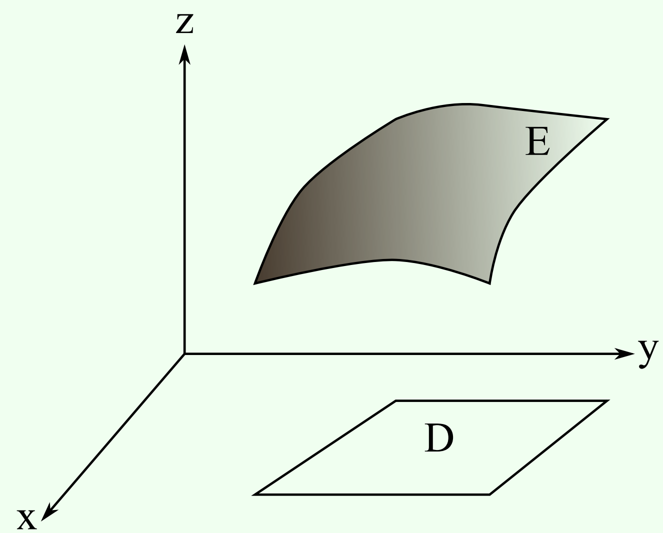
特别, 当 $n = 2$ 时, 就是二元函数

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

把 z 所在的数轴的原点与 (x, y) 平面 $\mathbb{R}^2$ 的原点放在一起, 并垂直于平面, 这样我们就有了一个三维空间, 而点集

$$E = \{(x, y, f(x, y)) |\ (x, y) \in D\}$$

就是一张空间曲面. 这张曲面也可看成有三个自由度的三维空间中的点 (x, y, z) 受到一个约束 $z = f(x, y)$ 所形成的.



3° 向量值函数

向量值函数是一个从 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 到 m 维空间 $\mathbb{R}^m$ 的映射

$$\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

即

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n \longmapsto \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_m\vec{e}_m$$

或者记为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto (y_1, y_2, \cdots, y_m),$$

这里

$$y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n),$$
$$\cdots$$
$$y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n)$$

都是 n 元函数, y_i 称为向量值函数的第 i 个分量函数. 当 $m = n$ 时, 向量值函数也可称为变换.

如果分量函数都是齐次线性的, 即,

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{aligned}$$

其中 a_{ij} 都是常数, 则映射是线性的,

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

就是线性映射的矩阵. 记 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$, (这里 T 表示转置), 则线性映射可以简单表为

$$y = Ax.$$

9.1.3 多变量函数的极限

设 $z = f(x, y)$ 是定义在平面点集 D 上的二元函数, $M_0 = (x_0, y_0)$ 是 D 的聚点, 如果存在实数 a, 使得对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, 且 $M = (x, y) \in D$ 时, 有

$$|f(M) - a| < \varepsilon,$$

就说当 M 趋于 M_0 时 $f(M)$ 以 a 为极限, 记成

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = a.$$

也可以写成

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = a.$$

这就是二元函数极限的定义. 从中看出, 只是把一元函数极限定义中的绝对值(直线上点的距离)换成平面上点的距离即可. 一般 n 元函数的极限的定义是类似的.

二元函数极限也可以称为二重极限. 如果用“增量”的语言 (即设 Δx, Δy 是两个增量), 则函数在 $M_0=(x_0,y_0)$ 极限就是

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=a$$

因为 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 满足

$$|\Delta x|,\ |\Delta y|\leqslant \rho\leqslant |\Delta x|+|\Delta y|$$

所以, 极限也可以表示成

$$\lim_{\rho\to 0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=a.$$

虽然二元函数的极限的定义在形式上与一元函数一样, 但是因为维数增加了, 二元函数的极限讨论起来要复杂一些. 例如, 不大好讨论二元函数的单调性 (因为平面中的点没有“序”) 以及函数的左右极限问题. 还有在二元函数的极限过程中, 两个自变量的变化方式具有更大的自由度, 它们在 M_0 的附近可以用任意方式 (直线的、螺旋的、曲线的等等) 去接近 M_0.

例 1 求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} = 0$.

证明 利用不等式

$$|2x^2y| \leqslant x^4 + y^2$$

可得

$$0 \leqslant \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} \leqslant \frac{1}{2}|y|,$$

所以, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = 2\varepsilon$, 当 $0 < |x| < \delta$, $0 < |y| < \delta$ 时, 有 $\left|\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\right| < \frac{1}{2}\delta < \varepsilon$. 根据极限的定义知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} = 0.$$

例 2 求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

证明 取 $y = kx^2$ ((x, y) 平面中的抛物线), 则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k^2},$$

即当 (x, y) 沿着不同的抛物线趋向 $(0, 0)$ 时, 函数有不同的极限, 所以极限不存在. 但是

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2}\right) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2}\right) = 0.$$

这种先取一个极限, 再取另一个极限的做法叫累次极限. 极限和累次极限是两个不同的概念, 它们的存在性没有必然的蕴含关系, 但是当极限和累次极限都存在时, 它们必然相等.

无穷小函数的阶

如果当 $x \to x_0$, $y \to y_0$ 时, 函数 $f(x,y)$ 的极限值是零, 则称函数 $f(x,y)$ 是当 $x \to x_0$, $y \to y_0$ 时的无穷小量. 此时, 如果对于充分小的 $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, 有

$$\left|\frac{f(x,y)}{\rho}\right| \leqslant C$$

则称 $f(x,y)$ 当 $x \to x_0$, $y \to y_0$ (等价于 $\rho \to 0$) 时与 ρ 至少有相同的阶, 记为 $f(x,y) = O(\rho)$. 如果

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)}{\rho^k} = C\text{ (非零常数)}$$

则称 $f(x,y)$ 当 $\rho \to 0$ 时是与 ρ^k 同阶的无穷小量, 特别当 $C = 1$ 时, 记为 $f(x,y) \sim \rho^k$. 如果极限是零, 则说 $f(x,y)$ 当 $\rho \to 0$ 时是比 ρ^k 更高阶的无穷小量, 记为 $f(x,y) = o(\rho^k)$. 同样, 我们可以讨论两个极限为零的函数之间的比较, 这些概念与一元函数时类似, 不再赘述.

9.1.4 多变量函数的连续性

与单变量的连续性一样, 设 f 在平面点集 D 有定义, $M_0 = (x_0, y_0) \in D$. 如果

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

则称 f 在 M_0 连续. 用 “增量” 的语言叙述, 就是

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0).$$

如果 f 在 D 的每一个点连续, 就称 f 在 D 连续.

设函数 f 在区域 D 上定义. 如果对任意正数 ε, 都存在正数 δ 使得对于 D 中的 M_1 和 M_2, 只要 $\rho(M_1, M_2) < \delta$, 就有

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon,$$

那么就称函数 $f(x, y)$ 在 D 上一致连续.

二元函数的不连续点的情况, 要比一元函数复杂得多. 例如下列函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的不连续点的全体是一条直线: $x=0$. 即使一个函数 $f(x,y)$ 可能对每一个固定的 y 值, 关于 x 是连续的, 对每一个固定的 x 值, 关于 y 连续, 但作为二元函数仍然是不连续的. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

这个函数对固定的 $y\neq 0$, 显然对 x 连续, 对 $y=0$, $f(x,0)=0$, 所以对 x 也是连续的. 同理, 这个函数对固定的 x, 是关于 y 连续的. 但是, 函数在直线 $x=y$ 上, 除原点 $(0,0)$ 之外有 $f(x,x)=1$. 也就是说当 (x,y) 沿着这条直线接近原点时, 函数是不连续的. 所以函数 $f(x,y)$ 在原点不连续.

多元连续函数也有如下类似一元函数的性质:

1° 多元连续函数的和、差、积、商 (分母不为零时) 也还是连续函数. 连续的复合函数在其定义域内也是连续函数.

2° 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个开区间. 如果 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, 则 $f^{-1}(I)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集. (即, 开集的原像是开集.)

3° (介值定理) 设 $f(M)$ 在连通集 E 中连续, $M_1, M_2 \in E$. 则 f 在 E 中取到 $f(M_1)$ 和 $f(M_2)$ 之间的所有值.

4° 有界闭集上的连续函数可以取到最大值和最小值.

5° 有界闭集上的连续函数, 一定是一致连续的.

以下证明性质 **2°**

性质 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个开区间. 如果 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, 则 $f^{-1}(I)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集.

证明 只需证明 $f^{-1}(I)$ 中每个点都是内点. 任取 $P_0 \in f^{-1}(I)$, 则有 $z_0 = f(P_0) \in I$. 因为 I 是开区间, 所以可取 $\varepsilon > 0$ 使

$$(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon) \subset I.$$

根据 f 的连续性, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|P - P_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon,$$

即

$$f(P) \in (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon) \subset I.$$

因此有 $P \in f^{-1}(I)$. 这说明

$$B(P_0, \delta) \subset f^{-1}(I).$$

于是 P_0 是 $f^{-1}(I)$ 的内点.

例 3 研究函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x-y}, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$ 的连续性.

解 当 $x_0\neq y_0$ 时, $f(x,y)$ 显然在 (x_0,y_0) 连续. 当 $x_0=y_0\neq 0$ 时, 对任意 $t>0$ 有

$$|f(x_0+2t,y_0+t)|=\left|\frac{x_0^2+3tx_0+2t^2}{t}\right|\to+\infty\ (t\to 0^+).$$

当 $x_0=y_0=0$ 时, 对于实数 $k\neq 0$ 有

$$f(t+kt^2,t)=\frac{t^2+kt^3}{kt^2}\to\frac{1}{k}\ (t\to 0^+).$$

总之, 当 $x_0=y_0$ 时, 存在趋于 (x_0,y_0) 的点 (x,y), 使 $f(x,y)$ 不趋于 $f(x_0,y_0)$. 因此, $f(x,y)$ 在 $x\neq y$ 时连续, 在 $x=y$ 时不连续.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出