中国科学技术大学

2021 – 2022 学年第一学期期中考试试卷

课程名称 线性代数(B2)　　课程编号 MATH1010

考试时间 2021年11月27日　　考试形式 闭卷

学院 ________ 姓名 ________ 学号 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
复评人								

注意事项：

1. 答题前，考生务必将所在院系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。

答题时不要超过此线

得分	评卷人

一（本题10分）求3次有理系数多项式$f(x)$使得$f(x)+1$被$(x-1)^2$整除，且$f(x)-1$被$(x+1)^2$整除.

解: $(x-1) \mid f'(x)$, $(x+1) \mid f'(x)$，故 $x^2-1 \mid f'(x)$. 由 $\deg f = 3$，知 $\deg f' = 2$.

得 $f'(x) = c(x^2-1)$，$f(x) = c(\frac{1}{3}x^3 - x) + d$.

$$\begin{cases} f(1) = d - \frac{2}{3}c = -1 \\ f(-1) = d + \frac{2}{3}c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \cancel{+}\frac{3}{2} \\ d = \cancel{\tfrac{1}{3}}0 \end{cases}, \quad f(x) = \cancel{\tfrac{1}{3}x^3 - x - \tfrac{1}{3}} \ \frac{1}{2}(x^3-3x)$$

经检验满足要求

得分	评卷人

二（本题10分）设复系数多项式$f(x)=x^2+ax+1$, $g(x)=x^3+x^2+b$, 其中a,b是常数. 给出$f(x)$与$g(x)$有公因子（不互素）的充要条件（用a,b表示）.

解: $x^3+x^2+b - x(x^2+ax+1) = (1-a)x^2 - x + b$

$\gcd(x^3+x^2+b, x^2+ax+1) = \gcd(x^2+ax+1, (1-a)x^2-x+b)$

1° $a=1$, $x-b \mid x^2+ax+1$, $b = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

2° $a \neq 1$, 则 x^2+ax+1 和 $(1-a)x^2-x+b$ 有公共根，$x^2+ax+1-(x^2+\frac{1}{a-1}x-\frac{b}{a-1})$

$=(a-\frac{1}{a-1})x+1+\frac{b}{a-1}=0$ 有解，

则 $\{ a^2-a-1=0$

$$\gcd(f,g)\neq 1 \iff R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & & \\ & 1 & a & 1 & \\ & & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b & \\ & 1 & 1 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & \\ & 1 & a & 1 \\ 1 & & b & \\ 1 & 1 & & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 & & \\ 1 & a & 1 & \\ & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$= -a^3b + a^2b + 3ab - a + b^2 - 2b + 2 = 0$

答题时不要超过此线

得分	评卷人

三（本题10分）设A为n阶方阵，且$\mathrm{rank}(A)=n-1$. 证明：$\mathrm{rank}(A^k) \geq n-k$（$k$为正整数）.

证: 在 $\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B \leq \mathrm{rank}AB + n$ 中，取 $B = A^k$，知 $\mathrm{rank}(A^{k+1}) - \mathrm{rank}(A^k) \geq \underbrace{\mathrm{rank}(A) - n}_{=-1}$

$\mathrm{rank}(A^k) = \mathrm{rank}(A^k) - \mathrm{rank}(A^{k-1}) + \cdots + \mathrm{rank}(A^2) - \mathrm{rank}(A^1) + \mathrm{rank}(A)$

$\geq -1 \times (k-1) + n - 1 = n-k$

得分	评卷人

四（本题20分）给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. 求出所有满足条件 $AB = BA$ 的实矩阵 B.

2. 用 W 记由1求得的所有矩阵的全体。证明：W 是 $\mathbb{R}^{4\times4}$ 的子空间，并求其维数与一组基.

3. 求 $\mathbb{R}^{4\times4}$ 的子空间 W' 使得 $\mathbb{R}^{4\times4} = W \oplus W'$.

解：1. 设 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$，$x \mapsto Ax$，记 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，则 $\mathcal{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\beta_1,\beta_2,2\beta_3,\beta_3+2\beta_4)$

$\mathcal{A}(\beta_i)=\beta_i,\ i=1,2$；$\mathcal{A}(\beta_3)=2\beta_3$，$(\mathcal{A}-2Id)\beta_4=\beta_3$，$(\mathcal{A}-2Id)^2\beta_4=0$

故 $\beta_1,\beta_2\in\ker(\mathcal{A}-Id)$，$\beta_4\in\ker(\mathcal{A}-2Id)^2$，$\beta_3=(\mathcal{A}-2Id)\beta_4\in\ker(\mathcal{A}-2Id)$

求 $\ker(\mathcal{A}-Id)$：$A-I=\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$，$\ker(\mathcal{A}-Id)=\{(a,b,0,0)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$

求 $\ker(\mathcal{A}-2Id)^2$：$(A-2I)^2=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$，$\ker(\mathcal{A}-2Id)^2=\{(0,0,c,d)\mid c,d\in\mathbb{R}\}$

设 $\beta_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$，$\beta_4=\begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$，则 $\beta_3=(\mathcal{A}-2Id)\beta_3=\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \\ x_6 \\ \end{pmatrix}$

故 $B=\begin{pmatrix} x_1 & x_3 & & \\ x_2 & x_4 & & \\ & & x_6 & x_5 \\ & & & x_6 \end{pmatrix}$，$x_i\in\mathbb{R}$，$1\le i\le 6$

2. 若 B 使 $AB=BA$，则 $A(\lambda B)=(\lambda B)A$，$\lambda B\in W$

$B_1, B_2\in W$，$A(B_1+B_2)=(B_1+B_2)A$，$B_1+B_2\in W$

故 W 是 $\mathbb{R}^{4\times4}$ 子空间，基 $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}, E_{34}, E_{33}+E_{44}\}$，$\dim W=6$

3. $W'=\left\{\begin{pmatrix} & & x_7 & x_8 \\ & & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & & \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix} \middle| x_i\in\mathbb{R}, 7\le i\le 16\right\}$ 满足要求

$\begin{pmatrix} & & x_7 & x_8 \\ & & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{15} & \\ x_{13} & x_{14} & x_{16} & -x_{15} \end{pmatrix}$

得分	评卷人

五、（本题15分）设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=\delta_{ij}+i+j$，δ_{ij} 为Kronecker记号. 求矩阵 A 的行列式.

解：$A=I_n+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$\det A=\det\left(I_n+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}\right)=\det\left(I_2+\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{pmatrix}\right)$

$=\det\begin{pmatrix} 1+\frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ n & 1+\frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$

$=\left(1+\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{n^2}{4}(n+1)^2+n^2+n+1-\frac{(2n^4+3n^3+n^2)}{6}$

$\cancel{=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{4}n^2+\frac{5}{6}n+1}$

$=-\frac{1}{12}n^4+\frac{13}{12}n^2+n+1$

得分	评卷人

六（本题15分）试求多项式矩阵A的Smith标准型、不变因子和初等因子组，这里$A=\begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$.

解 $D_n(x)=x^n$，$f_1(x)=A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}=x^{n-1}$，$f_2(x)=A\begin{pmatrix} 2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 1 \end{vmatrix}$，

$f_2(0)=1\neq 0$，故 f_1, f_2 互素，$D_{n-1}=1$，使 $D_k=1$，$1\le k\le n-1$，

不变因子 $d_k(x)=\begin{cases} 1, & 1\le k\le n-1 \\ x^n, & k=n \end{cases}$，Smith标准型 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & x^n \end{pmatrix}$，初等因子 $\{x^n\}$

答题时不要超过此线

得分	评卷人

七、（本题20分）设$A\in F^{m\times n}$，称矩阵$X\in F^{n\times m}$为矩阵A的广义逆，如果$AXA=A$, $XAX=X$.

1. 若$A=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$, 其中$P, Q$分别为$m, n$阶可逆方阵，试求$A$的广义逆.

2. 证明：对矩阵$A\in F^{m\times n}$, 其每一个广义逆都可以表示为$X=\tilde{Q}^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\tilde{P}^{-1}$, 这里$\tilde{P}, \tilde{Q}$是满足$A=\tilde{P}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\tilde{Q}$的可逆方阵.

解：1. 设 $X=Q^{-1}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}P^{-1}$，$AXA=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix}Q$

得 $X_1=I_r$. $XAX=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}P^{-1}=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_3X_2 \end{pmatrix}P^{-1}$

$=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_3X_2 \end{pmatrix}P^{-1}$

得 $X_4=X_3X_2$. 对任意 $X_2\in F^{r\times(n-r)}$，$X_3\in F^{(n-r)\times r}$，$X=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_3X_2 \end{pmatrix}P^{-1}$ 确实满足要求，故就是所求

2. 由1 $X=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \\ X_3 & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \cancel{X_2}\,0 \\ \cancel{X_3} & \cancel{X_3X_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}$

记 $\tilde{Q}=\begin{pmatrix} I_r & \\ -X_3 & I_{n-r} \end{pmatrix}Q$，$\tilde{P}=P\begin{pmatrix} I_r & -X_2 \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}$

$X=\tilde{Q}^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix}\tilde{P}^{-1}$，$\tilde{P}\begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix}\tilde{Q}=P\begin{pmatrix} I_r & -X_2 \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \\ -X_3 & \end{pmatrix}Q$

$=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix}Q=A$

答题时不要超过此线