中国科学技术大学

2023 ～ 2024 学年第 2 学期期终考试试卷

■A卷　　□B卷

课程名称 数学分析B2　　课程编号 MATH1007

考试时间 2024年7月5日　　考试形式 闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 42 分)

(1) 设$f(x) = 1 - \dfrac{x}{\pi}$ $(0 \le x \le \pi)$的余弦级数的和函数为$S(x)$,求S(-3),S(12).

解 将作偶性延拓, 即

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{\pi}, & 0 \le x \le \pi, \\ 1 + \dfrac{x}{\pi}, & -\pi \le x \le 0. \end{cases}$$

由周期性知,$S(12) = S(12 - 4\pi)$,注意到$12 - 4\pi \in (-\pi, 0)$,所以$S(12) = \dfrac{12 - 3\pi}{\pi}$. 另外$S(-3) = s(3) = \dfrac{\pi - 3}{\pi}$.

(2) 计算曲线积分$I = \displaystyle\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, $L: x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le \pi$.

解$I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{y(t)}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\pi$.

(3) 计算曲面积分$I = \displaystyle\iint_S z\,\mathrm{d}S$,这里$S$是螺旋面: $\mathbf{r} = (u\cos v, u\sin v, v)$,其中$0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$.

解直接计算: $\mathbf{r}'_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\mathbf{r}'_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$, 所以

$$E = ||\mathbf{r}'_u||^2 = 1, \quad F = (\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v) = 0, \quad G = ||\mathbf{r}'_u||^2 = u^2 + 1.$$

所以$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + 1}$. 从而$I = \displaystyle\iint\limits_{\substack{0\le u\le 1\\ 0\le v\le 2\pi}} v\sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \pi^2\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$.

(4) 计算$\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (x+1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+2)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Omega$为上半球面$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,方向取上侧.

解 取Ω_1: $z=0, x^2+y^2\le R^2$,方向向下.V为由和所围成的立体区域,则

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega}(x+1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+2)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega+\Omega_1}(x+1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+2)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&-\iint\limits_{\Omega_1}(x+1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+2)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint\limits_{V}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}(0+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^3+3\pi R^2.
\end{aligned}
$$

(5) 计算$\oint\limits_{L} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$,其中是$x^2+y^2+z^2=9$与$x+z=0$的交线,从$z$轴正向往负向看$L$为逆时针方向.

解 L是一个圆,将L视为平面$x+z=0$上的曲线, 取该平面与z轴同侧的法向量.

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{L} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z\ &=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}=-\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_{D_{xy}}(-z'_x-z'_y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-9\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}
$$

显然最后一步的D_{xy}是椭圆: $2x^2+y^2=9$.

(6) 设$f(x)$可微且具有连续导数$F(x)=\displaystyle\int_0^x\left[\int_0^t uf(u^2+t^2)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$, 求$F''(x)$.

解 显然$F'(x)=\displaystyle\int_0^x uf(u^2+x^2)\,\mathrm{d}u$, 从而

$$
\begin{aligned}
F''(x)\ &=xf(2x^2)+\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}\left(uf(u^2+x^2)\right)\mathrm{d}u=xf(2x^2)+\int_0^x 2xuf'(u^2+x^2)\,\mathrm{d}u\\
&=xf(2x^2)+x\int_0^x f'(u^2+x^2)\,\mathrm{d}(u^2+x^2)\\
&=xf(2x^2)+x\int_{x^2}^{2x^2} f'(t)\,\mathrm{d}t=2xf(2x^2)-xf(x^2).
\end{aligned}
$$

(7) 计算积分$I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解 令$t=x^4$,则

$$
I=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac14-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac14 B\left(\frac14,\frac34\right)=\Gamma\left(\frac14\right)\Gamma\left(1-\frac14\right)=\frac14\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
$$

二、(12 分) 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\pi-1)x, & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{2}(\pi-x), & 1<x\le\pi.\end{cases}$ 试将函数$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上展开成正弦级数并指出其收敛性,并由此证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^4}=\dfrac{(\pi-1)^2}{6}$.

解 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}\sin nx,\ |x|\le\pi$. (6分)

由Parseval等式,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{(\pi-1)^2}{6}.$$

(6分)

三、 (8 分)证明向量场$v=\left(x^2,yz,\dfrac{y^2}{2}\right)$是全空间的有势场,并求其势函数.

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z}=0=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=y=\frac{\partial R}{\partial y},$$

所以v是保守场. (4分)

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}x^2\mathrm{d}x+yz\,\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=\frac{x^3}{3}+\frac{y^2z}{2}+C.$$

(4分)

四、(12 分)设广义积分为$\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\mathrm{d}x,\quad (p>0)$, 请指出并证明该广义积分绝对收敛和条件收敛时参数p的取值范围.

解 1. 当$p>1$时,

由于$\left|\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right|\le\dfrac{3e}{x^p}$,由比较判别法知,此时广义积分绝对收敛. (6分)

2. 当$0\le p\le 1$时,

(1) 对任意$A>1$, $\left|\int_1^A e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x\right|=\left|e^{\sin x}\Big|_1^A\right|=\left|e^{\sin A}-e^{\sin 1}\right|<2e$,有界.

当$x\to+\infty$时,$\dfrac{1}{x^p}$单调递减趋于0. 由Dirichlet判别法可知$\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛.

熟知$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$在$[1,+\infty)$上单调有界, 由Abel判别法知,$\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\mathrm{d}x$收敛.

(2) $\left|\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right|>\dfrac{2\cos^2 x}{ex^p}=\dfrac{1}{ex^p}+\dfrac{\cos 2x}{ex^p}$. 此时, $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$发散; 而由Dirichlet判别法知,$\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛. 所以当$0\le p\le 1$时， $\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right|\mathrm{d}x$发散.

所以,当$0\le p\le 1$时,广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\mathrm{d}x$条件收敛. (6分)

五、(10分) 计算$I=\oint_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$,其中为单位圆$x^2+y^2=1$,取逆时针方向.

解 令$P=\frac{x-y}{x^2+4y^2}, Q=\frac{x+y}{x^2+4y^2}$. 则当$x^2+y^2\neq 0$时,有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4y^2-x^2-8xy}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

(4分)

作L所围区域内部的椭圆$L_1: x^2+4y^2=\varepsilon^2$ ($\varepsilon>0$充分小,顺时针方向),记L和L_1所围成的区域为D,由Green公式得

$$\oint_{L+L_1}\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(3分)

又因为

$$\begin{aligned}\oint_{L_1}\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2} &= \frac{1}{\epsilon^2}\oint_{L_1}(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{1}{\epsilon^2}\iint_{x^2+4y^2\le\epsilon^2}\left[\frac{\partial(x+4y)}{\partial x}-\frac{\partial(x-y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= -\frac{2}{\epsilon^2}\iint_{x^2+4y^2\le\epsilon^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi,\end{aligned}$$

所以$\oint_L\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\left(\oint_{L+L_1}-\oint_{L_1}\right)\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\pi.$ (3分)

六、(8分) 设$P(x,y,z)$和$R(x,y,z)$是三维空间上有连续偏导数,记上半球面$S: z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$,且方向向上.若对任意点$(x_0,y_0,z_0)$和$r>0$,第二型曲面积分$\iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 求证: $\frac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$.

证 记$S_1=\{(x,y,z_0)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\}$,取下侧,则$S+S_1$构成一封闭曲面的外侧.由题设条件$\iint_S P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,有

$$\oiint\limits_{S+S_1}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S_1}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又记$S+S_1$所包围的空间区域为Ω,利用Gauss公式得

$$\oiint\limits_{S+S_1}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(3分)

而$\iint\limits_{S_1}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}R(x,y,z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\}$是$S_1$在$xOy$平

面上的投影,所以

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iint\limits_{D}R(x,y,z_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2分)

对上式两边分别利用三重积分与二重积分的中值定理,存在点$(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$及$(x',y')\in D$,使得

$$\frac{2\pi r^3}{3}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)}=-\pi r^2R(x',y',z_0),$$

即

$$\frac{2r}{3}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)}=-R(x',y',z_0).\tag{$*$}$$

令$r\to 0^+$,则$(\xi,\eta,\zeta)\to(x_0,y_0,z_0)$, $(x',y')\to(x_0,y_0)$,故由上式可得$R(x_0,y_0,z_0)=0$.由于点(x_0,y_0,z_0)的任意性,所以 $R(x,y,z)\equiv 0$,从而有$\dfrac{\partial R}{\partial z}\equiv 0$,代入$(*)$式,得

$$\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)}=0.$$

令$(\xi,\eta,\zeta)\to(x_0,y_0,z_0)$,得$\dfrac{\partial P}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=0$.由于点$(x_0,y_0,z_0)$的任意性,因此 $\dfrac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$. (3分)

七、(8分) 设$\varphi(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$, 其中$t>0$.

(1) (3分) 求证: 对于任何$T>0$, 广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$在$[0,T]$上一致收敛.

(2) (5分) 求证: 对任何$t>0$, 有$\varphi(t)=\varphi\left(\dfrac{1}{t}\right)+\dfrac{\pi}{2}\ln t$.

证 (1) 易知: 当$x>0$时, $\ln(1+x)<\sqrt{x}$. 所以

$$0\le\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}<\sqrt{T}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2},\quad x\in[0,T].$$

由$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛,可知$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$在$[0,T]$上一致收敛. (3分)

(2)

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\frac{x}{t})}{1+x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{1}{u}}\int_{+\infty}^0\frac{\ln(1+\frac{1}{tu})}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+tu)-\ln(tu)}{1+u^2}\mathrm{d}u\\&=\varphi(t)-\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+u^2}\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\mathrm{d}u\\&=\varphi(t)-\frac{\pi}{2}\ln t-\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\mathrm{d}u\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\int_{+\infty}^0\frac{-\ln x}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

所以$\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=0$. 故

$$\varphi\left(\frac{1}{t}\right)=\varphi(t)-\frac{\pi}{2}\ln t.$$

(5分)