

# 中国科学技术大学

## 2016—2017学年第一学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计(B) 得分 \_\_\_\_\_

所在系 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

考试时间: 2017年1月3日上午8:30-10:30; 使用简单计算器

一. (30分, 每小题均3分) 填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.

1. 设 $A$ 和 $B$ 为随机事件,  $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3, P(A|B) = 0.4$ , 则( ).  
(A)  $A$ 与 $B$ 相互独立 (B)  $A$ 与 $B$ 互斥  
(C)  $A \supset B$  (D)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2. 甲乙二人进行网球比赛, 每回合胜者得1分, 且每回合甲胜的概率为 $p(0 < p < 1)$ , 乙胜的概率为 $1 - p$ , 比赛进行到有一人比另外一个人多2分就终止, 多2分者最终获胜, 则甲最终获胜的概率为\_\_\_\_\_.
3. 设随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的Poisson分布, 且已知 $P(X = 1) = P(X = 2)$ , 则 $X$ 取值为3的概率为\_\_\_\_\_.
4. 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ , 且已知 $P(X \leq 2, Y \leq -2) = 0.25$ , 则 $P(X > 2, Y > -2) =$ \_\_\_\_\_.
5. 设 $X$ 和 $Y$ 相互独立且分别服从均值为1和 $1/4$ 的指数分布, 则 $P(X < Y) =$ \_\_\_\_\_.
6. 设随机变量 $X_1$ 和 $X_2$ 相互独立, 方差均存在, 且概率密度函数分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ . 若 $Y_1$ 的概率密度函数为 $[f_1(y) + f_2(y)]/2$ , 而 $Y_2 = (X_1 + X_2)/2$ , 则( ).  
(A)  $E[Y_1] > E[Y_2], \text{Var}[Y_1] > \text{Var}[Y_2]$  (B)  $E[Y_1] = E[Y_2], \text{Var}[Y_1] = \text{Var}[Y_2]$   
(C)  $E[Y_1] = E[Y_2], \text{Var}[Y_1] < \text{Var}[Y_2]$  (D)  $E[Y_1] = E[Y_2], \text{Var}[Y_1] > \text{Var}[Y_2]$
7. 在假设检验中, 下列关于拒绝域和接受域说法错误的是( ).  
(A) 与显著性水平 $\alpha$ 有关 (B) 与所构造的统计量的分布有关  
(C) 随样本观测值的不同而改变 (D) 互不相交
8. 设 $X_1, X_2, X_3, X_4$ 为来自总体 $N(1, \sigma^2)$ 的一组简单随机样本, 则 $T = \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_3 + X_4 - 2)^2}$ 的分布为( ).  
(A)  $t_1$  (B)  $F_{1,1}$  (C)  $F_{2,2}$  (D) 以上皆不正确.
9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自二项总体 $B(n, p)$ 的一组简单随机样本, 且记 $\bar{X}$ 和 $S^2$ 为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 $np^2$ 的一个无偏估计, 则常数 $k =$ \_\_\_\_\_.
10. 设正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中参数 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 均未知. 若样本容量 $n$ 和置信系数 $1 - \alpha$ 均保持不变, 对于不同的样本观测值, 则总体均值 $\mu$ 的置信区间长度( ).  
(A) 始终保持不变 (B) 与 $\mu$ 的真值有关  
(C) 与样本均值有关 (D) 不固定.

二. (11分) 设二维随机向量  $(X, Y)$  的概率密度函数为  $f(x, y) = \begin{cases} Ax^2, & 0 < |x| < y < 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

试求常数  $A$  的值及条件概率  $P(X \leq 0.25 | Y = 0.5)$ .

三. (16分) 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立, 且  $X$  的概率分布为  $P(X = 0) = P(X = 2) = 0.5$ ,  $Y$  的概率密度函数为  $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

1. 求  $P(Y \leq EY)$ ;
2. 求  $Z = X + Y$  的概率密度函数.

四. (15分) 某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体进行  $n$  次测量, 该物体的质量  $\mu$  是已知的. 设  $n$  次测量结果  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立且服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 该工程师记录的是  $n$  次测量的绝对误差  $Z_i = |X_i - \mu|, i = 1, 2, \dots, n$ . 现利用这些绝对误差来估计标准差  $\sigma$ .

1. 求  $Z_i$  的概率密度函数;
2. 利用一阶矩求  $\sigma$  的矩估计量;
3. 求  $\sigma$  的极大似然估计量.

五. (18分) 在质量管理中, 产品的优良性和稳定性可以分别用均值和方差来体现. 要比较甲乙两厂所生产的电视机的质量是否有差异, 对两厂所生产的各 10 台产品的使用情况进行了追踪调查, 得到这 20 台电视机的寿命(单位: 年)数据如下:

甲	8	7	9	5	12	10	9	10	8	7
乙	10	8	5	7	8	7	11	4	5	6

设电视机的寿命服从正态分布, 利用假设检验的知识判断两厂所生产电视机的寿命是否有显著差异(显著性水平取  $\alpha = 0.05$ ).

六. (10分) 对截止目前为止一共 44 位美国总统(含候任总统 Trump) 的星座进行分析, 发现十二星座中天蝎座和水瓶座各有 5 人, 双子座和射手座各有 3 人, 处女座和白羊座各有两人, 而其余星座均有 4 人. 于是有人宣称有些星座擅长当美国总统, 而有些星座则不擅长. 结合你所学的知识, 说明该说法是否有统计学上的依据?(显著性水平取  $\alpha = 0.05$ )

附录: 上分位数表

$$F_{10,10}(0.025) = 3.72, F_{9,9}(0.025) = 4.03, F_{10,10}(0.05) = 2.98, F_{9,9}(0.05) = 3.18, \\ t_{20}(0.025) = 2.086, t_{19}(0.025) = 2.093, t_{18}(0.025) = 2.101, \chi_{11}^2(0.05) = 24.725.$$

## 参考答案

一. 每小题3分

1. A    2.  $p^2/[p^2 + (1-p)^2]$  或  $p^2/(1-2p+2p^2)$     3.  $\frac{4}{3}e^{-2}$  或 0.18    4. 0.25 或  $1/4$   
 5. 0.2 或  $1/5$     6. D    7. C    8. B    9. -1    10. D

二. 常数  $A = 6$ . (5分)

由  $f_Y(y) = 4y^3, 0 < y < 1$  及  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{3x^2}{2y^3}, -y < x < y$ , 可知  $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = 12x^2, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ . 故

$$P(X \leq 1/4 | Y = 1/2) = \int_{-1/2}^{1/4} 12x^2 dx = \frac{9}{16}. \quad (6分)$$

三. 1. 由  $EY = \frac{2}{3}$ , 知  $P(Y \leq EY) = \int_0^{2/3} 2y dy = 4/9$ . (6分)

2. 对任意  $0 < z < 3$ , 由全概率公式可知

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= \frac{1}{2}P(Y \leq z) + \frac{1}{2}P(Y \leq z-2) \\ &= \begin{cases} z^2/2, & 0 \leq z < 1; \\ 1/2, & 1 \leq z < 2; \\ ((z-2)^2 + 1)/2, & 2 \leq z < 3. \end{cases} \quad (5分) \end{aligned}$$

从而  $Z$  的概率密度函数为

$$l(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z < 1; \\ z-2, & 2 \leq z < 3; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (5分)$$

四. 1. 概率密度函数为  $f(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\}, z > 0$ . (5分)

2. 由于  $E[Z_i] = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$ , 故  $\sigma$  的矩估计量为  $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{Z}$ , 其中  $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$ . (5分)

3. 由对数似然函数为  $l(\sigma) = c - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2$ , 其中  $c$  为一与  $\sigma$  无关的常数, 令  $\frac{dl(\sigma)}{d\sigma} = 0$ , 可知  $\sigma$  的极大似然估计量为  $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2}$ .

五. 由样本观测值得  $\bar{x} = 8.5, s_1^2 = 3.83, n_1 = 10; \bar{y} = 7.1, s_2^2 = 4.99, n_2 = 10$ . (4分)

先检验两总体的方差是否相等. 此时  $F = \frac{3.83}{4.99} = 0.768$ , 而由附表可得  $F_{9,9}(0.025) = 4.03, F_{9,9}(0.975) = 1/4.03 = 0.248$ . 因为  $0.248 < F < 4.03$ , 我们可以认为两总体方差相等. (7分)

再检验两总体均值是否相等. 此时  $s_w^2 = 4.411$ , 而统计量  $t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = -1.235$ . 故由  $|t| < t_{18}(0.025) = 2.101$ , 我们也可认为两总体均值相等. 综上可知, 我们可以认为两厂所生产电视机的寿命没有显著性差异. (7分)

六. 首先建立假设  $H_0$ : 每个星座当上美国总统的可能性是一样的. 计算  $\chi^2$  统计量的值为  $2.91 < \chi_{11}^2(0.05) = 24.725$ . 接受  $H_0$ , 故我们可以认为该说法没有统计学上的依据.