

第七章 磁约束聚变装置

主要内容

- 7.0 引言
- 7.1 托卡马克
- 7.2 仿星器
- 7.3 反场箍缩
- 7.4 场反位形

主要内容

- 7.0 引言
- 7.1 托卡马克
- 7.2 仿星器
- 7.3 反场箍缩
- 7.4 场反位形

7.0 引言

- 可能应用于未来聚变反应堆的各种磁场位形，主要是四种，当然也可能有还未创新出来的；
- 事实上磁场位形概念非常之多，真正能够应用于聚变反应堆的，就需要解决好聚变三乘积问题：即不但需要克服磁流体力学平衡与稳定性（ p ）的困难，还需解决输运（ τ_E ）和加热（ T ）等问题；
- 关键点是：最终达到聚变反应堆要求的磁场位形是能够稳定地约束高压强等离子体。总体性能最好的位形一直是托卡马克，因此将其作为衡量其它位形概念的参考位形。以下定性地讨论托卡马克位形的优劣之处，籍此准确了解各种替代位形能的可行性。

7.0 引言

- 托卡马克的磁约束位形是轴对称的：强环向磁场和大环向电流。目前它已经实现了接近反应堆水平的等离子体压强、约束时间和温度条件下的稳定运行，即已经基本实现了聚变反应堆的所有要求。
- 现今托卡马克面临的突出问题：首先是等离子体物理方面的，其次是工程技术的：
 - 等离子体物理的主要是稳态运行。稳定的环向电流 → 变压器感应不可能，磁通量有限 → 外部非感应电流驱动，功率转变为电流效率极低，不可接受 → “自举电流”，可观自举电流份额所需的等离子体压强将远超真空边界条件 β 极限。若是理想导体壁，其具有强致稳作用，此时 β 值可低于磁流体力学 β 极限。
 - 实际上托卡马克第一壁均具有电阻性，电阻性导体壁的不稳定性增长特征时间（通常为毫秒量级）要比真空情形下的（通常为微秒量级）要长很多，可以通过反馈控制来实现平衡。虽然电阻性的 β 极限与理想的差别大，但事实上能达到的 β 极限取决于对电阻壁模的反馈致稳控制，以低的电流驱动功率实现稳态运行。
 - 改变托卡马克这一困境的新做法：无需额外的电流驱动，且可在磁流体力学稳定性极限条件下实现稳态运行——“先进托卡马克（AT）运行模式”，它主要将剖面控制和反馈致稳结合起来解决稳态运行问题，仍需大量实验验证；另一种直接方式是采用仿星器，仿星器是一种三维的、具有内在稳态性质的磁场位形，且无需非感应电流驱动。

7.0 引言

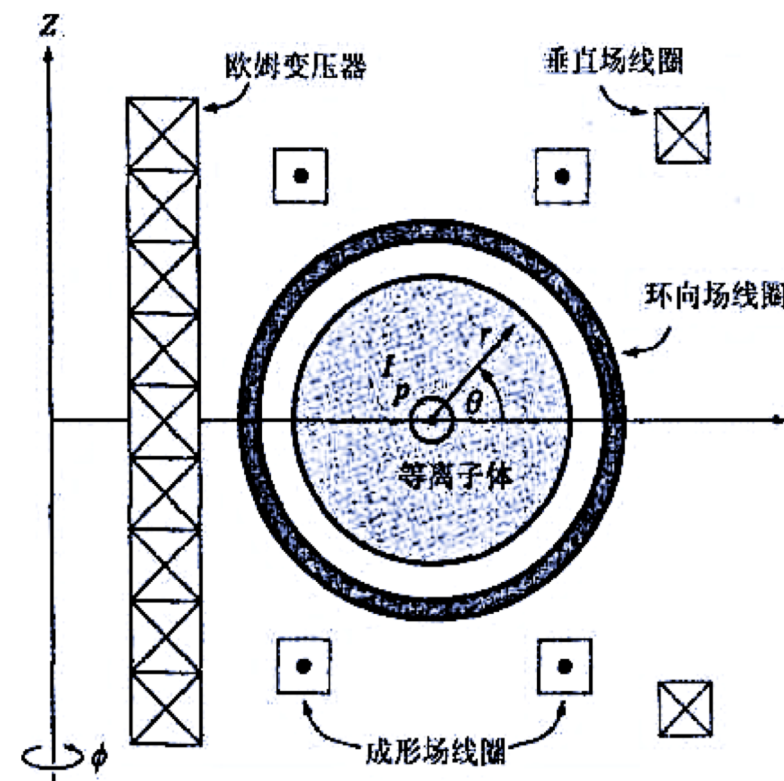
- 托卡马克的磁约束位形是轴对称的：强环向磁场和大环向电流。目前它已经实现了接近反应堆水平的等离子体压强、约束时间和温度条件下的稳定运行，即已经基本实现了聚变反应堆的所有要求。
- 现今托卡马克面临的突出问题：首先是等离子体物理方面的，其次是工程技术的：
 - 工程技术的是：需要强环向磁场来维持磁流体力学平衡 → 磁体必须采用超导材料 → 昂贵且增加反应堆的技术复杂性。其它概念虽无此要求，但约束性质性能较差，无壁情形下的磁流体力学值也较低。
- 多方面权衡结果确立了托卡马克在实现聚变反应堆之路上的优先地位，虽然每一替代概念都可改善了托卡马克某一方面的性能，但是却以牺牲其他方面性能为代价。目前还未有任何一种新概念可以在反应堆总体要求上，取代托卡马克。

主要内容

- 7.0 引言
- 7.1 托卡马克
- 7.2 仿星器
- 7.3 反场箍缩
- 7.4 场反位形

7.1 托卡马克

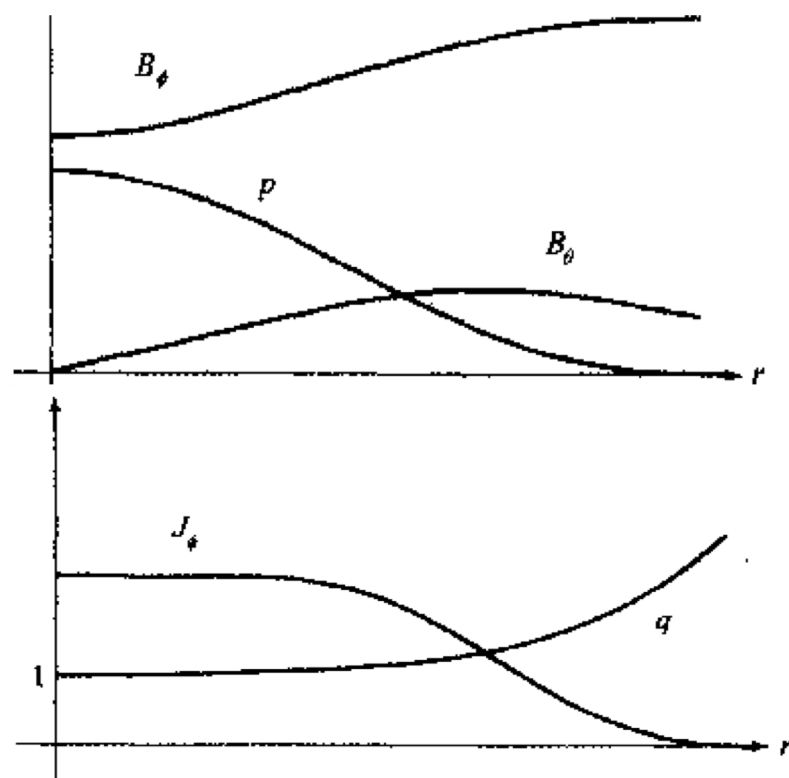
- 托卡马克：轴对称环形位形，环向磁场（强）、等离子体压强（中等）、环向电流（不大）；
- 良好的物理性能，为第一代聚变反应堆的首选位形：高等离子体温度 T 下实现的 $p\tau_E$ 值是其它聚变概念所不及的；
- 托卡马克有4个基本磁体系统：
 - ①产生强的环向磁场的环向场线圈；
 - ②欧姆变压器：感应出平衡所需的环向等离子体电流并进行欧姆加热；
 - ③垂直场，环向力平衡所必需的；
 - ④成形场，产生非圆截面位形，提升磁流体力学平衡极限值，减少等离子体与壁作用引出的杂质。



托卡马克原理图

7.1 托卡马克

- 托卡马克典型放电运行过程：建立稳定的环向磁场 → 中性气体注入真空室并预电离 → 变压器感应出环向电流，电流爬升到预定值并维持“平顶” → 外部加热功率以射频或中性束形式进入等离子体（远大于欧姆功率），加热等离子体。
- 托卡马克平顶运行阶段的典型参数分布。
- 环向磁场有很小的逆磁倾角，以达成等离子体径向压强平衡。托卡马克重要特征是安全因子 $q(r) \approx rB_\phi / R_0 B_\theta$ ： $q(r)$ 随半径增加而增加，且 $q(r) > 1$ ，这是由于强环向磁场造成。



大环径比极限 $R_0/a \rightarrow \infty$ 情形下
托卡马克放电的典型参数分布

7.1 托卡马克

- 针对反应堆需求，托卡马克有
 - 主要优点：物理性能良好。强的环向磁场及相应的高安全因子使得即使没有导体壁，其磁流体力学稳定 β 值依然有限，且可获得较高的能量约束时间 τ_E 。良好的约束使得用中等水平的外部加热就可以将等离子体加热到高温，而且相应 β 值在反应堆允许的范围内。举例来说，坐落在英国牛津附近的JET已实现高性能D-T放电，对应的 $p\tau_E \sim 0.84 \text{ atm} \cdot \text{s}$ ，点火所需的 $p\tau_E \sim 0.8 \text{ atm} \cdot \text{s}$ 。显然，现有托卡马克的实验性能已接近实际反应堆的参数区。
 - 面临的问题：
 - 强的环向磁场增加了反应堆的技术复杂性和成本。其但采用小的环向磁场但边界安全因子低，约束性能和稳定性差。从实际工程的角度来看，强的环向磁场是肯定可以实现的，但不经济。
 - 稳态运行与采用欧姆变压器的运行方式是矛盾的。长时间运行不可能通过感应来驱动直流电流，需要外加电流驱动手段，但驱动效率并不十分高，过高的电流驱动成本使得整体功率平衡在经济上缺乏吸引力。
 - 存在输运驱动的“自举电流”。自生的，依赖等离子体自身压强和磁场分布情况，与外界无关，所占份额可以高达总电流的95%。目前认为聚变反应堆必须做到75%甚至更多的电流由自举电流来提供才具有吸引力，亦即外部驱动电流必须不大于25%。但实现高自举电流份额就需要装置运行在高 β （ $>$ 无壁 β 极限），需要解决电阻壁模问题。

7.1 托卡马克

- 概言之，托卡马克概念的成功与否，取决于能否实现高 β 运行，或者说，取决于能否实现高自举电流份额等离子体的稳态运行，外部驱动电流仅占一小部分，这是未来等离子体物理研究的主要目标之一。
- 必须强调，高 β 运行会带来磁流体力学不稳定性的巨大风险。实验中，磁流体力学高 β 极限对于外部气球-扭曲模具有极其重要的作用，一旦触及，几乎会伴随着等离子体压强和电流的灾难性崩溃，即“等离子体大破裂”，它产生的瞬态电磁力和热流会对装置或反应堆造成实际的物理破坏。故准确判断抑制外部气球-扭曲模的磁流体力学 β 极限值，并做到在尽可能接近 β 极限条件下运行以实现装置的最佳性能。

7.1 托卡马克

- 以下着重讨论托卡马克几种重要的磁流体力学行为，分析从大环径比、圆截面的托卡马克开始：
 - 在表面电流模型下，有三个重要的 β 和 I 极限值：
 - 首先，存在一个平衡态极限，它限定了 β/I^2 的最大值；
 - 第二，随着 $\beta \rightarrow 0$ ，低 n 扭曲模使得存在一个稳定性极限，它限定了 I 的最大值；
 - 第三，低 n 气球-扭曲模使得存在这样一个稳定性极限：对于每一个 I 的最优值，它限定了可实现的最大 β 值。最严格的 β 极限来自气球-扭曲模。
 - 值得注意的是还有一种内部不稳定性， $m = 1$ 、 $n = 1$ 模。这种不稳定性位于等离子体磁轴附近，引起所谓“锯齿型”内部弛豫振荡，这种模不是十分危险，尽管它确实设定了一个运行极限 $q(0) > 1$ 。锯齿振荡的物理机制并未包含在表面电流模型中。

7.1 托卡马克

- 对以上基本托卡马克进行些许变化，会带来：
 - 第一种：横截面拉长。截面拉长和三角形变的组合能够提高抑制低 n 气球-扭曲模的 β 极限值。但会激发 $n = 0$ 的轴对称模，故最大拉长比存在一个极限。要实现约为2的拉长比极为困难的。
 - 第二种是“先进托卡马克”（Advanced Tokamak, AT）的运行模式——通过外界控制将参数分布调节到形成中空的环向电流密度和高 β_p ，实验上是通过程序控制等离子体电流时变以及外部加热源投入的径向位置和时序来实现，旨在提高自举电流份额，尽可能减少外部驱动电流。主要问题是：对于高自举电流份额，非理想导体壁情形下的气球-扭曲 β 极限始终是破缺的，必须通过反馈控制来稳定由此引起的电阻壁模。
 - 另外一种是球形托卡马克——环径比非常小的托卡马克。从拓扑结构上讲，环径比必须满足 $R_0/a \geq 1$ ，对于标准托卡马克， $R_0/a \approx 3$ ，而球形托卡马克却是 $R_0/a \approx 1.2$ 。由于理论上认为托卡马克中抑制气球-扭曲模最大的稳定 β 值 $\sim a/R_0$ ，显然小环径比带来高 β ，故球形托卡马克可以外推到更加紧凑的、有可能是低成本的反应堆。其前提是必须解决好紧凑的中心柱所带来的工程技术问题。

7.1 托卡马克

- 磁流体力学 β 极限值的重要性：

- 从简单的反应堆概念设计来看，从磁流体力学 β 极限值上考虑，最优设计的反应堆应该运行在环向场线圈内侧可允许的最强磁场条件下。
- 聚变界一致认为托卡马克物理参数最终将能够满足聚变反应堆的要求，尽管参数区间不会超出太多。关键是这些参数需要维持在稳态。这就要求在没有理想导体壁或者（更可能是）对电阻壁模进行反馈稳定的情形下，实现大比例的自举电流，这就需要确定磁流体力学 β 极限值。

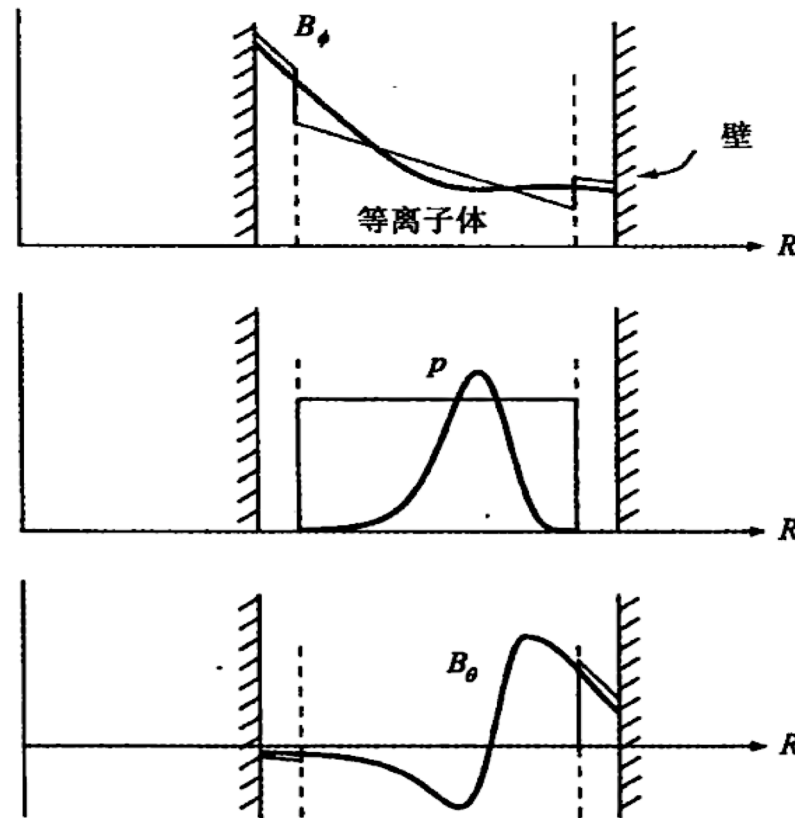
7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——平衡

- 圆截面托卡马克的平衡分析可以采用环径比展开来简化压强平衡关系式，并得到极向磁场表达式：

- 对于可实现的 β/I^2 最大值，存在平衡极限：若 I 不变， β 增加，则需要增强垂直场来提供环向力平衡， I 不变是为了维持高的安全因子。当垂直场足够大，分离面将移向等离子体内表面，这代表着平衡态极限。
- 若增加 I 同时保持垂直场不变来支撑环向力平衡中的高的压强，势必减小安全因子。

■ 1. 环径比展开

- 如何理解表面电流模型中的参数选择，右图展示的大型圆截面托卡马克聚变实验反应堆（TFTR）典型的磁场和压强分布，以及叠加其上的表面电流模型给出的数值近似结果。



TFTR实验得到的中平面上典型的参数分布（光滑曲线），重叠的是表面电流模型给出的近似（折线）

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——平衡

- 表面电流压强平衡关系的简化表达式：在大环径比假设 $\varepsilon \equiv a/R_0 \ll 1$ 下，求得参数 ε 的各阶展开：
- 环径比展开的核心是假设安全因子为有限的量，这样才能实现良好的磁流体力学稳定性。特别地，假设

$$q \sim 1$$

- 由于 $q \approx rB_0/R_0B_\theta$ ，因此这意味着极向磁场的合适范围是： $\frac{B_\theta}{B_\phi} \sim \varepsilon$ ，即极向磁场与环向磁场相比很弱。
- 考虑径向压强平衡。弱的极向磁场意味着总 β 近似等于 β_t ：

$$\beta \approx \frac{2\mu_0 p}{B_\phi^2 + B_\theta^2} \approx \frac{2\mu_0 p}{B_\phi^2} \approx \beta_t$$

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——平衡

- 如果环向磁场是纯粹的真空场（即 $B_i = B_0$ ），那么径向压强平衡就仅由极向磁场提供，此时能够被约束的等离子体实际上很少： $p \approx B_\theta^2/2\mu_0$ ，这表明 $\beta_t \sim \varepsilon^2$ 和 $\beta_p \sim 1$ 。这不是托卡马克运行区。
- 利用环向磁场中很小的逆磁倾角可以约束较高压强的等离子体。如果我们假设 $B_0 - B_i \sim \varepsilon B_0$ ，那么由径向压强平衡 $p \approx (B_0 - B_i)B_0/\mu_0$ 可得 $\beta_t \sim \varepsilon$ 以及 $\beta_p \sim 1/\varepsilon$ 。这是托卡马克运行区。但不能让逆磁倾角大于 ε 量级，因为如果 q 被限定在1附近，那么环向力平衡是不可能实现的。实验上，逆磁倾角主要是由外部加热功率大于欧姆加热功率引起的。
- 总之，托卡马克各参数大小按适当的环径比展开可确定为：
$$q \sim B_\theta/\varepsilon B_\phi \sim (1 - B_i/B_0)/\varepsilon \sim \beta_t/\varepsilon \sim \varepsilon\beta_p \sim 1$$
- 将这个排序关系引入到表面电流压强平衡模型中，从而得到极向磁场的简单表达式。

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——平衡

■ 2. 表面电流压强平衡关系

- 表面电流压强平衡的一般关系式：

$$\hat{B}_p^2(\theta) = 2\mu_0 p + \frac{B_i^2 - B_0^2}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2}$$

- 通过对环向场所在的项的分母对 ε 进行泰勒展开，并引入一个新的常数 λ 代替 B_i ，可将上式简化为：

$$\frac{B_i^2}{B_0^2} \equiv 1 - \beta + \varepsilon^2 \lambda$$

- 其中，

$$\beta \equiv \frac{2\mu_0 p}{B_0^2}$$

- 它与环径比展开 $\lambda \sim 1$ 是一致的。简单计算后给出：

$$\left(\frac{\hat{B}_\theta}{\varepsilon B_0} \right)^2 = \lambda + 2 \frac{\beta}{\varepsilon} \cos\theta$$

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——平衡

- 现在将 λ 替换为如下定义的另一个等价的常数 k :

$$\lambda \equiv \frac{2\beta}{\varepsilon k^2} (2 - k^2)$$

- 那么 $\left(\frac{\hat{B}_\theta}{\varepsilon B_0}\right)^2 = \lambda + 2\frac{\beta}{\varepsilon} \cos\theta$ 简化为:

$$\left(\frac{\hat{B}_\theta}{\varepsilon B_0}\right)^2 = \frac{4\beta}{\varepsilon k^2} \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

- 尽管上式形式上相对简单，但是因为 \hat{B}_θ 通过常数 k 来表达，而 k 还没有物理解释。 \hat{B}_θ 应用 β 和 I 来表示。
- 电流 I 可以通过安全因子的定义来引入。在直圆柱下， $q(a) = aB_0/R_0 B_\theta(a) \sim 1/I$ 。而在托卡马克中， q 和 I 仅在低 β/ε 时成反比关系，高 β/ε 时不成立。为了区分这两类情形，可直接从 q 的定义来计算 $q = q(k, \beta)$ 然后将它和一个新的量 $q_* = q_*(k, \beta)$ 进行比较，定义 q_* 始终与 I 成反比。故此从安全因子的定义可得：

$$q(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{rB_\phi}{RB_\theta}\right) \bigg|_a d\theta \approx \frac{\varepsilon B_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\hat{B}_\theta} = \frac{kK(k)}{\pi} \frac{1}{(\beta/\varepsilon)^{1/2}}$$

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——平衡

- $q_*(k, \beta)$ 定义为在 k 很小时与 $q(a)$ 一致，但对于所有 k 均与 I 成反比：

$$q_* \equiv \frac{2\pi a^2 B_0}{\mu_0 R_0 I} = \varepsilon B_0 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{B}_\theta d\theta \right]^{-1} = \frac{\pi k}{4E(k)} \frac{1}{(\beta/\varepsilon)^{1/2}}$$

- 其中 $K(k)$ 、 $E(k)$ 分别是第一类、第二类完全椭圆积分。小 k ， $K \approx E \approx \pi/2$ 和 $q(a) \approx q_* \approx k/[2(\beta/\varepsilon)^{1/2}]$ ； $k \rightarrow 1$ ， $K \approx \ln[4/(1-k^2)^{1/2}]$ 且 $E \approx 1$ ， $q(a)$ 发散但 q_* 保持有限。后面会讨论 $q(a)$ 发散的重要性。当前重要参数是 q_* 而不是 $q(a)$ 。稳定性极限与电流大小的联系要比与磁场线的平均螺旋倾角的联系更为紧密。利用 $E(k)$ 的极限值可得：

$$E(k) \approx \left[k^2 + \frac{\pi^2}{4} (1 - k^2) \right]^{1/2}$$

- 用这个近似消去 k 得到如下与 β/ε 和 q_* 有关的极向磁场表达式：

$$\left(\frac{\hat{B}_\theta}{\varepsilon B_0} \right)^2 \approx \frac{1}{q_*^2} \left(1 - \hat{\beta} + \frac{\pi^2}{4} \hat{\beta}^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

- 其中， $\hat{\beta} \equiv \left(\frac{16}{\pi^2} \right) \left(\frac{\beta q_*^2}{\varepsilon} \right)$ 。这就是要求的关系式。

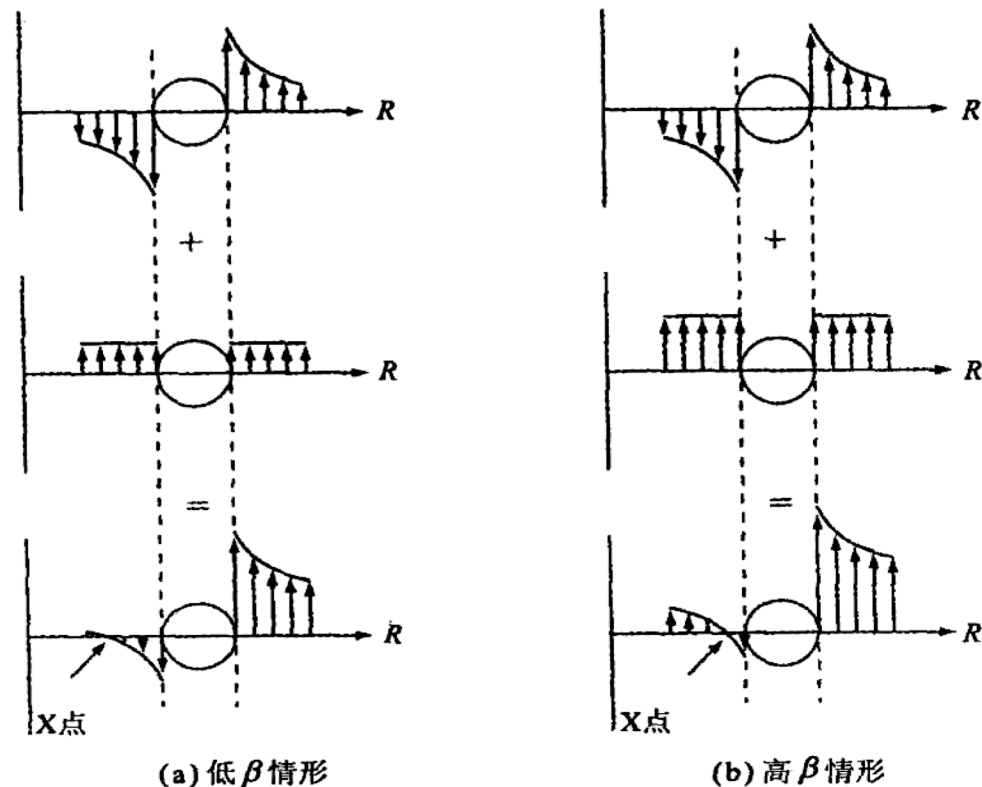
7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——平衡

■ 3. 平衡态 β 极限

- 平衡态解的一个有趣的特点是当电流（也就是 q_* ）固定时存在平衡态 β 极限。数学上看，这个极限的产生是因为 \hat{B}_θ 必须是实数。从极向磁场表达式可知，角度 $\theta = \pi$ 对应于环的内侧，它规定了实现 \hat{B}_θ 的最严格的限制，即要求 $k^2 \leq 1$ 。等价地，极向磁场表达式对应的极限要求 $\hat{B} \leq 1$ 。这相当于要求存在如下的平衡态 β 极限：

$$\frac{\beta q_*^2}{\varepsilon} \leq \frac{\pi^2}{16} \approx 0.62$$

- 对于固定的几何形态来说，这实际上就是 β/I^2 的极限。
- 右图从原理上展示了环向力平衡是如何通过外加垂直场实现的，研究它可以搞清楚平衡态极限的物理起源。注意到在环的内侧，垂直场和等离子体电流的 B_θ 指向相反。显然，在等离子体外侧的某一点，它们完全抵消；净极向场为零。 $\hat{B}_p = 0$ 的点被称为通量分离面的“X点”。



平衡态 β 极限的物理根源表明，对于不同的 β 值，X点的位置不同（两种情形中等离子体电流保持恒定，高 β 情形下，为了达到环向力平衡，必须增强垂直场）

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——平衡

- 现在假设 β 增加但是等离子体电流保持不变。根据上图，这意味着等离子体电流贡献的 B_θ 的大小不变。所以，为了维持环向力平衡，垂直场必须增加。结果是X点向等离子体表面移动。最终，在 β 足够高时X点移到等离子体表面上。此时等离子体达到其平衡态 β 极限。对于圆截面等离子体，这个 β 值不可能再增加了。要进一步增加 β ，就需要减小等离子体的内侧部分。
- 最后，注意到X点移动到等离子体表面时，在 $\theta = \pi$ 处有 $\hat{B}_\theta = 0$ 。这就是在平衡态极限情形下 $q(a) \rightarrow \infty$ 的原因。然而，尽管 $\hat{B}_\theta(a, \pi) = 0$ ，但等离子体仍保持其有限的固定值。这就解释了高 β/ε 时 $q(a)$ 和 q_* 之间的偏差。

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 现在用表面电流模型对圆截面托卡马克进行稳定性分析。与直圆柱相比，环形位形更加复杂，因为环效应将扰动的所有极向谐波耦合起来。也就是说，关于环向角 ϕ 和极向角 θ 的合适的傅里叶分析为：

$$\xi(\theta, \phi) = e^{-in\phi} \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_m e^{im\theta}$$

- 其结果是，最终的本征值方程是由无限多个关于未知傅里叶振幅 ξ_m 的耦合代数方程组构成的。令这组方程式的行列式为零，可得到临界稳定性条件。而且分析表明，最不稳定的环向模数对应于 $n \sim 1$ 。
- 方法：从无限方程组导出一般的本征值关系式，然后截断傅里叶级数，在两种极限情形下来确定临界稳定性条件， $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$ 极限对应于扭曲模的 q_* 的临界值，而 $\hat{\beta} \rightarrow 1$ 的平衡态极限对应于气球-扭曲模式的 β/ε 的临界值。

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

■ I. 等离子体的贡献

- 等离子体对稳定性分析的贡献可通过解如下方程得到：

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

- 对于 $n \sim 1$ ，大环径比展开意味着：

$$\nabla^2 V_1 \approx \nabla_p^2 V_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta^2} = 0$$

- 在等离子体内，上式必须根据正则性来求解，并且对 ε 展开的第一阶有：

$$\left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_a = - \frac{inB_0}{R_0} \xi(\theta, \phi)$$

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 易得其解为：

$$V_1 = e^{-in\phi} \sum_{m \neq 0} A_m \left(\frac{r}{a}\right)^{|m|} e^{im\theta}$$

- 其中， $A_m = -\frac{in\epsilon B_0}{|m|} \xi_m$ 。
- 注意到求和中 $m = 0$ 项已被消去。这是因为在大环径比展开中， $\nabla \cdot \xi = 0$ 的条件意味着 $\xi_0 = 0$ 。现在可以容易地计算出稳定性分析所需的物理量 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1|_a$ ：

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1 \Big|_a = \mathbf{B} \cdot \nabla V_1 \Big|_a = -\frac{aB_0^2}{R_0^2} e^{-in\phi} \sum_{m \neq 0} \frac{n^2}{|m|} \xi_m e^{im\theta}$$

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

■ II. 真空的贡献

- 对真空的贡献的分析与前面类似。在大环径比极限下，真空势满足：

$$\nabla^2 \hat{V}_1 \approx \nabla_p^2 \hat{V}_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{V}_1}{\partial \theta^2} = 0$$

- 边界条件稍为复杂些。如果壁远离等离子体，那么对于 $a < r < \infty$ ， \hat{V}_1 必须是正则的。在等离子体——真空界面上，边界条件可以写为：

$$\left. \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \right|_a = \mathbf{e}_r \cdot \nabla \times (\xi \times \hat{\mathbf{B}}) \Big|_a = -\frac{i n B_0}{R_0} \xi + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{B}_\theta \xi)$$

- 解可写为：

$$\hat{V}_1 = e^{-i n \phi} \sum_{m \neq 0} \hat{A}_m \left(\frac{a}{r} \right)^{|m|} e^{i m \theta}$$

- 其中， \hat{A}_m 经过简单计算可得： $\hat{A}_m = -\frac{i \epsilon B_0}{|m|} \sum_{p \neq 0} G_{mp} \xi_p$

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 而矩阵元 G_{mp} 为：

$$G_{mp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{mB_\theta}{\varepsilon B_0} - n \right) \cos[(m-p)\theta] d\theta$$

- 实际上 G_{mp} 是通过数值计算得出的，尽管对于某些特殊情形它可以有解析解。显然， G_{mp} 不是矩阵对角元，这一事实表明不同极向谐波之间存在耦合。
- 真空分析的最后一步是计算稳定性分析所需的物理量 $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a$ 。经过简单计算我们发现：

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a = \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{V}_1|_a = \frac{aB_0^2}{R_0^2} e^{-in\phi} \sum_{p \neq 0} \sum_{l \neq 0} \frac{G_{1l}G_{lp}}{|l|} \xi_p e^{im\theta}$$

- 对于感兴趣的两种特殊情形，双重求和可解析地进行。

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

■ III. 压强平衡匹配条件

- 稳定性分析的最后一步是将等离子体和真空的贡献代入压强平衡匹配条件。对于大环径比圆截面托卡马克，这个条件简化为：

$$[\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1]_a = \frac{\hat{B}_\theta^2}{a} \xi + \frac{\beta B_0^2}{R_0} \xi \cos \theta$$

- 等号右侧第一项代表极向场曲率的不稳定效应。这一项尽管随角度 θ 变化，但它始终为正，对应于坏曲率。右侧第二项代表环向磁场线曲率的效应。此项在环外侧（ $\theta = 0$ ）为正，而在环内侧（ $\theta = \pi$ ）为负。在环外侧，磁场线曲率凹向等离子体，意味着坏曲率。反过来，在环内侧，磁场线曲率凸向等离子体，意味着好曲率。托卡马克中最危险的扰动是其中存在强的气球模成分，而曲率的这种摇摆不定正是其主要原因，扰动引起的位移在环外侧会变得越来越强，而在环内侧则越变越弱。

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 上式右侧的计算就简单多了。代入平衡场后可得出：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hat{B}_\theta^2}{a} \xi &= \frac{a B_0^2}{R_0^2} e^{-in\phi} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{q^2} \left(1 - \hat{\beta} + \frac{\pi^2}{4} \hat{\beta} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \xi_m e^{im\theta} \\ \frac{\beta B_0^2}{R_0} \xi \cos \theta &= \frac{a B_0^2}{R_0^2} e^{-in\phi} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{\beta}{\varepsilon} \xi_m \cos \theta \right) e^{im\theta} \end{aligned} \right\}$$

- 和以前一样，这里 $\hat{\beta} = (16/\pi^2)(\beta q_*^2/\varepsilon)$ 。

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 现在可以导出压强平衡匹配条件的最终形式了。经过简单计算，得到：

$$\sum_{p \neq 0} W_{mp} \xi_p e^{im\theta} = 0$$

- 其中，矩阵元 $W_{mp} = W_{pm}$ 由下式给出：

$$W_{mp} = \left\{ \frac{n^2}{|m|} - \left[\frac{1}{q_*^2} + \left(2 - \frac{16}{\pi^2} \right) \frac{\beta}{\varepsilon} \right] \right\} \delta_{m-p} - \frac{3\beta}{2\varepsilon} (\delta_{m-p-1} + \delta_{m-p+1}) + \sum_{l \neq 0} \frac{G_{lm} G_{lp}}{|l|}$$

- δ_k 是熟悉的克罗内克德尔塔函数： $\delta_0 = 1, \delta_{k \neq 0} = 0$ 。因为每个极向模数 m 是独立的，故 $\sum_{p \neq 0} W_{mp} \xi_p e^{im\theta} = 0$ 实际上代表了一组方程。也就是说，每个谐波的系数均必须为零。由此得到关于未知量 ξ_m 的一组线性齐次代数方程：

$$\sum_{n \neq 0} W_{mp} \xi_p = 0。 \quad (\text{对每一个 } m \neq 0)$$

- 上式就是本征值条件表达式。若要求存在非平凡的解，则 \overleftrightarrow{W} 的行列式必须为零。令 $\det \overleftrightarrow{W} = 0$ 就可得出临界稳定性条件。

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

■ IV. $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$ 扭曲不稳定性

- 一般本征值关系的第一个应用是考虑 $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$ 时的扭曲模不稳定性。分析表明，在低 β 极限下，电流存在临界值（即 q_* ）。如果电流过大，等离子体是不稳定的。反过来，如果电流足够小，等离子体对于扭曲模是稳定的。
- 随着 $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$ ，矩阵 $\overset{\leftrightarrow}{W}$ 变成对角阵，这时对扭曲模的分析可以极大地简化。因此，在这个极限情形下，极向谐波退耦，对每个 m 值可以分别处理。退耦的原因是在 $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$ 极限下，极向场简化为：

$$\frac{\hat{B}_\theta}{\varepsilon B_0} = \frac{1}{q_*} = \text{常数}$$

- 即不存在角度耦合。这一点可以通过计算真空矩阵元 G_{lm} 清楚地看出来，此时 G_{lm} 简化为：

$$G_{lm} = \left(\frac{l}{q_*} - n \right) \delta_{l-m}$$

- 将此式代入 W_{mp} 的表达式后，得到矩阵元 W_{mp} 的简单表达式：

$$W_{mp} = \left[\frac{n^2}{|m|} - \frac{1}{q_*^2} + \frac{1}{|m|} \left(\frac{m}{q_*} - n \right)^2 \right] \delta_{m-p} = \frac{2}{|m|q_*^2} \left[\left(nq_* - \frac{m}{2} \right)^2 + \frac{|m|(|m| - 2)}{4} \right] \delta_{m-p}$$

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 稳定性要求每一个矩阵元 $W_{mp} > 0$ 。由上式的第二个等式立刻得知，对于任何 $m \geq 2$ ，等离子体对于扭曲模是稳定的。不稳定性仅当 $m = 1$ 时才可能发生。对于这种情形，简单计算表明，如果 $0 < nq_* < 1$ ，则存在不稳定性。由 $n = 1$ 时出现的关于 q_* 的最严格的限制可引出稳定性条件：

$$q_* > 1$$

- 这个稳定性边界被称为克鲁斯卡尔-沙弗拉诺夫极限。它可写成最大允许电流的形式：

$$I \leq I_{max} \equiv \frac{2\pi a^2 B_0}{\mu_0 R_0}$$

- 对于简单反应堆，可得 $I_{max} = 19 \text{ MA}$ 。采用平滑参数分布得到的更实际的数值计算结果表明，表面电流模型有些过于乐观了。根据参数分布， q_* 值更确切的范围是 $2 < q_* < 3$ ，这使得最大电流减小为 $6.3 \text{ MA} < I_{max} < 9.4 \text{ MA}$ 。值得注意的是，如果托卡马克具有非圆截面，则 I_{max} 较这些值有显著增加。
- 分析的结论是，对于给定的几何形态和环向磁场，环向电流不能太大，否则将引起电流驱动的不稳定性。换句话说，需要足够强的环向磁场才能使托卡马克对于 $m = 1$ 模保持稳定，这种模在单纯Z箍缩中总是不稳定的。

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

■ V. $\beta q_*^2/\varepsilon \rightarrow \pi^2/16$ 气球-扭曲模不稳定性

- 一般压强平衡匹配条件的最重要的应用也许当属计算抑制气球-扭曲模的 β 极限。根据表面电流模型，假设等离子体运行在由 $\beta q_*^2/\varepsilon \rightarrow \pi^2/16$ 定义的最大平衡 β 曲线上的某一点，那么这种不稳定性所对应的 β 极限就可以计算出来。这个平衡 β 极限实际上是 $\beta/I^2 \sim \beta q_*^2/\varepsilon$ 的极限。利用压强平衡匹配条件可得稳定的最大电流或者等价的最低的 q_* 。

- 尽管 β 极限的计算过程很直接，但是细节非常复杂。所以，为了保持思路的连贯性，这里仅列出关键步骤。
但分析中有两个重要的简化需要指出。首先，尽管数值计算 \vec{W} 的行列式时可以保留极高次谐波分量，但对于目前的任务来说，对这个矩阵截取到三阶就够了： $m = 1, 2, 3$ 。与数值结果相比，由此得到的结果已足够精确。第二处简化是，因为在平衡 β 极限处，极向磁场可简化为：

$$\frac{\hat{B}_\theta}{\varepsilon B_0} = \frac{\pi}{2q_*} |\cos(\theta/2)|$$

- 这个简单形式可以解析计算矩阵元 G_{lm} 。经过简单计算得到：

$$G_{lm} = -n\delta_{l-m} - (-1)^{l-m} \frac{1}{q_*} \frac{l}{4(l-m)^2 - 1}$$

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 只需将这些简化结果代入 3×3 矩阵的压强平衡匹配条件，即可得到如下临界稳定性判据：

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{12} & W_{22} & W_{23} \\ W_{13} & W_{23} & W_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = 0$$

- 这里利用了对称关系 $W_{mp} = W_{pm}$ 。从 W_{mp} 表达式可以直接求出矩阵元。经过简单计算可得如下 W_{mp} 的表达式（尽管不是十分直观但富有启发性）：

$$\left. \begin{aligned} W_{11}/n^2 &= 2 - 2\left(\frac{1}{nq_*}\right) - \left[\frac{\pi^2}{8} - M_{11}\right]\left(\frac{1}{n^2q_*^2}\right) \\ W_{22}/n^2 &= 1 - 2\left(\frac{1}{nq_*}\right) - \left[\frac{\pi^2}{8} - M_{22}\right]\left(\frac{1}{n^2q_*^2}\right) \\ W_{33}/n^2 &= \frac{2}{3} - 2\left(\frac{1}{nq_*}\right) - \left[\frac{\pi^2}{8} - M_{33}\right]\left(\frac{1}{n^2q_*^2}\right) \\ W_{12}/n^2 &= -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{nq_*}\right) - \left[\frac{3\pi^2}{32} + M_{12}\right]\left(\frac{1}{n^2q_*^2}\right) \\ W_{23}/n^2 &= -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{nq_*}\right) - \left[\frac{3\pi^2}{32} + M_{23}\right]\left(\frac{1}{n^2q_*^2}\right) \\ W_{13}/n^2 &= \frac{2}{15}\left(\frac{1}{nq_*}\right) + M_{13}\left(\frac{1}{n^2q_*^2}\right) \end{aligned} \right\}$$

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 其中数值系数 M_{mp} 由下式给出：

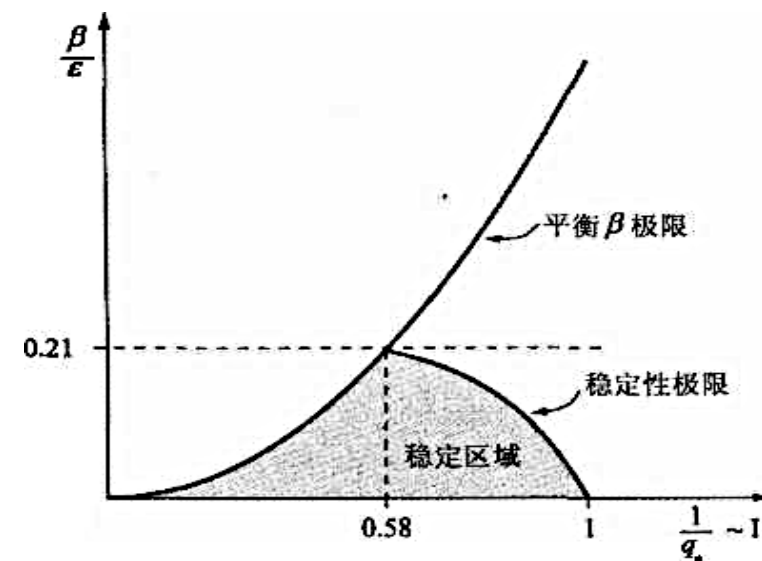
$$M_{mp} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{|l|}{[4(l-m)^2 - 1][4(l-p)^2 - 1]}$$

- 值得注意的是矩阵元 W_{mp} 的形式。由于考虑的是沿平衡 β 极限曲线运行的平衡，每个 W_{mp} 都可以写成量 $1/nq_*$ 的多项式函数： $W_{mp} = A_{mp} + B_{mp}/nq_* + C_{mp}/n^2q_*^2$ 。因此只要算出系数 M_{mp} ，计算矩阵 W 的行列式（它是 $1/nq_*$ 的六次多项式）就很简单了。用数值方法计算 M_{mp} 很简单，当然我们也可以采用复杂的计算得到解析解： $M_{11} = 5/4, M_{22} = 89/36, M_{33} = 1111/300, M_{12} = -11/12, M_{23} = -277/180, M_{13} = 1/180$ 。
- 采用数值求解方法容易得到 $1/nq_*$ 多项式的根。就稳定性而言，限制性最强的根是 $nq_{*crit} = 1.67$ 。如果精确到20阶极向谐波分量，可以得到更为准确的数值计算结果： $nq_{*crit} = 1.71$ ，这个值将来会用到。另外，由于对于稳定性有 $q_* \geq q_{*crit}$ ，故 $n = 1$ 显然是最不稳定的模式。
- 最终结果是，对于圆截面托卡马克，抑制气球-扭曲模稳定的最低 nq_* ，以及对应的最大 β 分别为：

$$\left. \begin{aligned} q_* &\geq q_{*crit} = 1.71 \\ \beta &\leq \beta_{crit} = \left(\frac{\pi}{4q_{*crit}} \right)^2 \varepsilon = 0.21 \frac{a}{R_0} \end{aligned} \right\}$$

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 上式的理解：
 - 对于环径比 $R_0/a = 2.5$ 的简单反应堆设计， β_{crit} 值为0.084，这与采用实际的扩散型参数分布的数值计算结果相比，表面电流模型的预测有些过于乐观了。
 - 比例关系 $\beta_{\text{crit}} \sim a/R_0$ 表明小环径比托卡马克是有利的，至少从磁流体力学分析的角度来看是这样。
 - 稳定的 q_* 的最小值从 $\beta/\varepsilon \rightarrow 0$ 时的 $q_* = 1$ ，提升到 $\beta/\varepsilon = 1$ 时的 $q_* = 1.71$ 。允许的最大等离子体电流减小了近一半。
- 稳定性的整体图像总结为右图所示的 β 关于 I 的曲线。显示了数值计算得到的平衡 β 极限曲线和整个稳定性曲线。稳定性极限的解析解对应于稳定性曲线的端点值。对于足够低的 β 且足够小的 I 的情形，存在一个稳定的运行区域。



圆截面托卡马克表面电流模型给出的完整的稳定性图，图中显示了数值计算得到的平衡 β 极限和稳定性极限

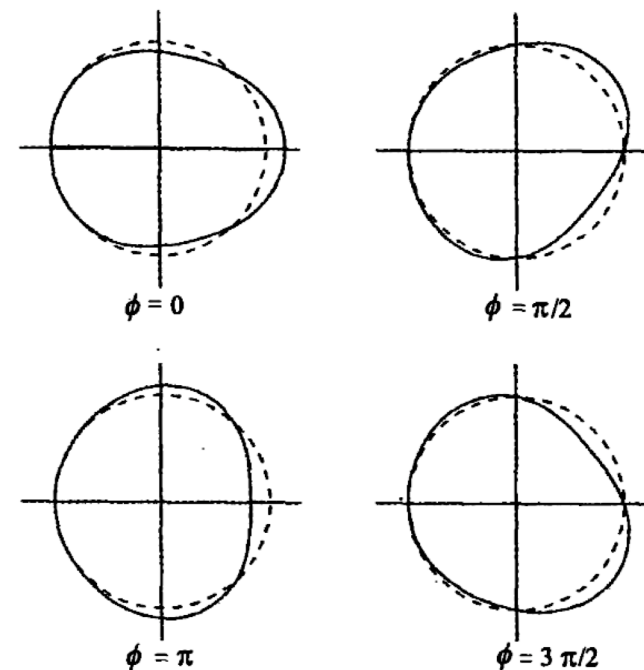
(D' Ippolito et al. (1976).
PPCNFR 1, 523)

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 了解本征函数的形状旨在证明“最不稳定的模式具有等离子体表面气球-扭曲扰动的形式”这一断言，通过解临界稳定性判据表达式得到 ξ_m 的相对幅度来进行。利用临界稳定性点对应的参数，计算发现扰动主要成分是 $m = 2$ 的极向谐波，其边带相对幅度为

$$\xi_1/\xi_2 \approx \xi_3/\xi_2 \approx 0.43$$

- 本征函数的形状如右图所示：在4个不同环向角位置上未扰动表面 $r = a$ 与扰动表面 $r = a + \xi_1 \cos(\theta - \phi) + \xi_2 \cos(2\theta - \phi) + \xi_3 \cos(3\theta - \phi)$ 的对比，这里假设 $\xi_2/a = 0.09$ 。注意到表面扭曲沿环向角旋转，它表明了这种不稳定性的扭曲特性。另外，环外侧的扰动总是远大于内侧： $r(\theta = 0) - a = 1.86\xi_2 \cos\phi$ ，而 $r(\theta = \pi) - a = 0.14\xi_2 \cos\phi$ 。表明在坏曲率区域，扰动具有向气球模转化的趋势。
- 以上是利用表面电流模型对大环径比、圆截面托卡马克的稳定性分析。将理论预言的 β/ε 极限与采用实际的扩散性参数分布得到的更细致的数值结果进行比较是很有意思的。



4个不同环向角位置上扰动的等离子体截面

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

■ VI. 特鲁瓦永 β 极限

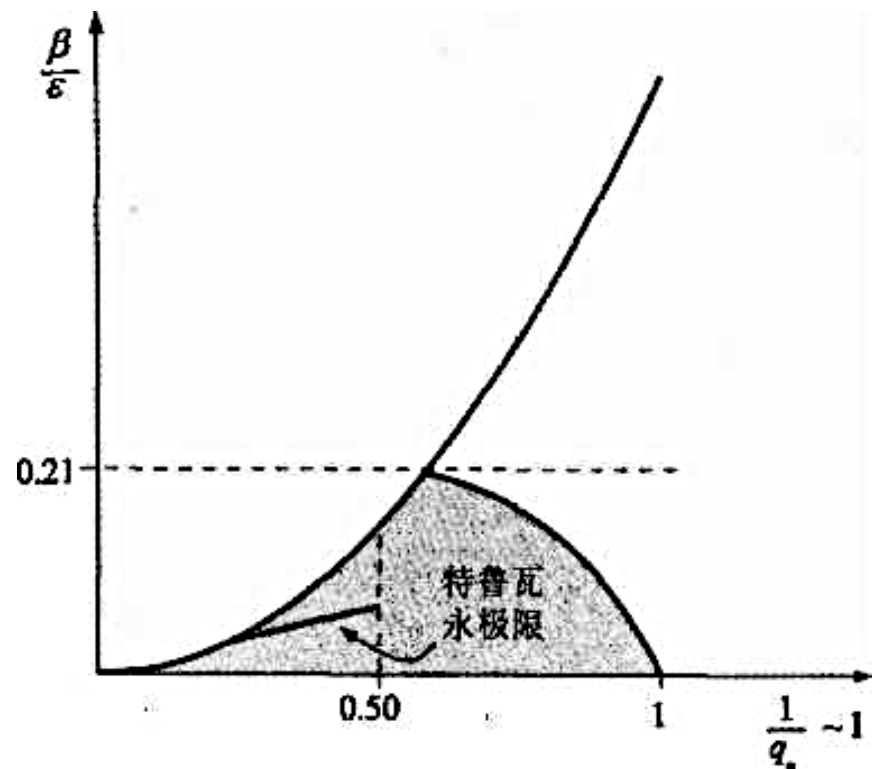
- 对抑制理想磁流体力学不稳定性所需的总体 β 极限进行了多方面的数值研究。应用最广泛的一个结果是特鲁瓦永（Troyon）及其同事给出的所谓“特鲁瓦永极限”——抑制所有理想磁流体力学模（外部扭曲模和气球模、内部模、局部模，等等）的稳定性，尽管通常外部气球模是最严重的。研究中没有理想导体壁来提供额外的稳定性。
- 稳定性分析的目的在于要确定实际几何形态和参数分布下可能的最大稳定 β 值。为此特鲁瓦永及其同事通过不断改变实际可能的等离子体截面形状以及压强和电流分布来对这些参数进行优化。
- 数值研究表明，拉长的三角形截面对稳定性是最有利的。平坦的压强分布和内部安全因子分布也是有利的。经过相当深入的数值研究，特鲁瓦永及其同事得到了一个关于最优 β 极限的相当简单的经验公式：

$$\beta \leq \beta_{\text{crit}} \equiv \beta_{\text{N}} \frac{1}{aB_0}$$

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 其中， β_N 是数值计算得出的系数，当电流 I 的单位取MA时,其值为 $\beta_N = 0.028$ 。通常 β 以百分比表示，此时 $\beta_N = 2.8$ 。
- 尽管在拉长的三角形截面情形下 I/aB_0 才有最大值，但是上式给出的 β 极限对于任何截面都是适用的，只要它在优化电流和压强分布的过程中保持不变。所以，为了与表面电流模型结果进行比较，可以将上式改写为下述更方便的圆截面托卡马克的形式：

$$\beta \leq \beta_{\text{crit}} \equiv 0.14 \frac{\varepsilon}{q_*}$$



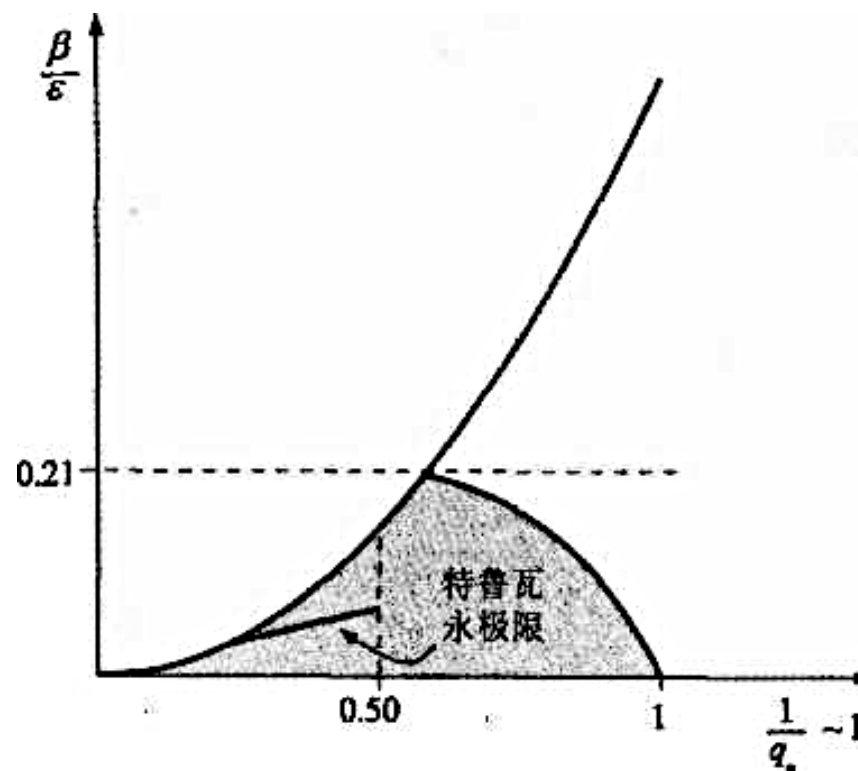
特鲁瓦永极限与表面电流稳定性图的叠加

7.1 托卡马克——圆截面托卡马克——稳定性

- 右图是叠加了表面电流模型的稳定性结果。可以看到，表面电流模型显得过分乐观了。在确定总体稳定的最大 β 值方面，特鲁瓦永极限并不完全令人满意，因为它并未明确说明稳定的 q_* 的最小值。一般地， q_* 是几何条件和参数分布的弱函数，对于圆截面托卡马克，近似有 $q_* \approx 2$ 。利用这个有点含糊不清的值，发现圆截面托卡马克中最大的稳定 β 为：

$$\beta \leq \beta_{max} \equiv 0.07 \frac{a}{R_0}$$

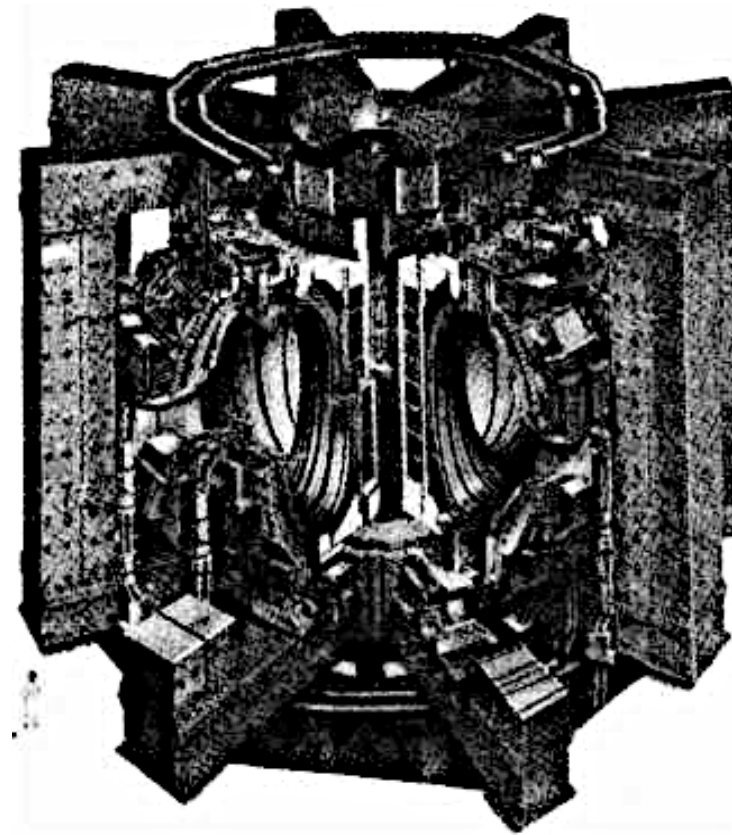
- 由特鲁瓦永极限和表面电流模型可以得到相同的 β 与环径比的定标关系： $\beta \sim a/R_0$ 。但是数值系数减小到约为原来的三分之一。所以特鲁瓦永极限对于 $R_0/a = 2.5$ 预言的最大 β 值约为0.028。这个值比反应堆要求的要低。



特鲁瓦永极限与表面电流稳定性图的叠加

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

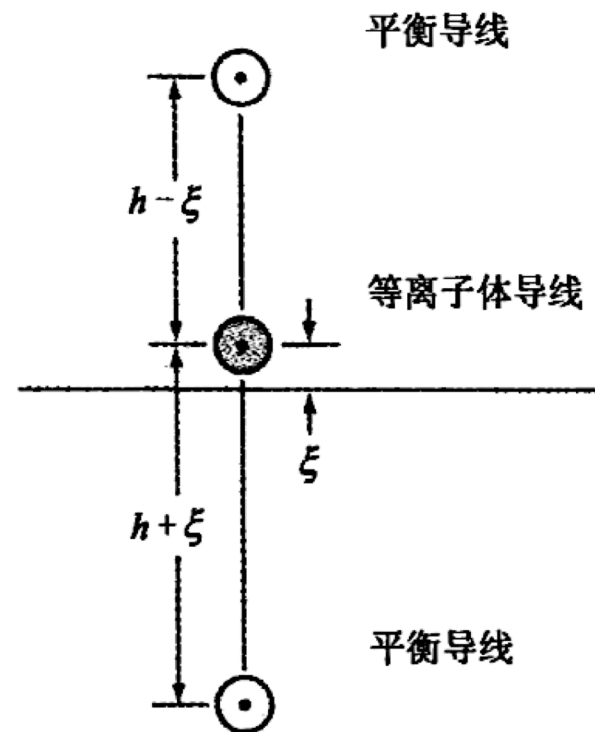
- 提高托卡马克中 β 极限设想之一是允许等离子体具有非圆截面，研究表明，稳定性对于同时具有拉长和指向外的三角形截面是最优的。一个著名的例子是位于英国牛津附近的JET 装置，如右图展示的非圆截面。
- 非圆截面对磁流体力学稳定性的影响有两个重要方面：
（1）针对 $n = 1$ 气球-扭曲模的 β 极限，临界 β 随拉长比线性增加；（2）对于实际可实现的最大拉长比，临界 β 存在极限。分析表明， $n = 0$ 的轴对称扰动（即均匀的垂直位移）会驱动起拉长截面托卡马克中的不稳定性，其具有电阻壁模的形式，但实际的反馈系统仅对约小于1.8的拉长比才是可能的。
- 最终结果是：拉长截面托卡马克在实验中实现了相当高的、接近反应堆要求的 β 值。剩下的问题是，这种压强和电流分布尽管稳定但只能产生份额不大的自举电流，其在总电流中所占比例离反应堆得要求还相差甚远。



具有拉长和指向外侧的三角形非圆截面的JET图示

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

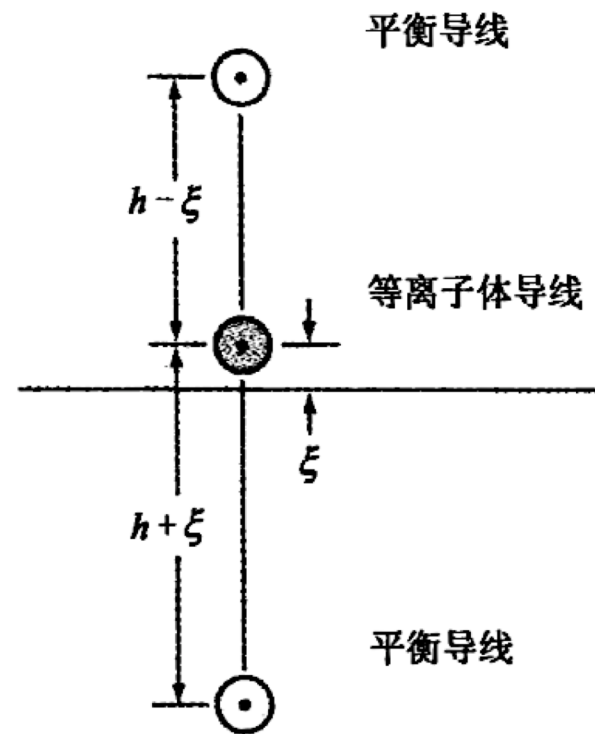
- 1. $n = 0$ 轴对称不稳定性
- 多年来，在托卡马克实验中，通过反馈稳定 $n = 0$ 不稳定性几乎已成为日常例行任务。这种模式的基本物理机制既不涉及环效应，也与有限的等离子体压强无关，在具有拉长截面的低 β 托卡马克中就会出现。值得注意的是，通过将等离子体抽象为一根简单的载流 I 的导线就可以容易地建立起具有这种模式关键特征的模型，简化为单纯的静磁问题。
- 对 $n = 0$ 模的最简单的解释可通过仔细观察右图得出。如图所示，假设等离子体导线与两个等距的导线保持平衡。为了在竖直方向拉长等离子体，平衡导线的电流方向必须与等离子体电流同向。这样两根平衡导线产生的吸引力分别“拖拽”等离子体的顶部和底部，使得它被拉长。



演示 $n = 0$ 垂直不稳定性的简单导线模型

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

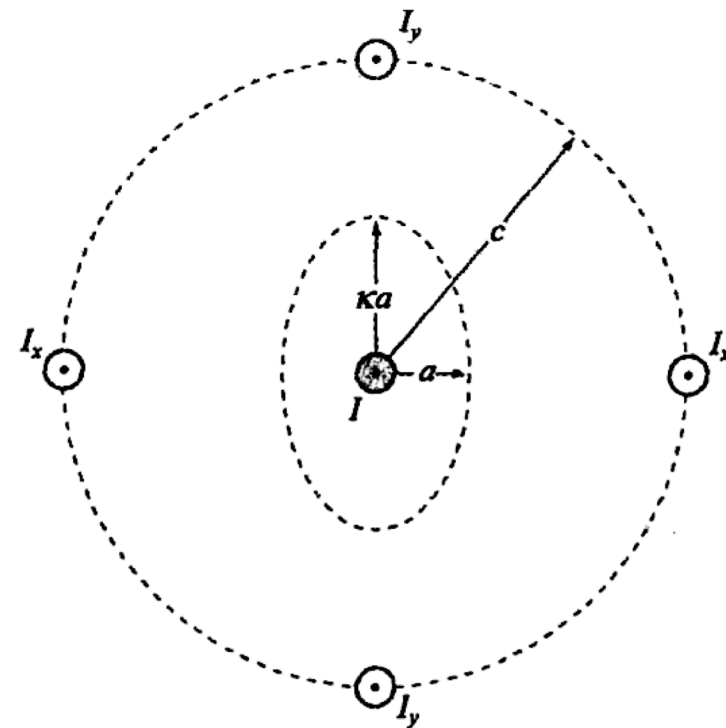
- 现在假设等离子体导线受到一个很小的朝向上方导线的垂直位移 ξ 。上方导线对等离子体导线的力与它们之间的距离成反比。所以，这种垂直位移使得等离子体导线与上方导线彼此靠近了一点，向上的拉力增加了。类似地，下方导线的拉力减小，因为它距离等离子体远了一点。结果，作用在等离子体导线上的合力方向向上。就是说，合力的方向指向将等离子体导线推向更加偏离平衡位置的方向。显然这对应于不稳定的情形。
- 这种不稳定性的行为可以通过更为实际的等离子体和平衡线圈的导线模型来量化。



演示 $n = 0$ 垂直不稳定性的简单导线模型

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 2. 更实际的 $n = 0$ 导线模型
- 考虑右图所示的导线模型。其中等离子体依然被抽象为载流 I 的单根导线。它与4根与其相距 c 的等距“平衡”导线构成平衡态。为了模拟实际压强平衡的情形，每根平衡导线所携电流与等离子体电流方向相反。由此产生的斥力即为压强平衡所需的“推”力。等离子体的拉长是通过假设 $I_y < I_x$ 来实现的，即垂直导线的推力比水平导线的小，因而产生了拉长的等离子体。

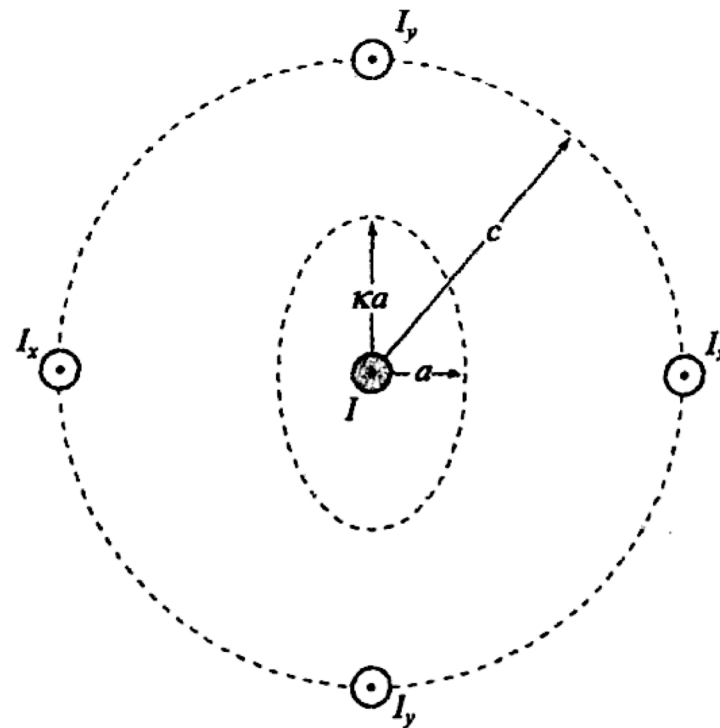


用于分析 $n = 0$ 垂直不稳定性的导线模型₄₄

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 分析的关键是确定产生给定的所需拉长比的 I_y 和 I_x 之间的明确关系：
 - 假设等离子体的等效水平半宽度 $s_x/2 = a$ 。类似地，假设等离子体的等效半高度为 $s_y/2 = \kappa a$ ，其中 $\kappa = s_y/s_x$ 定义为拉长比。通过要求水平和垂直边界点在同一磁面上即可明确 I_y 和 I_x 之间的关系。
 - 根据矢势，这相当于 $A_z(\kappa a, 0) = A_z(0, a)$ 。利用静磁学中的矢势（也就是通量）与载流导线之间的关系 $A_{z,j} = (\mu_0 I_j / 2\pi) \ln r_j$ ，其中 r_j 是从第 j 根导线的中心测得的径向距离。对等离子体和平衡导线求和，可得所需的 I_y 和 I_x 之间的关系：

$$I_y \ln \left(\frac{c^2 - \kappa^2 a^2}{c^2 + a^2} \right) + I_x \ln \left(\frac{c^2 + \kappa^2 a^2}{c^2 - a^2} \right) - I \ln \kappa = 0$$



用于分析 $n = 0$ 垂直不稳定性的导线模型⁴⁵

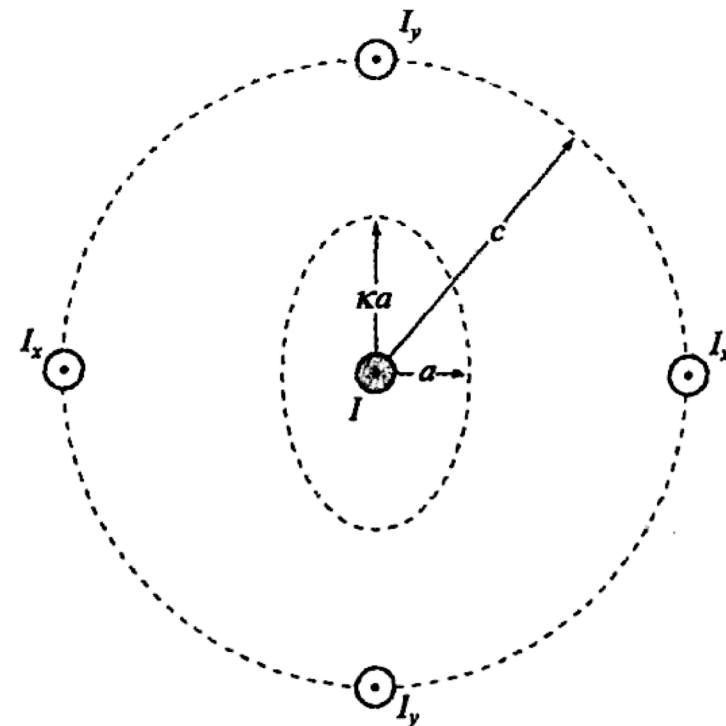
7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 取平衡导线远离等离子体 ($c \gg a$) 的极限, 上式化简为

$$I_x - I_y = \frac{c^2}{a^2} \frac{\ln \kappa}{1 + \kappa^2} I$$

- $n = 0$ 模的稳定性分析: 假设等离子体经历一个很小的垂直位移 ξ , 但是所有导线电流, 包括等离子体电流都保持不变。考察作用在等离子体导线上的垂直扰动的合力: 为正, 它增大位移, 因而等离子体是不稳定的; 为负, 即等离子体返回平衡位置, 则对应于稳定性。
- 电流 I_j 受到电流 I_i 的作用力 $F_{ij} = -(\mu_0 L I_i I_j / 2\pi r_{ij}) \mathbf{e}_{ij}$, 其中, L 是导线长度; \mathbf{e}_{ij} 是连接导线 i 指向导线 j 方向上的单位矢量。反方向的电流, F_{ij} 对应排斥力。作用在等离子体上的垂直力为:

$$F_y = \frac{\mu_0 L I}{2\pi} \left[-\frac{I_y}{c - \xi} + \frac{I_y}{c + \xi} + 2 \frac{\xi I_x}{(c^2 + \xi^2)^{1/2}} \right]$$



用于分析 $n = 0$ 垂直不稳定性的导线模型⁴⁶

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 线性化后可得如下的关于垂直方向扰动力的表达式：

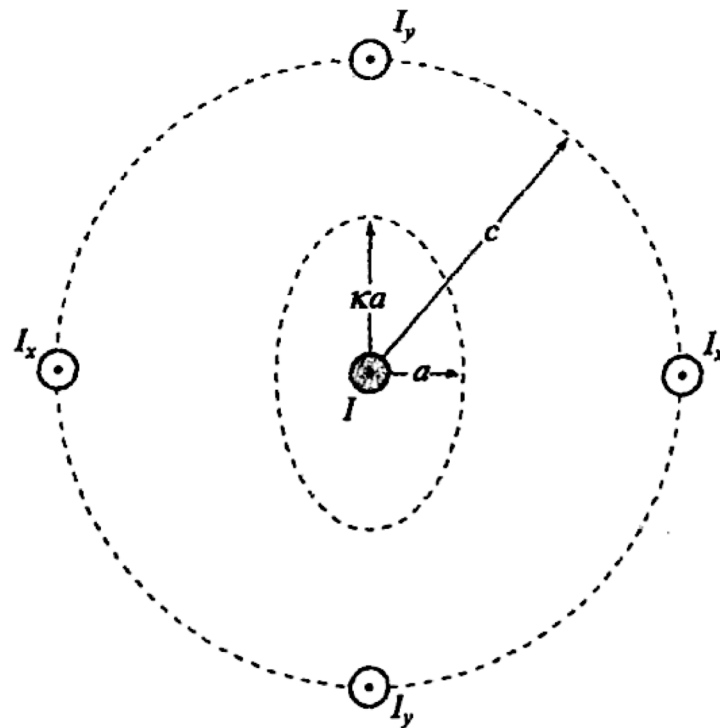
$$\delta F_y = \frac{\mu_0 L I^2}{\pi} \left(\frac{I_x - I_y}{I} \right) \frac{\xi}{c^2}$$

- 稳定性条件 $\delta F_y < 0$ 简化为：

$$\frac{I_x - I_y}{I} < 0$$

- 代入式 $I_x - I_y = \frac{c^2}{a^2} \frac{\ln \kappa}{1 + \kappa^2} I$ 给出的平衡关系即得到最终结果，一个用拉长比表示的稳定性条件：

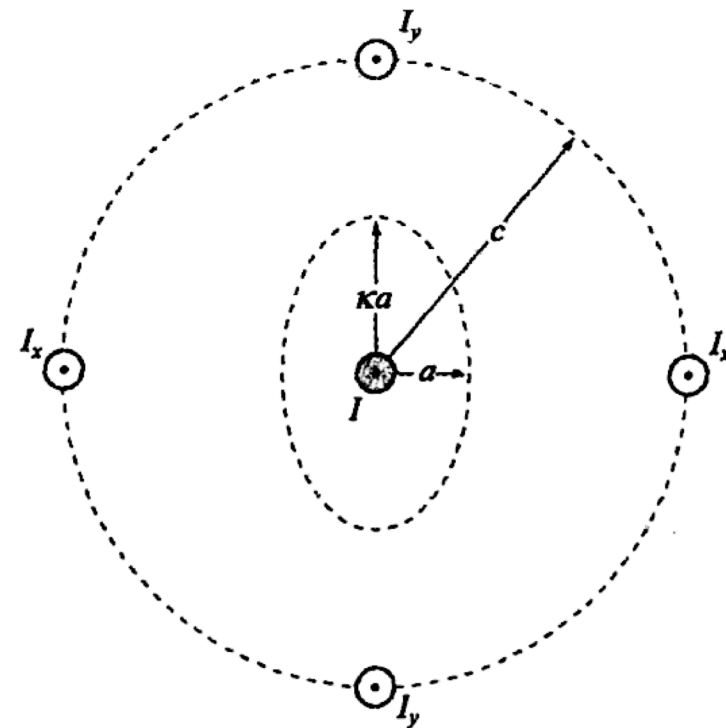
$$\frac{\ln \kappa}{1 + \kappa^2} < 0$$



用于分析 $n = 0$ 垂直不稳定性的导线模型⁴⁷

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 正如预想的那样，对任何垂直拉长的等离子体，有 $\kappa > 1$ ，因此是不稳定的；而扁平等离子体的 $\kappa < 1$ ，故对于垂直位移是稳定的。但是根据对称性，这样的等离子体对于水平位移将是不稳定的。
- 那么怎样才能产生拉长的等离子体呢？答案与分析中所做的重要假设——所有电流在等离子体被扰动偏离平衡位置时是不变的——有密切关系。如果在等离子体电流和平衡电流之间插入理想导体壁，这个限制条件就变了。当等离子体中产生位移时，通量守恒在壁中感应出涡流，它的方向指向产生稳定性的方向。理想导体壁对于 $n = 0$ 模的稳定性的定量分析正是下面要讨论的问题。

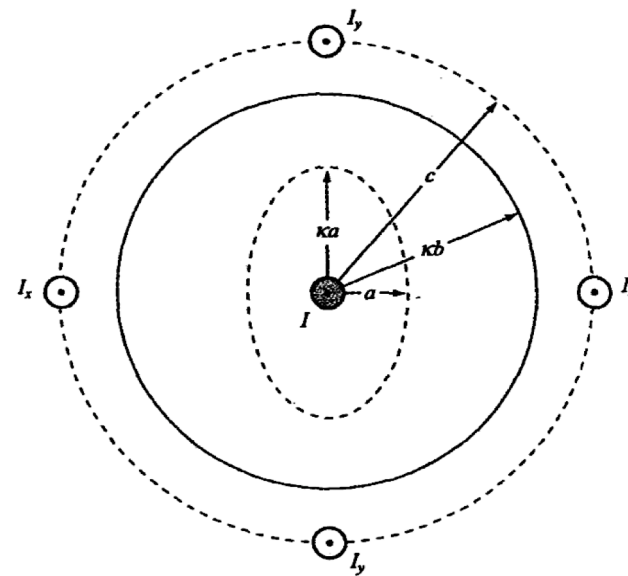


用于分析 $n = 0$ 垂直不稳定性的导线模型⁴⁸

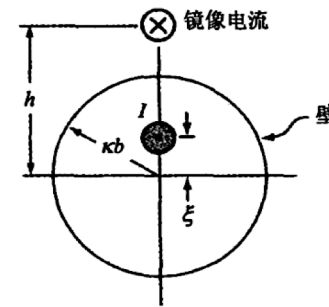
7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

■ 3. 理想导体壁对 $n = 0$ 模的稳定作用

- 右图给出了一种分析理想导体壁效应的简单方法。由图可知，在等离子体和平衡导线之间插入了一层圆形的直径为 κb 的理想导体壁。选取因子 κ 是为了数学上的方便，这样壁移动到等离子体的表面的极限对应于 $b/a \rightarrow 1$ 。分析的目标是导出作为确定 b/a 函数的最大可实现的 κ 的临界稳定性条件。
- 在将这个问题进行数学形式化时，对于理想导体壁，假设开始时壁具有很大但是有限的电导率。经过足够长的时间周期，平衡导线产生的磁场通过壁完全扩散出去，磁场大小和无壁时相同。此时假设壁变为超导的，随后等离子体导线垂直向上移动 ξ 。平衡导线产生的磁场保持不变，因为它们被超导体锁定在无壁时的值上。换句话说，它们造成的使等离子体失稳的力与无壁时一样。但是，等离子体的运动在壁中感应出涡流，而这些感应电流产生一个额外的作用在等离子体导线上的力，这个力的方向是致稳的。



(a) 用于分析 $n=0$ 垂直不稳定性的导线模型

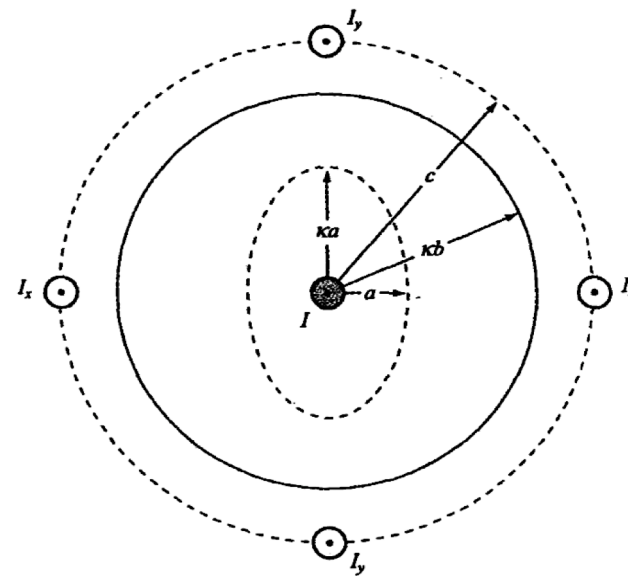


(b) 垂直移动的等离子体的等效镜像电流

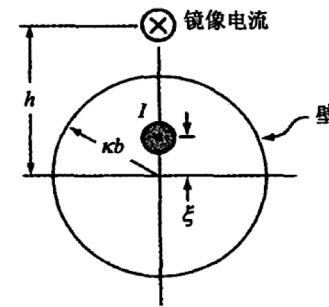
7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 致稳力的大小可以用镜像方法算出。众所周知，根据静磁学原理，用右图所示的壁外侧的镜像电流代替壁，就可以算出涡流造成的效应。镜像电流的大小必须取为 $I' = -I$ ，它与原点的距离必须为 $h = \kappa^2 b^2 / \xi$ 。选取这些参数后， $r = \kappa b$ 表面为磁面[也就是说，对于 $x = \kappa b \cos\theta$ 和 $y = \kappa b \sin\theta$ 有 $A_z(x, y) = \text{常数}$]。
- 现在将这种稳定性分析推广到考虑了镜像电流效应的情形。根据与 F_y 表达式相关的处理过程，容易得出作用在等离子体导线上的垂直扰动力的一般形式为：

$$\delta F_y = \frac{\mu_0 L I^2}{2\pi} \left[2 \left(\frac{I_x - I_y}{I} \right) \frac{\xi}{c^2} + \left(\frac{I'}{I} \right) \frac{1}{h} \right]$$



(a) 用于分析 $n=0$ 垂直不稳定性的导线模型



(b) 垂直移动的等离子体的等效镜像电流

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

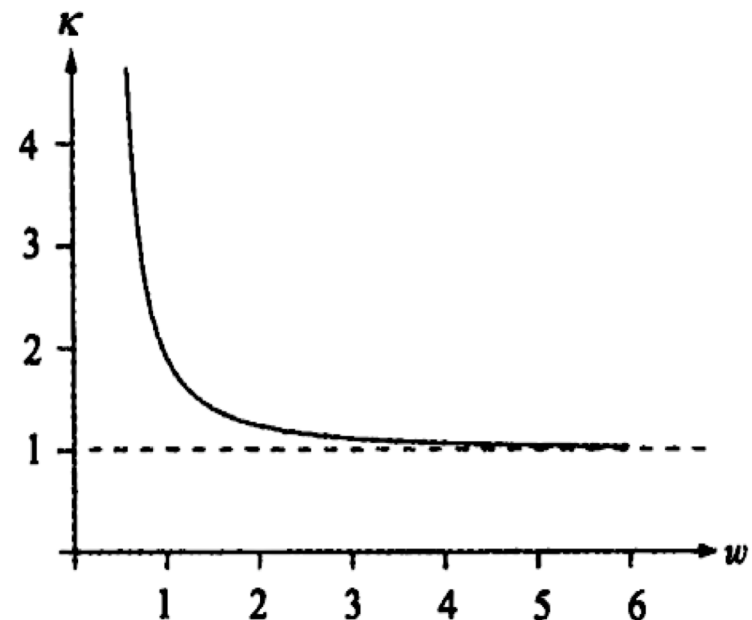
- 于是稳定性条件简化为：

$$2\left(\frac{I_x - I_y}{I}\right)\frac{\xi}{c^2} + \left(\frac{I'}{I}\right)\frac{1}{h} < 0$$

- 代入 $I_x - I_y$ 、 I' 和 h ，得到将最大可实现的 κ 与壁位置 $w \equiv b/c$ 联系起来的临界稳定性条件：

$$\frac{2\kappa^2}{1 + \kappa^2} \ln \kappa \leq \frac{1}{w^2}$$

- 这个关系式如右图所示。曲线的行为与预想的壁远离等离子体（ $w \rightarrow \infty$ ）的极限情形一致。其中，最大稳定拉长比退化为圆的拉长比情形： $\kappa \rightarrow 1$ 。壁移动到等离子体表面对应于 $w \rightarrow 1$ 情形，此时存在很强的壁致稳效应： $\kappa \approx 1.9$ 。但是，这个致稳效应不是无穷大（ $\kappa \rightarrow \infty$ ）。原因是，在导线模型稳定性分析中，导线中心（ $r = 0$ ）和壁（ $r = \kappa b$ ）之间的通量守恒，而不是等离子体表面（ $x = a \cos \theta, y = \kappa a \sin \theta$ ）和壁之间的通量守恒。换句话说，导线模型中壁移动到等离子体表面实际上对应 $w \rightarrow 0$ 而不是 $w \rightarrow 1$ 。



导线模型中临界稳定的拉长比 κ 随壁位置半径 $w = b/c$ 的变化

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 不管怎样，与实际情形的数值计算的结果相比，这样得到的实际拉长比的误差并不大。举例来说， $\kappa = 1.6$ 的拉长比要求壁靠近到 $w < 1.2$ ；等离子体才是稳定的。这相比于数值计算结果略为悲观，典型的数值结果为：对于环径比 $R_0/a = 3$ 的等离子体，根据不同的参数分布和截面形状，拉长比达到 $\kappa \approx 1.8$ 才要求 $w < 1.2 \sim 1.4$ 。
- 最后，如同前述，真实的壁的电导率是有限的。这意味着垂直位移不稳定性会转化为 $n = 0$ 的电阻壁模，因此需要通过反馈来致稳。所有现代托卡马克都具有紧密贴合的导体壳和抑制 $n = 0$ 模的反馈系统，实际运行中它们可以产生高达 $\kappa \approx 1.8$ 的拉长比。

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

■ 4. $n = 1$ 气球-扭曲模不稳定性

- 采用表面电流模型对截面拉长的托卡马克进行 $n = 1$ 模的稳定性分析。分析结果定性上类似于圆截面托卡马克的结果。也就是说，存在平衡态 β/I^2 极限，对于 I 的最大值时有低 β 扭曲模极限和决定最大 β/ε 的气球-扭曲模极限。定性来讲，所有与环径比成反比的定标关系都得到保留，主要差别在定义每个极限的数值因子现在变为拉长比的函数。总体上说，一个主要结论是，与气球-扭曲模有关的 β 极限随拉长比线性增加，这是一个极为有利的定标关系。最后，最高的稳定 β 是在 $n = 0$ 垂直不稳定性设定的最大拉长比下实现的。
- 具体数学过程与圆截面情形非常相似，只是横截面现在假设成拉长比为 κ 的椭圆。然而，即使对于这种简单的截面，结果也只能通过数值计算得到，因为这里除了有与环效应有关的 $\cos \theta$ 耦合，还有与椭圆度有关的 $\cos 2\theta$ 耦合。虽然分析再一次得到了稳定性问题的矩阵形式，但对于有限的椭圆度，却没有简单的近似关系来反映作为 κ 的函数的 β 与 q_* 之间的定标关系。

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 基于这些原因，根据表面电流模型的数值计算结果，能够得到临界 β_{crit} 与 q_{*crit} 之间的简单近似关系就很满意了。如上所述，随着拉长比的增加，这些物理量的定标关系会变好。从物理上来解释这一现象有些复杂，但根据表面电流模型，有一种效应很容易理解。那就是，对于给定的小半径，截面拉长型托卡马克中极向磁场的坏曲率与圆截面托卡马克中截面顶部和底部极向磁场的坏曲率是可比的： $\kappa_r^{(pol)} \approx -B_\theta^2/aB_\phi^2$ ；但中平面附近的截面两侧几乎是垂直直线，这表明在此区域极向磁场曲率非常小： $\kappa_r^{(pol)} \approx 0$ 。所以，直观上可以认为，尽管较大的横截面积允许通过较大的电流，但是与垂直侧相关的中性稳定性不会严重影响到总体稳定性。因此，截面拉长既有利于平衡，也有利于提高气球-扭曲模的 β 极限，具体提高多少则取决于最大可允许电流。

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 有了上述基础，考虑3个感兴趣的 β 极限：①平衡态 β 极限；②低 β 扭曲模稳定性极限；③气球-扭曲模稳定性 β 极限。首先需要定义截面拉长型（椭圆形截面）托卡马克的临界等离子体参数。等离子体 β 的定义与圆截面中的一样： $\beta \approx \beta_t \equiv 2\mu_0 p / B_0^2$ 。类似地，根据水平方向小半径 a ，可将倒环径比定义为： $\varepsilon = a / R_0$ 。扭曲模安全因子 q_* ：在低 β 极限下与实际的安全因子 q 保持一致，表面电流分析表明合适的定义为：

$$q_* = \frac{2\pi a^2 \kappa B_0}{\mu_0 R_0 I} G(\kappa)$$

- 其中，

$$G(\kappa) = \frac{4\kappa E^2(\alpha)}{\pi^2} \approx \frac{1}{\kappa} \left[1 + \frac{4}{\pi^2} (\kappa^2 - 1) \right]$$

- 这里， $E(\alpha)$ 是椭圆积分， $\alpha^2 = 1 - 1/\kappa^2$ 。这个近似公式利用了椭圆积分的简单曲线拟合。关键是要注意，在我们感兴趣的拉长比 $1 < \kappa < 2$ 区域， $G(\kappa)$ 的值非常接近于常数： $G(\kappa) \approx 1$ 。根据这个近似，扭曲模安全因子简化为：

$$q_* = \frac{2\pi a^2 \kappa B_0}{\mu_0 R_0 I}$$

- 这个定义与圆截面情形下的定义是一致的，只是在分子中多了因子 κ 。以后用上式作为 q_* 的定义。

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 第一个有意思的结果是平衡态 β 极限。与圆截面等离子体一样，当 β 变得足够大以至于真空界面的X点移动到等离子体表面时，椭圆截面等离子体具有一个平衡态 β 极限。表面电流分析表明，在 $1 < \kappa < 2$ 区域，平衡态 β 极限的一个很好的近似为：

$$\frac{\beta q_*^2}{\varepsilon} \leq \frac{\pi^2}{16} \kappa$$

- 在某种程度上，椭圆截面的 q_* 可以如圆截面情形一样维持不变，由此可得平衡态 β 极限与拉长比的线性定标关系。这是与拉长比有关的有利的定标关系的第一个例子。
- 第二个极限关系是低 β 扭曲模稳定性极限。在圆截面情形下，低 β 极限使稳定性矩阵 \vec{W} 变得对角化。因此，通过分别检验每一个矩阵对角元的符号，就可轻易确定稳定性。对于椭圆截面的情形，由于存在 $\cos 2\theta$ 耦合，因此低 β 时矩阵不能对角化。这时耦合谐波的稳定性问题只能通过数值方法来解决，但是最终结果——与圆截面类似——仍是由 q_* 的最小稳定值构成。这些结果表明，在 $1 < \kappa < 2$ 区域，扭曲模稳定性极限近似为：

$$q_* \geq \frac{1 + \kappa}{2}$$

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 注意到 q_{*crit} 随 κ 增加，这意味着，随着等离子体被拉长，低 β 时需要更大的“安全”因子。跟预想的拉长导致更高的可允许电流相反，这似乎不是有利的定标关系。但是，如果利用 q_* 的定义来计算电流大小便可知：

$$I \leq I_{max} = \frac{2\pi a^2 B_0}{\mu_0 R_0} \frac{2\kappa}{1+\kappa} \sim \frac{2\kappa}{1+\kappa}$$

- 结论是： I 的最大值随 κ 增加（例如，随着 κ 从1增加到2， I 变为原来的4/3倍），尽管效果不是十分明显。对这种行为的解释与如下事实有关：在低 β 时，扰动局限于椭圆顶部和底部的坏曲率区域，因此对压强驱动的气球模影响不大。换种说法就是，压强驱动的气球模对于局限于等离子体外侧的扰动是不稳定的；而对于等离子体顶部和底部的扰动则变得稍具稳定性。然而，这种稳定性效应在低 β 极限下很弱。
- 最后一个极限与气球-扭曲模有关。与圆截面情形一样，假设托卡马克正沿着平衡态 β 极限曲线运行，然后用数值方法算出稳定性所需的 q_* 的最小稳定值。最后将 q_* 值代入平衡态 β 极限的表达式，得出稳定的 β 的最大值。

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 有趣的是，数值研究的结果表明，随着拉长比增加， q_{*crit} 几乎保持圆截面下的值不变；也就是说，最小 q_* 在高 β 区域与 κ 无关： $q_{*crit} = 1.7$ 。从物理上讲， β 值较高时，由于存在压强驱动的气球效应，扰动不可能简单地局限于截面的顶部和底部，而是会出现在等离子体外侧。所以，与之前给出的直观论证的结果一致，随着 κ 增加，通过相当大的电流确实是可能的。这一增长被 q_* 定义中的因子 κ 所平衡，导致 q_{*crit} 与 κ 无关的结论。
- 在平衡态 β 极限的表达式中代入 $q_{*crit} = 1.7$ 可得如下有关气球-扭曲模的 β 极限：

$$\beta \leq \beta_{max} = 0.21 \frac{a}{R_0} \kappa$$

- 例子：令 $\kappa = 1.8$ ，它对应于 $n = 0$ 模允许的最大拉长比，那么对于 $R_0/a = 2.5$ 的托卡马克， β_{crit} 为0.15，这个值对于反应堆已绰绰有余。然而，与圆截面情形一样，更加实际的数值计算结果（相应的特鲁瓦永极限）则并不如此乐观。

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 为了理解拉长对特鲁瓦永极限的影响，重写一下特鲁瓦永极限为：

$$\beta \leq \beta_{\text{crit}} = \beta_N \frac{I}{aB_0} = 0.028 \frac{I}{aB_0}$$

- 它是通过对截面和参数分布进行优化得到的，因此上式给出的表达式对于研究范围内的任何拉长比都是适用的。但这个极限并不明显地依赖于 κ ，只是随着 κ 增加、最大 I 也增加时，才隐含地随拉长比而改善。
- 通过改写上式，可将拉长效应明确地写成与表面电流结果可比的形式：

$$\beta \leq \beta_{\text{crit}} = 0.14 \frac{\varepsilon \kappa}{q_*}$$

- 如果再次假设，对于弥散性分布，最小 q_* 与拉长比无关，那么令 $q_* \approx 2$ 即可得 β 的特鲁瓦永极限为：

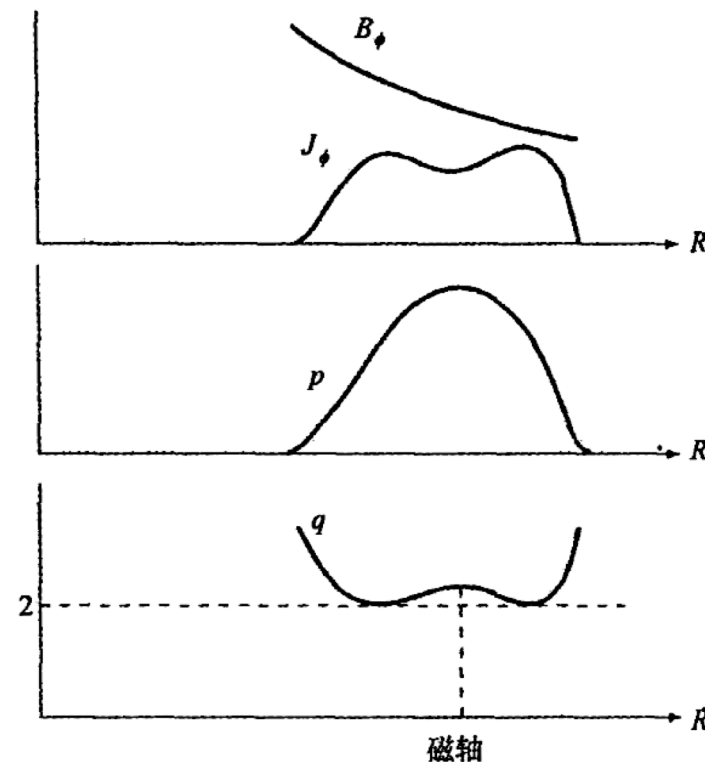
$$\beta \leq \beta_{\text{max}} = 0.07 \frac{a}{R_0} \kappa$$

7.1 托卡马克——非圆截面托卡马克

- 特鲁瓦永极限和表面电流模型预言了同样的 β_{max} 与 ε 以及 κ 的定标关系，不同的仅是数值系数。如果 $R_0/a = 2.5$ 且 $\kappa = 1.8$ ，特鲁瓦永极限为 $\beta_{max} = 0.05$ 。这个值接近但是小于从简单反应堆设计中导出的 $\beta \approx 0.08$ 。但是，简单反应堆设计并未包含拉长的影响，而且显然是基于极为简化的分析过程。托卡马克专家的一般看法是， $\beta \sim 0.05$ 也许对于反应堆是合适的。目前实验已经达到了这样的值。
- 对于托卡马克，余下的磁流体力学相关问题涉及电流驱动和自举电流。特鲁瓦永及其同事得到的稳定的参数分布不能自然产生满足需要的自举电流，因此需要外部电流驱动系统。这些要求可以通过对托卡马克的另一种改进——即所谓“先进运行模式”——来解决。

7.1 托卡马克——先进托卡马克 (AT)

- 先进托卡马克 (Advanced Tokamak, AT) 实际上指的是托卡马克实验的一种特殊运行模式。其目的是形成能够产生高比例自举电流的压强和电流分布，从而减小对外部电流驱动系统的要求。
- 正如前面指出的，产生高比例自举电流的最有效的参数分布是中空的电流分布，它导致 q 分布的根本性变化，即 q 分布不再是半径的单调增函数，而是先增后减。安全因子具有离轴的最小值。右图所示是DIII-D托卡马克的典型例子。在实验中，这些参数分布是通过电程序控制和利用局部辅助加热进行参数分布控制综合产生的。这样的分布通常被称为“反剪切分布”，这里的剪切是指 rq'/q ，它在最小 q 处变号。



DIII-D托卡马克中平面上典型的参数分布，图中显示了 $q(\psi)$ 的离轴最小值（即反剪切）和中空的 J_ϕ 分布 (Stait, et al. (1995) PRL, 75, 4421)

7.1 托卡马克——先进托卡马克 (AT)

- 定性地讲，反剪切分布在两方面有助于解决电流驱动问题。首先，对于最优化参数分布有 $q_{min}(r_{min}) > 2$ ，因此这种托卡马克中的电流要比 $q_{min}(0) \approx 1$ 的典型托卡马克运行中的电流要小。也就是说，要驱动的总电流减小了。第二，中空的电流分布与自然形成自举电流的分布极为接近。不需要驱动大量的同轴电流，因为反剪切和自然形成的自举电流的分布都是中空的。
- 由于引入了新的磁流体力学不稳定性，这些优势被部分抵消了。从反应堆的经济性上说，高比例的自举电流（即 f_B 约 0.7~0.9）是必需的，而这就需要较高的总体 β 和极向 β 。然而，电流的减小虽然对电流驱动有利，但却导致 $n = 1$ 气球-扭曲模的稳定性极限值降低。特鲁瓦永极限有 $\beta \leq \beta_N \left(\frac{I}{a_B} \right) \sim 1$ 。反应堆实现必需的自举电流比例所对应的典型 β_N 值约为 0.04~0.05。但是，这个值几乎是特鲁瓦永得到的值（ $\beta_N \approx 0.028$ ）的两倍，意味着必须采用理想导体壁来增加 β 极限（特鲁瓦永的研究中没有导体壁假设）。
- 需要确定导体壁要靠近到何种程度才能实现所需的 β 极限。表面电流模型的结果表明，所需的壁的半径一般为 $b/a \sim 1.4$ ，跟截面拉长型托卡马克中稳定 $n = 0$ 垂直不稳定性所需的差不多。如果壁具有有限的电导率，那么不稳定性即转变为需要反馈稳定的电阻壁模。目前这种技术还不像针对 $n_{62} = 0$ 模的技术那样成熟。

7.1 托卡马克——先进托卡马克 (AT)

■ 1. 壁对扭曲模电流极限的影响

- 托卡马克中理想导体壁对 $n = 1$ 模的影响可以通过表面电流模型得到。为简单起见，计算时采用了圆截面等离子体。这种分析仅需要将壁的影响包括到真空对压强平衡关系的贡献里。在合适的长波长极限下，在托卡马克压强平衡关系中做如下代换：

$$\sum_{l \neq 0} \frac{G_{lm} G_{lp}}{|l|} \rightarrow \sum_{l \neq 0} \frac{G_{lm} G_{lp}}{|l|} \left[\frac{1 + (a/b)^{2|l|}}{1 - (a/b)^{2|l|}} \right]$$

- 现在考虑低 β 扭曲模极限。与无壁情形类似，稳定性矩阵变得对角化，仅有 $m = 1$ 可能是不稳定的。 $m = 1, n = 1$ 时修正的稳定性条件变为：

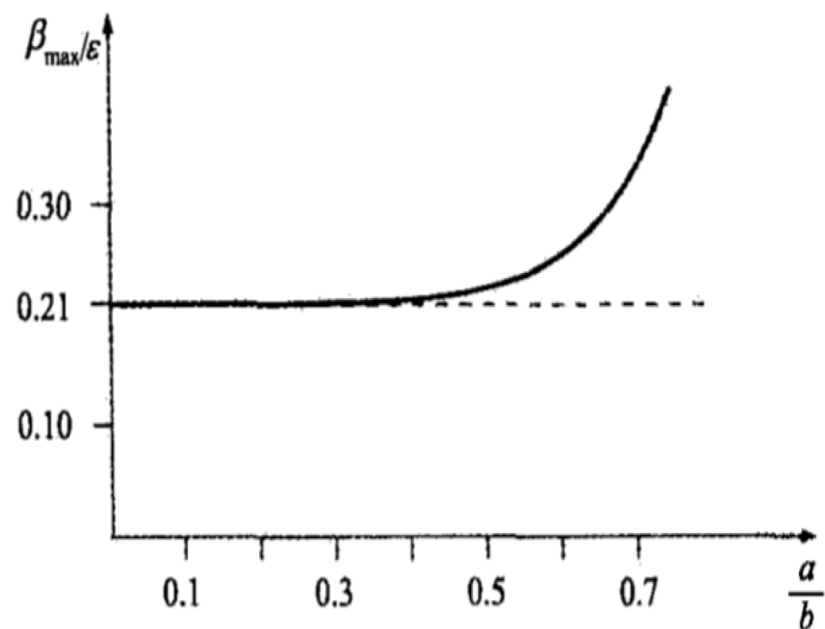
$$\begin{aligned} W_{11} &= 1 - \frac{1}{q_*^2} + \left(1 - \frac{1}{q_*}\right)^2 \left(\frac{w^2 + 1}{w^2 - 1}\right) > 0 \\ &= \frac{2w^2}{(w^2 - 1)q_*^2} (q_* - 1)(q_* - 1/w^2) > 0 \end{aligned}$$

- 其中 $w = b/a > 1$ ，稳定性依然要求 $q_* > 1$ 。结论是：就抑制低 β 扭曲模的稳定性而言，理想导体壁对 I_{max} 的值没有任何影响。理论上讲，低 q_* 的稳定区域（即 $0 < q_* < 1/w^2$ ）在托卡马克中是无法实现的，因为要进入这个参数区，就需要 q_* 随电流增大(或等价地，随着 q_* 减小)经过极其不稳定的区域 $1/w^2 < q_* < 1$ 。

7.1 托卡马克——先进托卡马克 (AT)

■ 2. 壁对气球-扭曲模 β 极限的影响

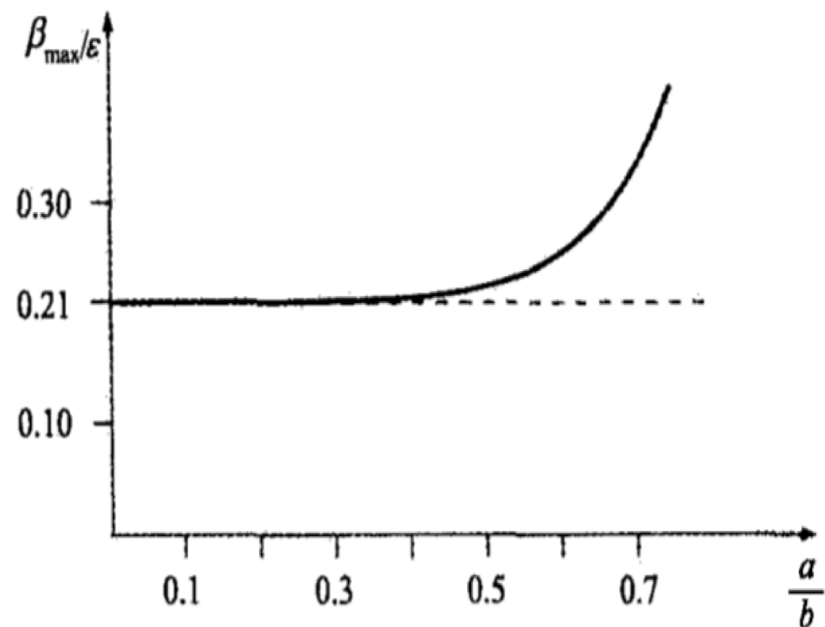
- 气球-扭曲模不稳定性是AT运行中要克服的最危险的模式。核心问题是确定理想导体壁放置得多靠近才能将稳定 β 的最大值提升到比无壁极限高一个确定的量。
- 通过让等离子体沿平衡态极限曲线 $\beta q_*^2/\varepsilon = \pi^2/16$ (它不受壁的影响) 运行, 并确定稳定性所需的临界 q_* 。与低 β 区域相反, 高 β 区域中的稳定性 q_{*crit} 确实与壁的位置有关。一旦确定了 q_{*crit} , 带回到平衡态极限关系就得到对应的 β 最大值。
- 利用壁修正的真空贡献, 令矩阵 W 的行列式为零, 即可以通过数值计算得到所需的 β_{max}/ε 对 b/a 的关系, 结果显示在右图中。直到 $b/a \approx 2$, 壁几乎没有影响。原因是模式中的主要谐波对应于 $m = 2$, 对于该模数, 壁效应仅以 $(b/a)^4$ 很弱地起作用。



β_{max}/ε 随 a/b 的变化曲线 (图中显示了壁不断靠近等离子体时 β 极限是如何增加的)

7.1 托卡马克——先进托卡马克 (AT)

- 利用右图可以解决“壁必须靠得多近才能实现高比例自举电流”的问题了。根据特鲁瓦永极限，为了实现所需的高比例自举电流，临界 β_N 必须从 $\beta_N = 0.028$ 提高到 $\beta_N \approx 0.045$ 。这相当于 β_N 的比为 $0.045/0.028 = 1.6$ 。导体壁的稳定效应对于弥散型等离子体模型与对表面电流等离子体模型是类似的，因此需要知道表面电流模型下 β_{max} 乘以相同因子1.6后所对应的临界壁位置。换一种说法，对于给定的环径比，临界 β/ϵ 必须从 $\beta/\epsilon = 0.21$ 增加到 $\beta/\epsilon = 0.34$ 。从右图可推断，这相当于临界壁位置为 $b/a = 1.4$ 。这个值与采用弥散型参数分布下数值稳定性研究的结果相比，略为乐观。在截面拉长的等离子体中，它与 $n = 0$ 稳定性所需的壁位置差不多。
- 总之，采用反剪切参数分布的AT运行可以实现高比例自举电流。然而，这个区域所需的高 β 使得等离子体超出无壁极限。通常需要 $b/a < 1.4$ 的导体壁。由于实际的壁具有有限电导率，不稳定性转化为电阻壁模，因此需要通过反馈或者旋转来稳定。
- 目前，同时实现高比例自举电流和高稳定 β 是托卡马克研究的一个主要领域。



β_{max}/ϵ 随 a/b 的变化曲线（图中显示了壁不断靠近等离子体时 β 极限是如何增加的）

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 球形托卡马克 (Spherical tokamak, ST)是要讨论的最后一种托卡马克位形。这种位形的新的特征是小的环径比, 一般有 R_0/a 约1.2~1.4。人们已经建造了许多球形托卡马克实验装置, 其中最大的两个分别是位于英国卡拉姆实验室的兆安培球形托卡马克 (Mega-Ampere Spherical Tokamak, MAST) 和位于普林斯顿等离子体物理实验室的国家球形环实验装置 (National Spherical Torus Experiment, NSTX)。NSTX 的示意图如右图。
- 研究ST位形的主要目的之一是探索充分利用磁流体力学 β 极限的定标关系 $\beta \sim \varepsilon$ 。显然, 随着环径比变小, β_{crit} 将增加, 实验上也确实看到了这种行为。较高的稳定 β 能够增加聚变反应堆的吸引力, 因为它允许采用较弱的环向磁场, 或是采用较小的更加紧凑的几何结构。无论哪种选择都会降低成本。

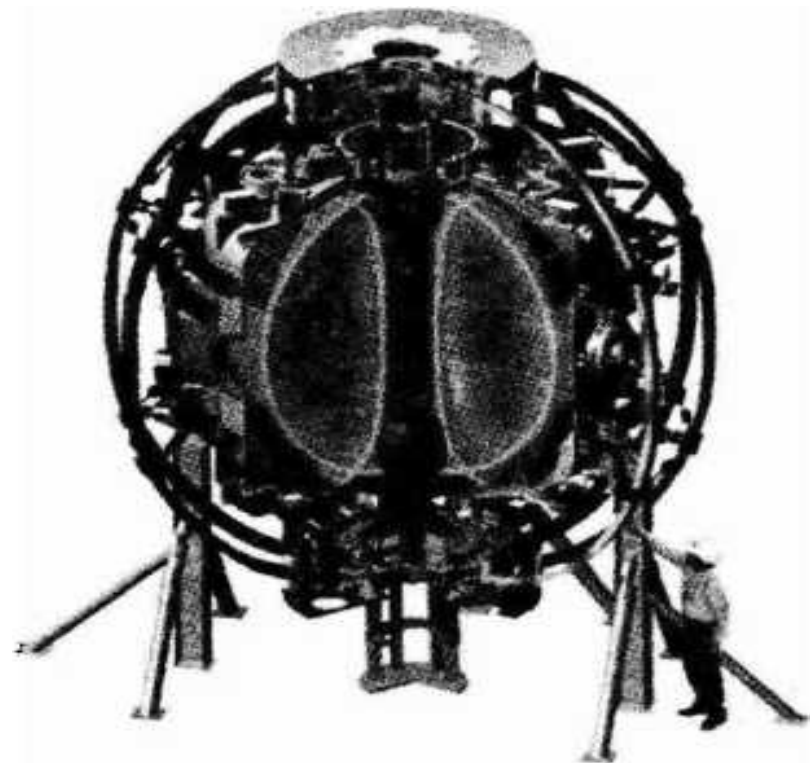


图13.36位于普林斯顿等离子体物理实验室的NSTX实验装置示意图 (承蒙M. Peng 66 提供)

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 更详细的分析表明，将ST作为反应堆是有利有弊的。实际上参照标准托卡马克来权衡ST的利弊，很难肯定地说ST就一定会发展成为更有吸引力的反应堆，即使磁流体力学物理分析所预言的高 β 能够实现。但是，ST还有一种替代应用，也许更适合，那就是体中子源。基于如下理由： β 和紧凑所带来的好处必然会被其他一些问题所抵消，这些问题在ST上要比标准托卡马克情形下严重得多。
- 首先，聚变反应堆需要高的等离子体压强，它与 β 有关但并不等同。特别是，在小环径比（即 $R_0/a \rightarrow 1$ ）下，由于环内侧空间体积减小，使得产生环向 B_{max} 的环向磁场磁体在中心柱内的回臂粗细大大减小，而磁场的大小正比于 $1/R$ ，由此导致 β 据以定义的等离子体中心的 β_ϕ 大大减小。最终结果是，ST中的最大的可实现压强较之标准托卡马克要小。
- 第二，为了实现极为紧凑的环径比，包层和几乎所有的屏蔽层都必须从等离子体内侧移除。其结果是环向场磁体在中心柱内的回臂必须是铜质的，因为超导磁体没有合适的防护，已不再适用。中心铜质回臂会耗散相当多的欧姆功率，这些功率必须计入整体功率平衡中。详细的反应堆研究表明，要实现可观的功率平衡， B_{max} 必须限制在小于7.5 T。这个值要比采用超导磁体的标准托卡马克的磁场值小很多。ST的这个限制还导致较低的最大可实现压强。

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 第三，为了在小环径比装置中实现与标准托卡马克类似的安全因子，需要很大的环向电流。所以，在ST中要解决电流驱动问题更为困难，实际上，要求自举电流比例远高于90%。在ST中，尽管小环径比能够产生高 β ，但同时也会引起磁流体力学无壁 β 极限的破坏。因此，ST还必须解决相应的电阻壁模的稳定问题。
- 结论是：从反应堆的吸引力方面看，ST反应堆并不像原先预计的那样明显比标准托卡马克更优越。但是，ST非常适用于另一种聚变应用体中子源。14 MeV的中子源将在聚变反应堆用材料的测试和研发方面起到重要的作用。从反应堆应用上说，材料的耐用性及其环境影响（尤其是在放射性方面）显然是其具有多大吸引力的重要因素。目前还没有这样一种能够产生14 MeV的中子源。这种中子源的一个重要特点是它的主要目的是能够在相当小的空间范围内产生用于测试小样本聚变材料的高强度中子流。它不需要取得可观的功率平衡，而一旦功率平衡的限制解除了，那么ST将因其袖珍的体积和采用铜材料做磁体，也许很适合 成为一种相对便宜的14 MeV中子源。。
- 余下部分将着重讨论ST的磁流体力学行为和确定ST中的 β 极限，看看有利的环径比定标关系在 $\varepsilon \rightarrow 1$ 时是否能够保持。另外，还将比较ST的和标准托卡马克的 β -压强关系，包括考虑环向场磁体内回臂对磁场极限的影响。尽管这些分析原则上能够通过表面电流模型进行，但是在感兴趣的参数范围内还没有得到类似的结果。因此，这里的讨论是基于与特鲁瓦永的早期研究思路相似的数值研究，只是推广到将环径比很小的球形环包括进来。

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

■ 1. 球形环中的磁流体力学 β 极限

- 特鲁瓦永及其同事的早期研究涉及对参数分布和等离子体形状的数值优化，进而确定针对所有磁流体力学模式（通常 $n = 1$ 外界气球-扭曲模不稳定性设定了最严格的限制）的最大的稳定 β 。这些研究涵盖了范围广泛的位形，但却不包含小环径比ST，因为那时ST的概念还没有提出来。
- 但是，MAST和NSTX的建造激励了进一步的数值研究，即将特鲁瓦永及其同事的结果推广到小环径比区域。普林斯顿等离子体物理实验室的梅纳德（Menard）及其同事对此进行了一系列研究。他们在对一些关键的等离子体参数改进定义之后，通过研究表明，即使对于很小的环径比， β_{crit} 对环径比的依赖关系（ $\beta_{\text{crit}} \sim \varepsilon$ ）依然成立。他们还考虑了 q_* 对扭曲模的关系。将这些结果综合起来，我们就可以确定作为环径比和拉长比函数的优化的 q_* 和相应的 β_{crit} 。分析的细节如下：
- 第一步是引入关键等离子体参数的改进定义，这里主要是指 β 和现有的 q_* 定义更改为：

$$\beta \equiv \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_0^2} \rightarrow \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{\langle B^2 \rangle}$$

- 这个定义最早由特鲁瓦永及其同事提出。这里 $\langle \rangle$ 表示体平均值。

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 我们看到，在新的定义中，轴上的真空磁能 B_0^2 被替换为总体磁能的体平均值 $\langle B^2 \rangle = \langle B_\phi^2 + B_p^2 \rangle$ 。在大环径比极限 $\varepsilon \rightarrow 0$ 下，这两种定义是一致的。接下来，引入扭曲模安全因子的新定义，它与拉长比的关系与此前稍有不同：

$$q_* \equiv \frac{2\pi B_0 a^2}{\mu_0 R_0 I} \kappa \rightarrow \frac{2\pi B_0 a^2}{\mu_0 R_0 I} \left(\frac{1 + \kappa^2}{2} \right)$$

- 这两个定义对于 $\kappa = 1$ 是一致的，对于 $\kappa = 2$ 只相差因子 $5/4$ 。
- 利用这些定义，普林斯顿研究小组进行了深入的数值研究，就截面、参数分布、安全因子、环径比，包括与ST位形相关的小环径比等广泛的参数范围确定了最大稳定 β 。他们的数值研究结果数据可以（按新定义）总结为一个简单的解析拟合表达式：

$$\beta \leq \beta_{crit} \equiv \langle \beta_N \rangle \frac{1}{a B_0} = 5 \langle \beta_N \rangle \left(\frac{1 + \kappa^2}{2} \right) \frac{\varepsilon}{q_*}$$

- 其中 $\langle \beta_N \rangle$ 是新的归一化系数。显然，它与环径比和拉长比均无关，仅是 q_* 的函数。

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 我们看到， β_{crit} 与 ε 的线性关系即使在球形环参数区域也成立。另外，由于 $\langle\beta_N\rangle$ 与 κ 无关，拉长的优势对于小环径比依然成立： $\beta_{crit} \sim 1 + \kappa^2$ 随拉长比增加。在扭曲不稳定性决定的 q_* 对 $\langle\beta_N\rangle$ 的依赖关系方面，数值研究表明，对于 $q_* > 2$ ， $\langle\beta_N\rangle$ 的值近似为一个常数： $\langle\beta_N\rangle \approx 0.03$ ；对于较低的 q_* ， $\langle\beta_N\rangle$ 的值减小，直到 $q_* \approx 1$ 时为零。理论上， $\langle\beta_N\rangle$ 对 q_* 的依赖关系可以归纳为如下这个简单的表达式：

$$\langle\beta_N\rangle \approx 0.03 \frac{(q_* - 1)}{[(3/4)^4 + (q_* - 1)^4]^{1/4}}$$

- 总体 q_* 对 β_{crit} 的依赖关系取决于比值 $\langle\beta_N\rangle/q_*$ 。容易证明，这个函数 $q_* = 1 + (3/4)^{4/5} \approx 1.8$ 处有最大值，这时 β_{crit} 达到最大值 β_{max} 。特别地，标准托卡马克或者球形环中的 β 极限为：

$$\beta \leq \beta_{max} \equiv 0.072 \left(\frac{1 + \kappa^2}{2} \right) \varepsilon$$

- 拉长比 $\kappa = 2$ ，倒环径比 $\varepsilon = 1/1.25 = 0.8$ 的球形环具有相当高的 β 最大值 $\beta_{max} = 0.14$ ，这就证实了起初的ST研究动机——增加稳定 β 值。

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

■ 2. 托卡马克中 β 和压强的关系

- 上述分析表明，用 $\langle B^2 \rangle$ 来定义 β 在理论上是方便的，因为倒环径比的定标关系很简单，即使对于很小的环径比也有：随着 $\varepsilon \rightarrow 1, \beta \sim \varepsilon$ 。实验中更加方便的定义是将 $\langle B^2 \rangle$ 替换为 B_0^2 ，这个物理量测量上容易得多。但用 B_0^2 定义导致 β_{max} 对 ε 的依赖关系变得复杂，也就是说，此时刻画 β 极限的 β_{max} 较用 $\langle B^2 \rangle$ 定义时高很多。那么什么才是 β 的最佳定义呢？
- 这个问题的答案要到聚变反应堆的要求中去找。这个要求的关键是聚变功率密度近似地与等离子体压强的平方成正比：

$$S_f = \frac{E_f}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle = \frac{E_f}{16} \frac{\langle \sigma v \rangle}{T^2} p^2 \approx \frac{E_f}{16} \left[\frac{\langle \sigma v(T_f) \rangle}{T_f^2} \right] p^2$$

- 其中， $T_f \approx 15\text{keV}$ 。因此，一个经济上具有吸引力的反应堆必须能够稳定地约束住高压强等离子体。在此基础上， β 的最佳定义必须能够给出对压强的精确度量。由于 $p \sim \beta B^2$ 且环向场线圈内侧的 B 由 $B \leq B_{max}$ 限定，因此我们可以引入如下定义：

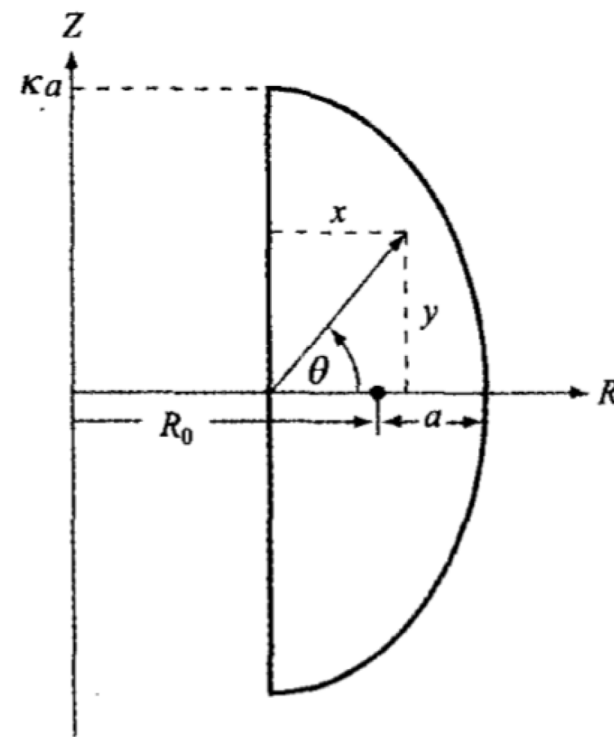
$$\beta_E \equiv \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{max}^2}$$

- 这里 β_E 称为“工程贝塔值”，它是聚变反应堆情形下的“最佳”定义。

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 现在的任务是将 $\langle B^2 \rangle$ 与 B_{max}^2 联系起来，计算出ST中可实现的最高稳定压强，并与标准托卡马克中的值相比较。这个任务分两步完成：首先，找出 $\langle B^2 \rangle$ 与 B_0^2 的关系；其次，将 B_0^2 与 B_{max}^2 联系起来。
- 一般说来， $\langle B^2 \rangle$ 与 B_0^2 之间的关系需要通过详细的数值计算才能给出。但是，通过一些简化的假设，我们可以得到一个相当精确的理论近似。首先考虑 $\langle B_\phi^2 \rangle$ 对 $\langle B^2 \rangle$ 的贡献。假设等离子体中 B_ϕ 的值与真空值相等： $B_\phi \approx B_0(R_0/R)$ 。忽略等离子体的抗磁性会稍微高估了 $\langle B_\phi^2 \rangle$ ，但这一影响不大。较重要的是典型的等离子体截面被拉长为指向外的三角形。由于此时内部体积相对较大，环内侧的磁场要比圆截面时强得多，因此这种形变相对来说重要得多。这种拉长截面的一个简单模型是右图所示的半椭圆。 $\langle B^2 \rangle$ 与 B_0^2 之间的关系为：

$$\langle B_\phi^2 \rangle = B_0^2 \int (R_0/R)^2 dr / \int dr$$



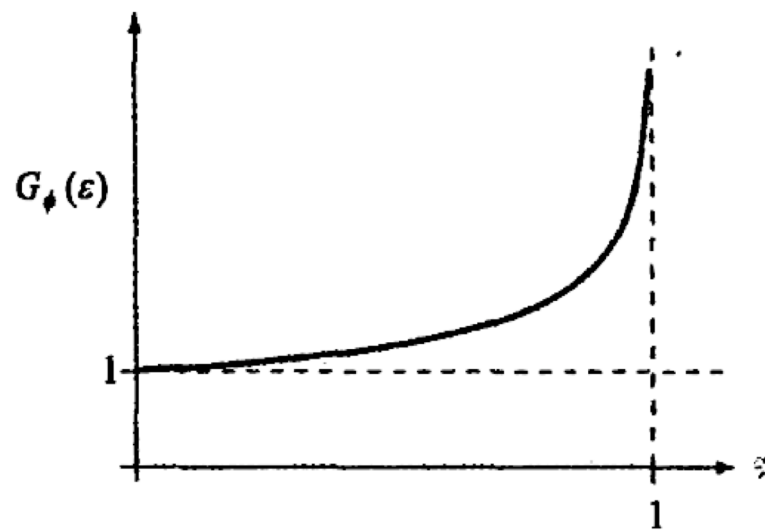
用于描述ST等离子体非圆截面的半椭圆模型

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 通过引入如下的新坐标系： $R = R_0 - a + 2a\rho\cos\theta$ 和 $Z = \kappa a\rho\sin\theta$ ，其中 $0 \leq \rho \leq 1$ ， $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ，我们可以直接计算出这些积分，得到的是一个较为复杂的表达式，它可写为：

$$\frac{\langle B_\phi^2 \rangle}{B_0^2} = G_\phi(\varepsilon)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon\delta} \left[\frac{1 - (2\delta/\pi) - (4/\pi)\sqrt{1-\delta^2}\arctan^{-1}\sqrt{(1-\delta)/(1+\delta)}}{1 - (1 - 8/3\pi)\varepsilon} \right] & \varepsilon < 1/3 \\ \frac{1}{\varepsilon\delta} \left[\frac{1 - (2\delta/\pi) + (2/\pi)\sqrt{\delta^2 - 1}\ln(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})}{1 - (1 - 8/3\pi)\varepsilon} \right] & \varepsilon > 1/3 \end{cases}$$

- 其中， $\delta = 2\varepsilon/(1 - \varepsilon)$ 。该函数如右图所示。注意到 $\langle B_\phi^2 \rangle/B_0^2$ 是关于 ε 的单调增函数。随着 $\varepsilon \rightarrow 0$ ， $\langle B_\phi^2 \rangle/\langle B_0^2 \rangle \rightarrow 1$ ，符合预期。对于 $\varepsilon = 1/3$ 的典型托卡马克，这个比值增加到 $\langle B_\phi^2 \rangle/\langle B_0^2 \rangle = 1.15$ ，改变很小；但对于 $\varepsilon = 1/1.25 = 0.8$ 的ST而言，这个比值是 $\langle B_\phi^2 \rangle/\langle B_0^2 \rangle = 1.76$ ，差别就很大了。



函数 $G_\phi(\varepsilon) \equiv \langle B_\phi^2 \rangle/B_0^2$ 随 ε 的变化

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 现在考虑 $\langle B_p^2 \rangle$ 对 $\langle B^2 \rangle$ 的贡献。即使在小环径比条件下，这种贡献依然较小。所以，为了简化分析，我们可以采用大环径比下的极向磁场近似。存在一个电流密度随大半径增加——这与真实的参数分布一致——的简单模型，它由如下形式的矢势给出：

$$A_\phi = C \left(\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{\kappa^2 a^2} - 1 \right) x$$

- 其中， $R = R_0 - a + x$ ， $z = y$ 。通过计算 B_x ， B_y ，然后计算环绕等离子体表面的线积分 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ ，就可以容易地用等离子体电流来表示常数 C ：

$$\mu_0 I = 4aC \left(\frac{\kappa^2 + 4/3}{\kappa} \right)$$

- 现在计算磁场和 $\langle B_p^2 \rangle$ 就很容易了。简单的计算给出：

$$\frac{\langle B_p^2 \rangle}{B_0^2} = G_p(\varepsilon) = \frac{\pi^2}{32} \frac{(\kappa^2 + 1)^2 \varepsilon^2}{(\kappa^2 + 4/3) q^2}$$

- 注意到如果 $\kappa = 2$ ， $q_* = 1.8$ ，那么对于 $\varepsilon = 1/3$ 的标准托卡马克，有 $G_p = 0.05$ ； $\varepsilon = 1/1.25 = 0.8$ 的ST，有 $G_p = 0.29$ 。与环向场的贡献相比，这些值有限且很小。

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 综合这些结果可得如下 $\langle B^2 \rangle$ 与 B_0^2 之间的简单关系:

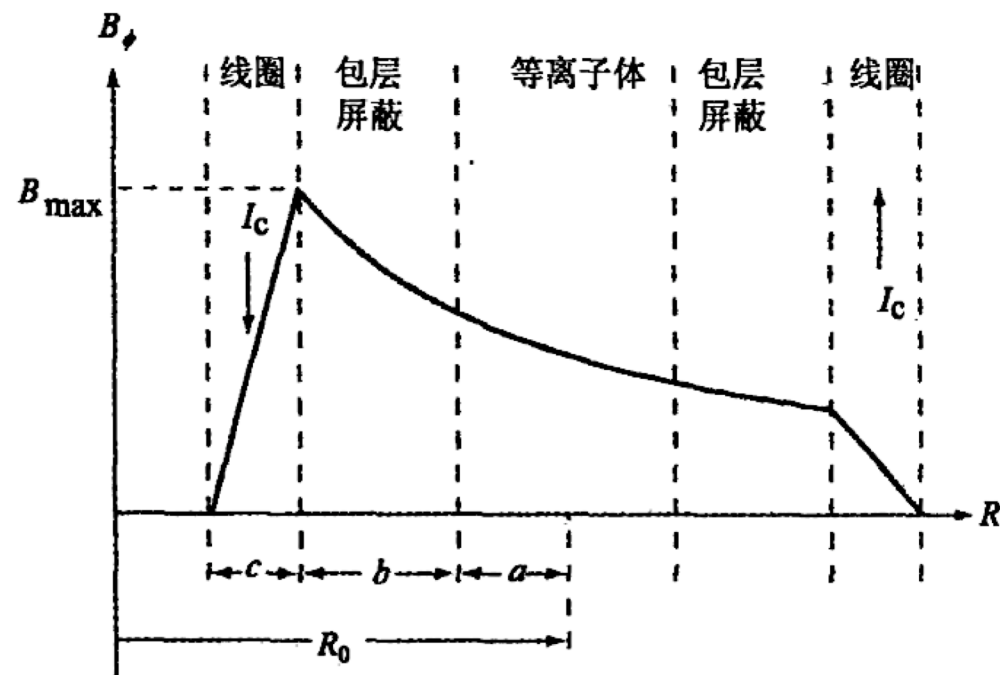
$$\langle B^2 \rangle / B_0^2 \equiv G(\varepsilon) = G_\phi(\varepsilon) + G_p(\varepsilon)$$

- 对于标准值 $\kappa = 2$ 和 $q_* = 1.8$, 如果 $\varepsilon = 1/3$, 则 $G = 1.2$; 如果 $\varepsilon = 0.8$, 则 $G = 2.05$ 。注意到对于ST, 最大稳定 β 预言值的变化可相差一倍多, 具体取决于定义中采用的是 $\langle B^2 \rangle$ 还是 B_0^2 , 选取后者对应较高的值。显然, 对于ST β 的精确定义是一个重要问题。

- 当考虑聚变反应堆时, 合适的定义是 β_E 。计算 β_E 需要完成推导的第二步, 即明确 B_0 和 B_{max} 之间的关系。通过重新审视右图所示的托卡马克反应堆内侧的几何形态, 这一步很容易实现。因为环向磁场 $\beta_\phi \sim 1/R$, 故立刻可知所需的关系为:

$$B_0 = (1 - \varepsilon_b - \varepsilon) B_{max}$$

- 其中 $\varepsilon_b = b_i / R_0$, b_i 是包层与屏蔽层的内侧厚度。



托卡马克反应堆的几何形态, 图中标出了 B_{max} 的位置 (注意到在环向场线圈内侧 B_ϕ 为零)

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 综合可得所需的最优化 $q_* = 1.8$ 情形下 β_E 的表达式:

$$(\beta_E)_{max} = 0.036(1 + \kappa^2)\varepsilon(1 - \varepsilon_b - \varepsilon)^2 G(\varepsilon)$$

- 较实际的参数——最大稳定压强——由下式给出:

$$\langle p \rangle = 0.14(1 + \kappa^2)\varepsilon(1 - \varepsilon_b - \varepsilon)^2 G(\varepsilon) B_{max}^2 \quad (\text{atm})$$

- 现在，我们终于可以比较ST和标准托卡马克中的（没有导体壁情形下的）最大可实现压强了。标准托卡马克的参数为 $\kappa = 2$, $\varepsilon = 2/5 = 0.4$, 超导环向磁体的最大允许磁场 $B_{max} = 13\text{T}$ 。内侧包层厚度 $b_i = 1.2\text{m}$, 相当于 $\varepsilon_b = 1.2/5 = 0.24$ 。由这些值可得:

$$\langle p \rangle_{max} = 7.7 \quad (\text{atm})$$

- 这大概就是反应堆所需的值，但是相应的参数分布不能产生足够的自举电流。
- 现在考虑假想的ST聚变反应堆，典型参数值为 $\varepsilon = 0.8$, $\kappa = 2$ 和 $q_* = 1.8$ 。另外，内侧包层的厚度可以忽略： $\varepsilon_b = 0$ 。关键是设定最大环向磁场 $B_{max} \approx 7.5\text{T}$ 。因为只有这样才能确保欧姆耗散足够低以实现可观的功率平衡。目前的实验都还是在远低于这一限定条件下运行的。由这些参数可得:

$$\langle p \rangle_{max} = 2.6 \quad (\text{atm})$$

- 尽管ST可实现较高的 β 值，但其最大压强较标准托卡马克显著要低，这是小环径比下强的 $1/R$ 效应以及对 B_{max} 的较低限制的综合结果。

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 圣迭戈加州大学的ARIES小组提出了一种更为综合和自洽的ST反应堆设计。设计中他们通过增加拉长比到 $\kappa = 3.4$ 并使 $\langle \beta_N \rangle$ 的值差不多翻番来改善等离子体性能。在这些参数下， $n = 0$ 的垂直不稳定性变得更难以稳定，且 $n = 1$ 气球型电阻壁模被激发，需要反馈来稳定。另外，等离子体电流约为 30 MA (也就是 $q_* = 2.8$)，为了尽可能减少对电流驱动方面的要求，所需的自举电流份额达 $f_B = 0.96$ ，尤其是在等离子体中心附近。有趣的是，ARIES小组的研究表明，存在优化的倒环径比 $\varepsilon \approx (1.7)^{-1} = 0.59$ 。这个最优值是下述两种因素之间权衡的结果：一方面稳定性要求通过增大 ε 来增大 $\langle p \rangle$ ，另一方面，由于 $1/R$ 效应， B_0 的 $1 - \varepsilon$ 函数关系要求减小 ε 。结论是“ST反应堆”的最优环径比实际上是在标准托卡马克和现有ST实验值之间。
- 最后，值得一提的是，根据ARIES小组的研究，ST反应堆的发电成本 (Cost of Electricity, CoE) 预期与常规托卡马克的相同。但是ST需要在改进等离子体物理性能方面做出更大胆的假设，同时还需处理好中心柱方面复杂的工程技术问题。综上所述我们可以得出结论：从聚变反应堆建设角度看，与标准托卡马克相比，高 β 带来的ST的优势⁷⁸ 并不明显地更具吸引力。

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

■ 3. ST作为中子源

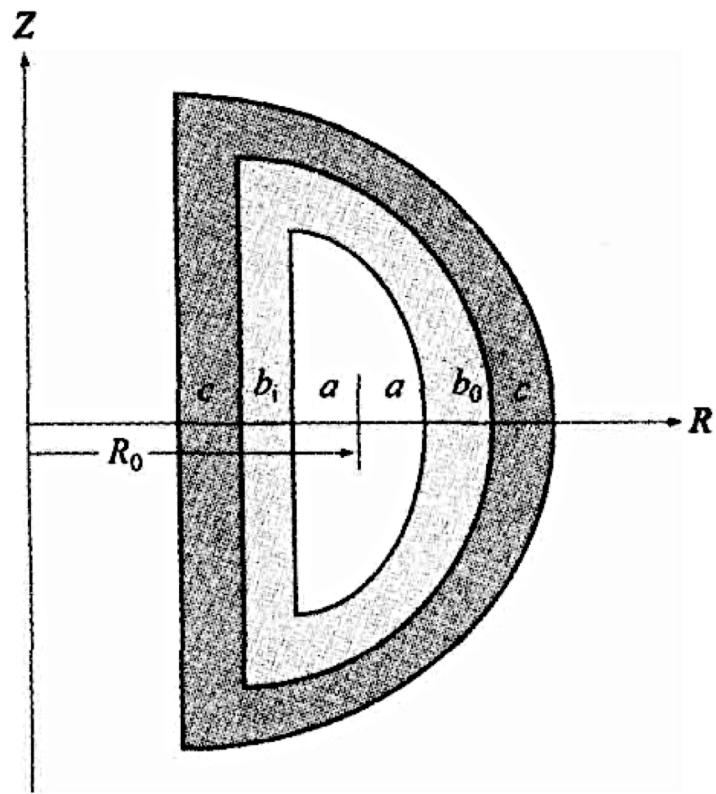
- 一种更能够发挥ST位形优势的应用是体中子源，目标是产生测试先进聚变材料所需的高强度 14.1 MeV 的中子流。源的体积不需要造得跟反应堆一样大，因为待测材料试样可以做得很小。因此核心问题不是追求可观的功率平衡，而是产生强中子流。
- ST的优势：与作为反应堆情形一样，采用ST作中子源省去了环内侧的包层和屏蔽。另外，环径比可以取得使中子产额达到最大化，也就是说， ϵ 值可取得适中。将这些特点综合起来即可得出相对紧凑的设计，相应的成本也较低。但获得这些好处付出的代价是环向磁场在环内侧的 B_{max} 极限较低。由于现在的问题主要不是实现总体功率平衡，因此也许更重要的是将欧姆加热功率维持在足够低的水平上（即小于 250 MW ），这样才能使运行费用维持在合理的范围内。
- 综上所述，就低到中等通量范围的中子源而言，与标准托卡马克相比，ST可能是一种成本更低的中子源。而要获得较高的中子通量，则标准托卡马克更加经济，尽管产生的中子也许比需要的还多。下面的分析可以证明这些观点。这里有两个重要假设：ST和标准托卡马克都运行在中等拉长比情形下（ $\kappa \approx 2$ ）；它们的 β 值都低于无壁 β_{max} 极限。这些假设之所以成立是因为对中子源的需求要远早于实际反应堆的建设，所以为了谨慎起见，中子源的研发设计无需在物理上追求高于现有装置性能水平的改善。

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 分析包括对ST和标准托卡马克的中子通量进行计算和比较两方面。在这两种情形下，小半径 a 均选取为对于给定的大半径 R_0 使得中子通量 P_w 最大化，这样最优 P_w 可以作为 R_0 的函数用图形表示出来。接下来，我们很容易计算出包层、屏蔽和线圈所占的体积 V ，并做出其对 P_w 的函数图。 V 这个量的作用是衡量建造成本。观察这条曲线即可定性地看出在哪些区域ST作为中子源要比标准托卡马克更加经济。
- 首先考虑中子通量的计算。中子源的几何尺寸如右图所示，穿过第一壁的中子功率的平均通量可以表示为：

$$P_w = \frac{E_n n^2 \langle \sigma v \rangle}{4} \frac{V_p}{A_p} \approx \left[\frac{E_n \langle \sigma v(T_f) \rangle}{16 T_f^2} \right] \frac{V_p}{A_p} p^2 \quad (\text{W/m}^2)$$

- 这里， $T_f = 15\text{keV}$ ； $E_n = 14.1\text{MeV}$ ； V_p ， A_p 分别是等离子体的体积和表面积。上式表明，穿过第一壁的中子功率通量等于每秒每立方米产生的中子能量乘以等离子体体积再除以等离子体的表面积。



聚变中子源几何构型

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 对于ST和标准托卡马克，等离子体的体积和表面积分别为：

$$\left. \begin{aligned} V_p &= \pi \kappa a^2 R_0 [\pi - (\pi - 8/3)\varepsilon] \\ A_p &\approx 2\pi \kappa a R_0 [\pi + 2 - (\pi - 2)\varepsilon] \end{aligned} \right\}$$

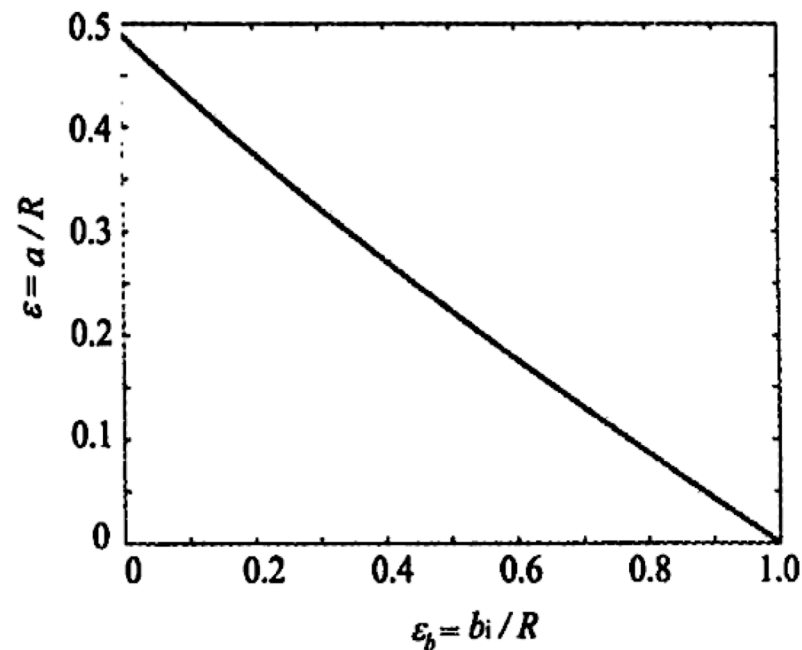
- 就我们感兴趣的参数区域来说，第二个公式是个相当好的近似。现在将压强设定为无壁情形下的最大值 $\langle p \rangle = 0.14(1 + \kappa^2)\varepsilon(1 - \varepsilon_b - \varepsilon)^2 G(\varepsilon) B_{max}^2$ 。经过简单计算可得下述对两种位形均适用的中子功率通量的表达式：

$$P_w = 4.29 \times 10^{-4} R_0 B_{max}^2 (1 + \kappa^2)^2 H(\varepsilon) \quad (\text{MW/m}^2)$$

- 其中，

$$H(\varepsilon) = \frac{1 - 0.15\varepsilon}{1 - 0.22\varepsilon} G^2(\varepsilon) \varepsilon^3 (1 - \varepsilon_b - \varepsilon)^4$$

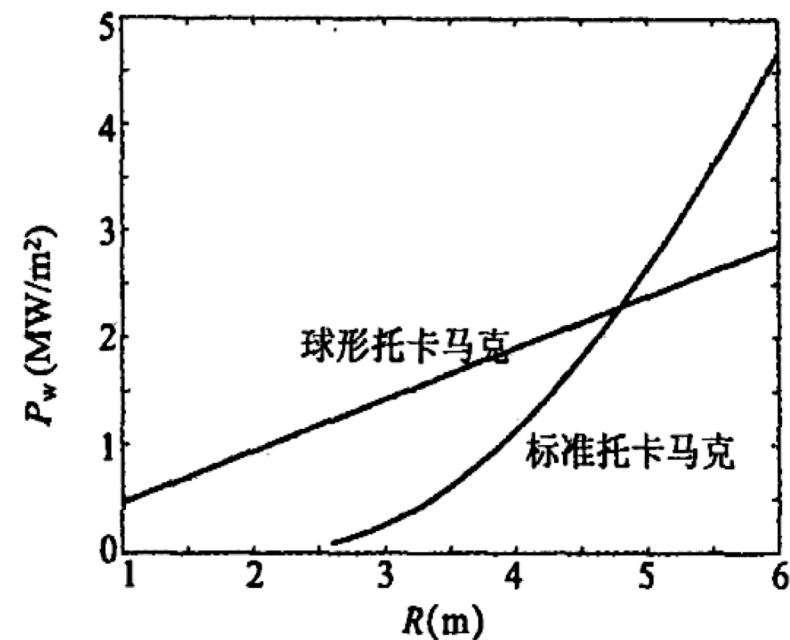
- 函数 $H(\varepsilon)$ 有一个最大值，此时中子功率通量最大。最优值 ε 对 ε_b 的函数曲线如右图所示。注意到，对于ST ($\varepsilon_b = 0$)，最佳环径比约为 $R_0/a \approx 2$ ；对于标准托卡马克，最佳环径比较大： $R_0/a > 2$ 。更实际的计算得到的环径比的值要小一些，但是对于当前目的来说，采用前面给出的简单估计就足够了。



作为 $\varepsilon_b = b_i/R_0$ 的函数的最优环径比 ε

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 将最优的 ε 代入上面给出的 P_w 表达式，得到中子功率通量与大半径 R 之间的关系式。对于ST和标准托卡马克，这个关系式如右图所示。其中假设两种位形都有 $\kappa = 2$ ，且ST的 $B_{max} = 7.5T$ ，标准托卡马克的 $B_{max} = 13T$ 。对于标准托卡马克， $b_i = 1.2m$ 。我们发现，如果大半径小于 $4.7m$ ，ST产生的中子功率通量较大。高于这个值，则标准托卡马克产生的中子通量较大。在交点处有 $P_w \approx 2.3MW/m^2$ 。



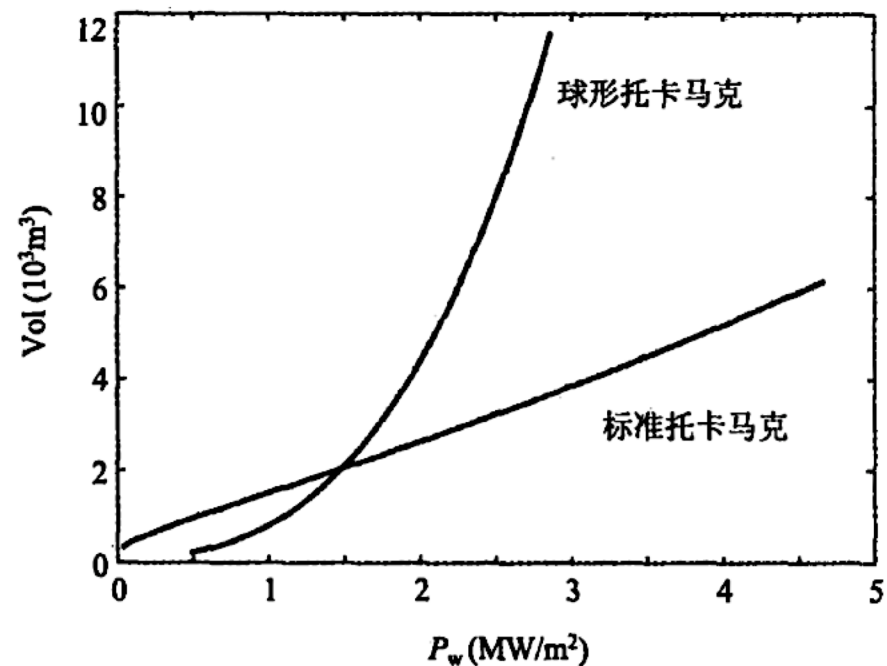
作为大半径 R 的函数的最大
中子功率通量

7.1 托卡马克——球形托卡马克 (ST)

- 我们感兴趣的最后一点是计算两种位形的包层、屏蔽和线圈所占的体积 V ，从而探讨一下相对建造费用的问题。利用直观的几何模型可得 V 的表达式：

$$\left. \begin{aligned} V &= \pi^2 \{ wh\bar{R} - 2\kappa a^2 [R_0 - (1 - 8/3\pi)a] \} \\ w &= a + c + (b_i + b_0)/2 \\ h &= \kappa a + b_0 + c \\ \bar{R} &= R_0 - a - b_i - c + (8/3\pi)w \end{aligned} \right\}$$

- 其中， b_i 和 b_0 分别是环内侧和外侧的包层及屏蔽层厚度。体积随中子功率通量的变化曲线如右图所示。跟预想的一样，ST在中子功率通量适中时的体积比标准托卡马克小，意味着费用低。
- 上述简化分析提供了ST在性能方面与标准托卡马克相比的定性特点。结论是：作为中低中子功率通量水平的中子源，ST较之标准托卡马克具有潜在的优势。



聚变中子源的包层、屏蔽和线圈所占的体积与中子功率通量的函数关系

7.1 托卡马克——托卡马克小结

- 托卡马克是目前有可能成为第一代聚变反应堆的首选方案，这主要得益于它高品质的物理性能。具有截面拉长的非圆截面托卡马克能够在不需要理想导体壁的情形下稳定地约束反应堆级别的等离子体压强。其最大的物理缺陷是相应的压强分布不能产生足够大的自举电流，从而使对外部电流驱动的需求降到足够低的水平，以满足反应堆的经济性。
- 以中空电流分布和中空安全因子分布为特征的，能产生比例高得多的自举电流的先进托卡马克运行模式解决了这一困难。但是，这种性能的实现破坏了特鲁瓦永极限，通常导致 $n = 1$ 气球型电阻壁模的激发，因此需要采用反馈系统来抑制 $n = 1$ 模。尽管如此，AT托卡马克似乎仍是目前通向聚变反应堆的最有前途的途径。
- 最后，一种被称为球形托卡马克（ST）的更现代的位形作为聚变反应堆的一种可能选择方案被引入。ST本质上是环径比很小的托卡马克，其设计目的是为了借助 $\varepsilon \rightarrow 1$ 来充分利用 $\beta \sim \varepsilon$ 的磁流体力学稳定性定标关系。更详细的分析表明，尽管ST可实现较高的 β 值，但是相应的等离子体压强通常要比标准托卡马克低。因此从反应堆角度看，ST相比于标准托卡马克并不具有显著的优势，但它作为中低中子功率通量水平的体中子源可能更具吸引力。

主要内容

- 7.0 引言
- 7.1 托卡马克
- 7.2 仿星器
- 7.3 反场箍缩
- 7.4 场反位形

7.2 仿星器——仿星器概述

- 仿星器也是一种主要磁约束聚变概念。它本质上就是一种三维结构，我们可以将这种结构看成弯曲成环的螺旋对称系统。产生仿星器磁场位形可以采用各种不同的线圈构造和布置方法，但最终所需的磁场只有3种：①相对较强的轴对称环向磁场 $B_\phi(r, \theta)$ ；②强度中等的螺旋形磁场，它具有 $l\theta - n\phi$ 的对称性，绝大部分情形下是多个具有不同 l 或 n 的谐波分量的叠加；③一个较小的轴对称垂直磁场 $B_V(r, \theta)$ 。仿星器没有欧姆驱动或外部驱动的环向电流，这是它极为重要的一个优点。换句话说，在仿星器中流动的净的环向电流只可能是由自举效应自然产生的。
- 从物理性能的观点来看，仿星器是一种与托卡马克最为相近的磁约束聚变概念。二者相对较强的环向磁场均可以有效地稳定约束适度大小的等离子体压强（对应的 $\beta \sim 0.05$ ）。仿星器在实现这种性能指标时无需理想导体壁，因此可以预期，电阻性壁模在仿星器上并不重要。
- 环形系统里螺旋场与垂直场的组合拥有非常有利的平均曲率，并且可以提供大于1的安全因子。这些磁场对于单粒子约束也是至关重要的。具体到仿星器，由于这种位形的三维本质，如果仿星器的磁场设计得不好，就可能导致粒子由于纯粹的经典机制而迅速损失，其损失速度甚至可能超过微观湍流驱动的反常输运水平。这种快速经典损失之所以会发生，是因为蹩脚的仿星器磁场形成了损失锥，并使粒子运动大大偏离磁面。经过多年的研究，仿星器研究者们已经知道怎样将这些磁场位形驱动的粒子损失减小到最小，避免其支配输运。

7.2 仿星器——仿星器概述

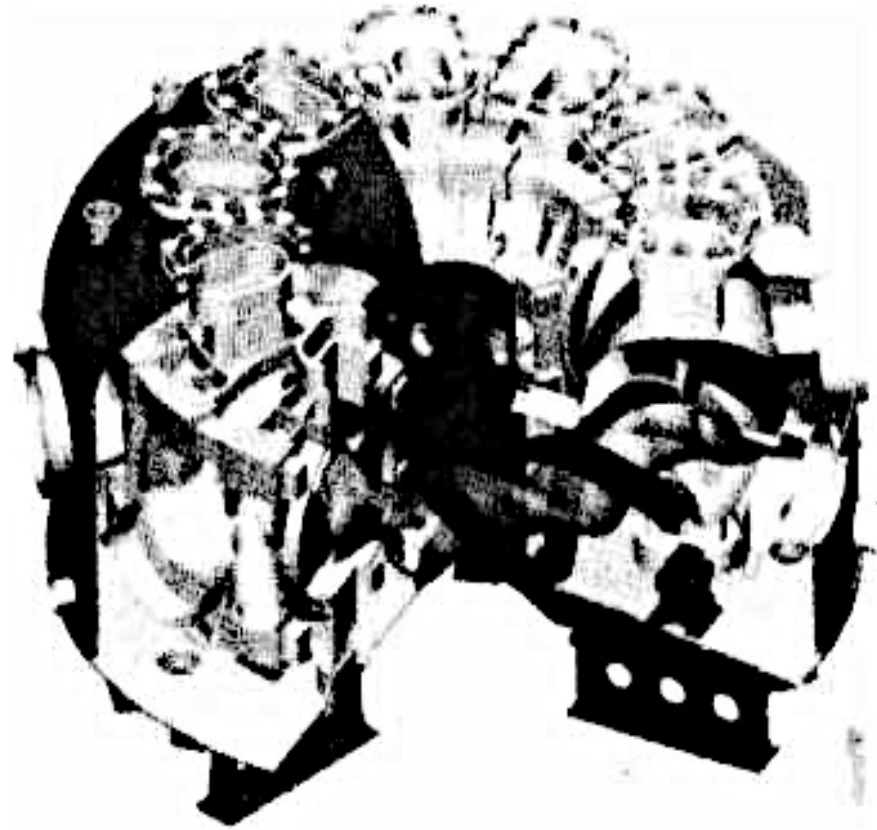
- 在物理设计策略方面，存在两种优化仿星器位形下多自由度的基本方法：第一种方法着眼于优化磁流体力学平衡和稳定性能；第二种方法重在优化单粒子约束。此外，由于三维结构分析的难度，直到20世纪90年代后期，用于上述这两种优化方法的理论和计算工具才成熟起来。对三维仿星器物理理解的加深使人们在提高仿星器实验性能的道路上取得了坚实的进步。现在，仿星器实验获得的最高 β 和 τ_E 已经接近——有时候甚至可以媲美——相似尺寸的托卡马克。这确实是非常了不起的成就。
- 现在我们来考虑仿星器作为聚变反应堆的优点与缺点。与标准托卡马克相比，仿星器有两个主要优点：首先，由于无需欧姆感应或其他电流驱动手段，它是自然的稳态运行装置；其次，由于环向流动的电流很小甚至完全没有，因此激发大破裂的可能性大大减轻。这两个优势无疑是令人向往的。
- 相较于托卡马克，仿星器有一个最主要的缺点。正如前述，产生仿星器磁场所需的线圈系统的技术复杂程度要远远高于托卡马克线圈系统，因此建造成本大大增加，同时还会使可达到的最大磁场强度受到更严格的限制。最后，这个缺点必须与托卡马克所面临的如何在先进运行模式下克服电流驱动和大破裂等问题的难度进行权衡。

7.2 仿星器——仿星器概述

- 本小节主要目的是认清仿星器分析在数学上的复杂性，这是由其三维的几何本性决定的。由于这一分析已经超出了本课程的范围，这里不做讨论。我们将转向描述三个当前正在研究的最大的仿星器项目。它们分别是：①日本国家聚变研究所（NIFS）的大型螺旋装置（LHD）；②德国马克斯·普朗克等离子体物理研究所的W7-X；③美国普林斯顿等离子体物理实验室（PPPL）的国家级紧凑型仿星器实验（NSCX）装置。目的是要了解这些装置并弄清这些设计背后的动机与理念。必要时，还将简要地引用一些实验结果或通过数值计算得到的理论预期结果。

7.2 仿星器——大型螺旋装置 (LHD)

- LHD是由日本建造并运行的十亿美元级仿星器实验装置。LHD装置的磁体结构属于一种特殊的仿星器形式，称作螺旋器 (heliotron)。具体来说，它的磁体系统由两组连续的、互相环绕的螺旋-环形线圈加上一组轴对称的垂直场线圈组成，如右图所示。螺旋-环形线圈提供环向磁场和螺旋磁场。该线圈还产生很大的垂直 磁场，不过其大部分被外部垂直场线圈产生的磁场所抵消，只保留一个较小并可调节的净垂直磁场以优化物理性能。



日本的LHD仿星器装置示意图

7.2 仿星器——大型螺旋装置（LHD）

- LHD的螺旋环形线圈是由超导材料制成的，并且由于拓扑结构的限制只能在现场绕制。不言而喻，LHD螺旋环形线圈的设计与建造代表了当今工程技术上的非凡成就。尽管连续的线圈在LHD上运行良好，但是大多数人认为，一旦将这种仿星器设计外推至反应堆级别，则这种形式的线圈并不代表着最佳的设计途径。现场绕制线圈的制约加上相应的维护难度以及替换线圈的高昂成本等，意味着我们有必要考虑另一种备选方案。这种备选方案涉及模块化的线圈设计，将在后面W7-X和 NSCX小节里简要介绍。
- 在我们考虑建造LHD背后的物理动机。LHD设计之初，当今可以利用的许多先进的三维计算工具还不存在，一些与单粒子约束相关的细节当时也尚未完全认识清楚。因此，LHD设计团队利用当时能够获取到的最佳信息，将结构优化设计的目标确定为磁流体力学平衡和稳定性能的最大化而不是单粒子约束性能优先。另一个更深层次的复杂因素是，当时能够对危险的外扭曲模进行稳定性测试的三维宏观磁流体力学计算代码尚未成熟到可以作为日常的设计工具来使用的程度，计算的精度以及运算时间是主要问题。为此设计团队将针对一类较容易用数值方法进行测试的局域内部磁流体力学模（也就是基本的交换模）来最大化 β 作为目标进行几何优化。这些考虑构成了决定线圈设计、诊断设备位置以及LHD标准运行模式的基础。

7.2 仿星器——大型螺旋装置 (LHD)

- 现在，LHD已经运行，读者可能会问“LHD运行得怎么样？”应当说，该装置早期的运行结果达到了可以接受的性能，但并没有如最初预期的那样好。在设计与建造阶段，人们对仿星器物理理解进一步加深，发现针对局域模的磁流体力学稳定性问题可能并非最严峻的。这些模式要么没有被激发，要么即使被激发也早在一个较低并且无害的水平上就已经饱和。反之，单粒子约束性能差很可能成为更为严重的问题。幸好，对装置的运行进行一些相对较小的调整后性能得到了显著提升。具体的调整包括：重新编制线圈电流的运行程序，以便将等离子体相对于最初的运行模式进一步向里偏移。这个偏移极大地提高了单粒子约束的质量。
- 下表概括了到2004年为止LHD最佳的表现。表中所列的参数是在一些不同类型的优化放电中得到的，其中一种放电模式是最大化 T_e ，另一种是最大化 T_i ，第三种是最大化 τ_E 。列出的还有 $p_i\tau_E$ ， β 和 n_e 等参数所达到的最大值。这些值与相似尺寸的托卡马克装置上能达到的值可比或者稍微偏小。仿星器自然的稳态性质也得到了体现。仿星器无需电流驱动的特点再加上超导线圈的应用，允许LHD的放电持续数百秒钟。

7.2 仿星器——大型螺旋装置 (LHD)

| | T_e/keV | T_i/keV | τ_E/s | P_{aux}/MW | n_e/m^{-3} |
|------------------|-----------------------------|------------------|-------------------|----------------------------|----------------------|
| T_e 最大值 | 10.0 | 2.0 | 0.06 | 1.2 | 5.0×10^{18} |
| T_i 最大值 | 4.2 | 7.0 | 0.06 | 3.1 | 2.9×10^{18} |
| τ_E 最大值 | 1.3 | 1.3 | 0.36 | 1.5 | 4.8×10^{19} |
| $p_i \tau_E$ 最大值 | 0.035 atm s | | | | |
| β 最大值 | $0.032 B_\phi = 0.5 T$ | | | | |
| n_e 最大值 | $1.6 \times 10^{20} m^{-3}$ | | | | |

电子温度、离子温度和能量约束时间取最大值条件下的LHD优化放电的实验参数（表中一并列出了已取得的 $p_i \tau_E$ ， β 和 n_e 的最大值）

7.2 仿星器——大型螺旋装置 (LHD)

- LHD未来的研究活动将包括各种各样的装置升级，尤其是辅助加热源方面的改造，以便能够在更高的密度和温度下实现更长时间的放电。在相当好的单粒子约束的基础上，物理目标将放在现有微观湍流驱动的反常输运的条件下实现能量约束时间的最大化，并且测定可达到的磁流体力学宏观稳定的最大 β 。

7.2 仿星器——仿星器里的粒子导心轨道

- 另外两个仿星器，W7-X和NCSX，W7-X已经建设完成并进入实验，而NCSX则无限期停工。这些装置最主要的物理目标都集中在通过提高单粒子约束来使性能最优化，第二目标则是磁流体力学平衡和稳定性。然而，两个装置为达到这些目标而采用的战略却大为不同。
- 为领会各个装置背后的动机，我们必须理解三维空间中导心轨道的行为。这需要做一些稍显复杂和抽象但对于理解仿星器仍属非常基本的分析。本小节总结了三维导心行为的基本特征。分析的基本目的是要证明，在任意给定的磁面上，沿某一轨道运动的粒子的导心行为只与磁场的大小（ $B = |\mathbf{B}|$ ）有关，而与其矢量性质无关。这绝不是一个显然的结论，但一旦确立，它就能为创造各种优化仿星器中单粒子约束的方法提供基础。W7-X和NCSX展示了两种不同的方法。
- 理解三维空间中的导心行为包括两个步骤：第一，必须引入一个合适的坐标系，以便自动将磁流体力学平衡方程所需的若干约束条件考虑进来；第二，用这些坐标来表示导心轨道的一般表达式，从而得出我们想要的结论，即任意磁面上的轨道只与 B 有关。

7.2 仿星器——仿星器里的粒子导心轨道

- 步骤概括如下：

- 1. 仿星器坐标系

- 粒子导心在一般三维空间中的运动方程的推导过程前面已经考虑过了。对于稳态平衡，导心轨道可以写作 $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_g(t) + v_{\parallel}(t)\mathbf{b}$ ，其中 $\dot{\mathbf{r}}_g(t)$ 表示垂直漂移（即磁场梯度漂移和曲率漂移），而 $v_{\parallel}(t)$ 表示平行运动。为方便起见，这里重写确定 $\mathbf{r}_g(t)$ 和沿磁场线的位置 $l(t)$ （对于带正电荷的粒子）的方程（对于带正电荷的粒子）：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_g}{dt} &= \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} \\ \frac{dl}{dt} &= v_{\parallel} \end{aligned} \right\}$$

- 乍看起来，由于矢量 \mathbf{B} 和 \mathbf{R}_c 的出现，似乎意味着导心轨道依赖于磁场的矢量性质。但并不必然如此，可以说说明这一点的一个简单例子是带电粒子在磁场 $\mathbf{B} = B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z$ 中的运动，这里 B_y 和 B_z 是常量。描述轨道的方程是：

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v}_x &= e(v_y B_z - v_z B_y) \\ m\dot{v}_y &= -ev_x B_z \\ m\dot{v}_z &= ev_x B_y \end{aligned} \right\}$$

7.2 仿星器——仿星器里的粒子导心轨道

- 表面上看，这个问题的解似乎依赖于磁场的矢量性质，因为 B_y 和 B_z 分别存在于运动方程中。然而，只要引入一组“聪明的”变量 $v_n = v_x$ ， $v_t = (v_y B_z - v_z B_y)/B$ 以及 $v_{\parallel} = (v_y B_y + v_z B_z)/B$ ，这里 $B = (B_y^2 + B_z^2)^{1/2}$ ，方程组就可以化简为：

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v}_n &= eBv_t \\ m\dot{v}_t &= -eBv_n \\ m\dot{v}_{\parallel} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- 可以看到，在新的坐标下，轨道仅仅依赖于单个的量 B ，而不是分开的矢量分量 B_y 、 B_z 。对一般三维磁场的相应分析尽管看起来复杂但其分析思路是相同的。
- 从恰当地引入一组“聪明的”变量来开始三维分析。作为解题的第一步，不妨想象已经得到磁流体力学方程的一个数值解， $B = B(r, \theta, \phi)$ 和 $p = p(r, \theta, \phi)$ 。原则上，导心轨道可以通过如下方式将 \mathbf{r}_g 和 l 与 r, θ, ϕ 联系起来求得。令 $\dot{\mathbf{r}}$ 的两个等价的表达式相等： $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_g + l\dot{\mathbf{b}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + (R_0 + r\cos\theta)\dot{\phi}\mathbf{e}_{\phi}$ ，然后将表达式代入 $\frac{d\mathbf{r}_g}{dt}$ 和 $\frac{dl}{dt}$ 的表达式求解 $r(t)$ ， $\theta(t)$ 和 $\phi(t)$ 。虽然直觉上使用 r, θ, ϕ 明显是一种定义导心位置的方法，但这些坐标不具备显示轨道仅仅依赖于 B 的属性。

7.2 仿星器——仿星器里的粒子导心轨道

- 我们要求的坐标更为抽象，定义如下：通常需要3个坐标来确定导心的位置，但这里不是用 r, θ, ϕ 坐标，而是引入等效的以 ψ, χ, ζ 标记的“磁面”坐标。这里，在 2π 范围内， ψ 表示 p 为常量的等磁通面内包含的极向磁通，它基本上是一个类似于径向坐标的磁面函数坐标，表征导心所在位置的磁面。顺便说一句，对于托卡马克来说，使用 ψ 来标记“磁面”比使用 p 更加方便。但由于 $\mathbf{B} \cdot \nabla_p = 0$ 意味着 $p = p(\psi)$ ， $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$ ，因此， p 和 ψ 是等价的并且都是正确的标记。接下来，量 χ 是一个类似于极角 θ 的角坐标， θ 每增加 2π 的值 χ 也增加 2π 。通常，它受到环向角和极向角叠加的周期性调制。类似地， ζ 则是一个类似于环向角 ϕ 度的角坐标， ϕ 每增加 2π 它的值也增加 2π 。它也同时受到环向与极向的周期性调制。概括起来，抽象的 ψ, χ, ζ 坐标与更为熟悉的 r, θ, ϕ 坐标之间的一般关系可以写作：

$$\left. \begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi) &= \psi_0(r) + \sum_{l,n} \psi_{ln}(r) e^{i(l\theta + n\phi)} \\ \chi(r, \theta, \phi) &= \theta + \sum_{l,n} \theta_{ln}(r) e^{i(l\theta + n\phi)} \\ \zeta(r, \theta, \phi) &= -\phi + \sum_{l,n} \phi_{ln}(r) e^{i(l\theta + n\phi)} \end{aligned} \right\}$$

- ϕ 前的负号用于保证 ψ, χ, ζ 坐标构成右手坐标系，很清楚，两种坐标系都可以有效地描述导心的位置。

7.2 仿星器——仿星器里的粒子导心轨道

- 在这一点上，系数 ψ_{ln} ， θ_{ln} ， ϕ_{ln} 是可以任意选择的。布泽（A. H. Boozer）为这些系数给出了一种特别聪明的选择。他证明了，总可以找到一组 ψ_{ln} ， θ_{ln} ， ϕ_{ln} ，使得磁场可以表示为如下两种可相互替换的等价形式：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla\zeta \times \nabla\psi + q(\psi)\nabla\psi \times \nabla\chi \\ \mathbf{B} &= i_1(\psi)\nabla\chi + i_p(\psi)\nabla\zeta + \tilde{i}(\psi, \chi, \phi)\nabla\psi \end{aligned} \right\}$$

- 这些表达式中， $\psi = \Psi_p/2\pi$ ，这里 Ψ_p 是极向磁通。物理量 $q(\psi)$ 是安全因子。同样， $i_t(\psi) = (\mu_0/2\pi)I_t(\psi)$ ， $i_p(\psi) = (\mu_0/2\pi)I_p(\psi)$ ，这里 $I_t(\psi)$ 是环向等离子体电流，而 $I_p(\psi)$ 是线圈内的和等离子体的极向总电流。最后， $\tilde{i}(\psi, \chi, \phi)$ 是一个在任意 χ 或 ζ 的 2π 周期内平均值为零的任意函数。磁场这两种等价形式的存在性的证明完全不是那么显而易见的，需要一些高级的分析。上式给出的两种坐标表达式对于理解仿星器是非常重要的，被称作“布泽坐标”。

7.2 仿星器——仿星器里的粒子导心轨道

- 现在假设存在一组布泽坐标。于是人们会问，这种双重表示有何价值？用一种形式点乘另一种形式我们就能找到答案。简单计算得到：

$$\nabla\psi \cdot (\nabla\chi \times \nabla\zeta) = \frac{B^2}{i_t + qi_p} = f(\psi)B^2$$

- 量 $\nabla\psi \cdot (\nabla\chi \times \nabla\zeta)$ 表示从 ψ, χ, ζ 坐标转换到 r, θ, ϕ 坐标的雅可比行列式 J 。所以，布泽坐标的优点在于雅可比行列式仅仅依赖于 ψ 和 $B = B(\psi, \chi, \zeta)$ 。它不依赖于任何给定磁面上磁场的矢量性质，因为没有出现任何单独的矢量分量。这对于简化下述的导心轨道非常关键。

7.2 仿星器——仿星器里的粒子导心轨道

■ 2. 布泽坐标系下的导心轨道

- 现在的目标是确定给定粒子沿着其导心轨道运动时 ψ , χ , ζ 坐标随时间的演化。基本运动方程是

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\psi \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\chi \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\zeta \end{aligned} \right\}$$

- 稳态下, $\partial/\partial t = 0$ 。而且, 要让粒子沿着导心轨道移动, 方向导数必须具有 $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_g + v_{\parallel}\mathbf{b}$ 这样的形式。所以, 导心轨道方程可以简化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= (\dot{\mathbf{r}}_g + v_{\parallel}\mathbf{b}) \cdot \nabla\psi \\ \frac{d\chi}{dt} &= (\dot{\mathbf{r}}_g + v_{\parallel}\mathbf{b}) \cdot \nabla\chi \\ \frac{d\zeta}{dt} &= (\dot{\mathbf{r}}_g + v_{\parallel}\mathbf{b}) \cdot \nabla\zeta \end{aligned} \right\}$$

7.2 仿星器——仿星器里的粒子导心轨道

- 需要注意的一点是，这三个方程中，确定 $d\psi/dt$ 的方程是最重要的。这个方程描述粒子的导心运动是如何导致横越磁面的漂移的。这种运动如果是单向的，就会导致粒子直接从等离子体中漂移到壁（就像损失锥的情形那样）。即使在其他情形下，它也会通过增强扩散导致粒子的快速损失（也就是新经典输运）。导心 χ , ζ 位置的改变则不是那么重要，因为这些改变只代表磁面内的运动，并不是粒子径向损失的直接原因。基于这些讨论，并且考虑到 $\mathbf{B} \cdot \nabla\psi = 0$ ，接下来需要检验的关键方程是：

$$\frac{d\psi}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_g \cdot \nabla\psi$$

- 其中 $\dot{\mathbf{r}}_g$ 由 $\frac{d\mathbf{r}_g}{dt}$ 的表达式给出。上式可以写作：

$$\frac{d\psi}{dt} = \left(\frac{2E - \mu B}{eB} \right) \left[\frac{i_t}{i_t + qi_p} \frac{\partial B}{\partial \zeta} - \frac{i_p}{i_t + qi_p} \frac{\partial B}{\partial \chi} \right]$$

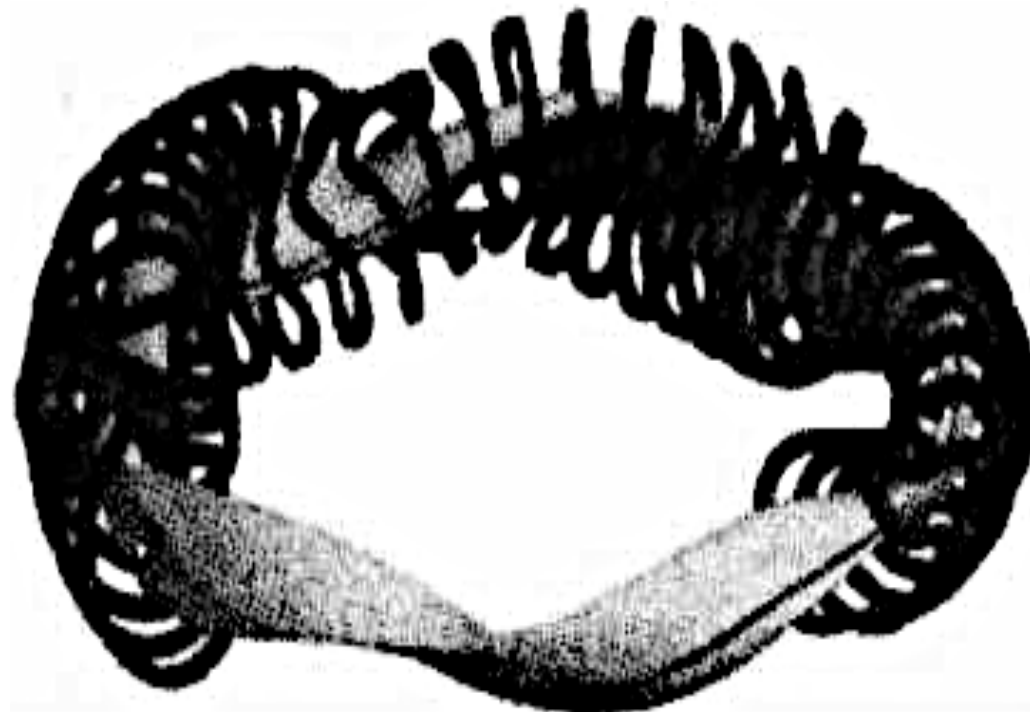
- 这里 $E = (m/2)(v_\perp^2 + v_\parallel^2)$, $\mu = mv_\perp^2/2B$ 都是运动常量，或者说，在上式中，它们都是关于时间微商的常数。

7.2 仿星器——仿星器里的粒子导心轨道

- $d\psi/dt$ 方程的关键特征是它的右边仅仅依赖于磁通 ψ 和磁场的大小 B ，而与磁场的矢量性质无关。 $d\chi/dt$ 和 $d\zeta/dt$ 方程也有相似的结论。下一代仿星器实验的优化设计中用的正是这一特征。
- 优化的仿星器基于“准对称”的想法，这是一种能够内在地提供优良的单粒子约束性能的属性。准对称可定性描述如下。仿星器的磁场通常是一个复杂的三维空间矢量函数： $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\psi, \chi, \zeta)$ 。通过精心选择组成总磁场的各螺旋谐波分量的大小和相位，就可以形成这样一种位形，其中磁场 \mathbf{B} 的各矢量分量能够以某种特定方式结合，使得 $B = |\mathbf{B}(\psi, \chi, \zeta)|$ 近似于二维函数。具有这种近似二维性质的位形被称为具有准对称性。三种可能的准对称位形分别是准环向对称位形 $B \approx B(\psi, \chi)$ ，准极向对称位形 $B \approx B(\psi, \zeta)$ 以及准螺旋对称位形 $B \approx B(\psi, l\chi - n\zeta)$ 。准对称性有助于提高单粒子约束性能的原因是这种位形具有两个运动守恒量，即能量守恒和与对称性方向关联的正则动量守恒。可以证明，存在守恒的正则动量，就一定存在相应的约束轨道。反之，在一个完全三维的结构里，如果不存在守恒的正则动量，则不能保证轨道一定被约束。
- 实际上，优化的准对称设计要求同时满足两个条件。首先是要求磁场位形尽可能接近准对称，这样就能让粒子不至于漂移磁面太远，并且不存在损失锥；其次是要求当 $B(\psi, \chi, \zeta)$ 变换回实用的 r, θ, ϕ 几何空间后，产生的磁场必须能够从物理上实现，并且能够由一组技术上可行的磁体产生。接下来的我们将结合这些考虑来讨论 W7-X和NCSX的不同的设计思想。

7.2 仿星器——WENDELSTEIN 7-X (W7-X)

- W7-X是一个造价十亿美元级别的装置，目前正在德国马克斯-普朗克等离子体物理研究所建造。它采用模块化的超导线圈，所以应该能够实现长脉冲运行。W7-X 的原理图如右图所示，从中可以看出各个线圈模块的技术复杂程度。



德国W7-X装置原理图

7.2 仿星器——WENDELSTEIN 7-X (W7-X)

- W7-X的设计基于准极向对称的概念[$B = B(\psi, \zeta)$]，这一概念的可行性最先是由较小的螺旋型先进仿星器 (W-AS) 上的实验结果得到证明的。定性地说，准极向对称与简单直线磁镜装置[它的磁场为 $B = B(r, z)$]有一些相似之处。它的磁场在极向角度上没有变化，并且没有平行于磁场流动的电流。同样，粒子在磁场的两个极大值之间被俘获。终端损失的问题则通过将一系列串联在一起的磁镜弯曲成一个环形而得以解决。所以，粒子离开某一个磁镜单元的终端就马上流入邻近的磁镜单元。
- 然而，W7-X的实际结构要比这种简单图像复杂得多。它的磁场必须设计成能够在没有任何外驱动平行电流的条件下实现环向力的平衡。同样，截面形状的细节也非常重要，因为业已证明，简单磁镜具有不利的平均曲率，会导致磁流体力学不稳定性。所以，W7-X设计的目标是要形成一个没有外驱动平行电流 但具有好的平均曲率的准极向位形。

7.2 仿星器——WENDELSTEIN 7-X (W7-X)

- 现在，我们来更具体地讨论如何实现无平行电流这一目标。让平行电流最小化的目的是为了提高单粒子约束对于等离子体压强变化的鲁棒性。通常来说，仿星器中的平行电流有两个主要贡献来源，这可以从下面简单推出的表达式中看出：

$$\mu_0 \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}}{B^2} = \mu_0 \frac{J_{\parallel}}{B} = \frac{1}{i_t + q i_p} \left[\left(i_p \frac{di_t}{d\psi} - i_t \frac{di_p}{d\psi} \right) + \left(i_t \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \zeta} - i_p \frac{\partial \tilde{I}}{\partial \chi} \right) \right]$$

- 第一项包含自举效应产生的净的环向电流，它正比于 $dp/d\psi$ 。第二项包含类似于偶极项的贡献，可以证明，它正比于 $(dp/d\psi)\cos\theta$ 。这一项是因等离子体为满足环向力平衡而出现位移产生的，通常称为普费尔施-施吕特 (Pfirsch-Schluter) 电流。我们看到，通过在设计过程中将 J_{\parallel} 最小化，总磁场（外加磁场与感生磁场之和）对压强分布改变的灵敏度变得最小。换句话说，如果一个装置在较低 β 拥有不错的单粒子约束性能，那么当 β 提高时这种性能会继续保持。

7.2 仿星器——WENDELSTEIN 7-X (W7-X)

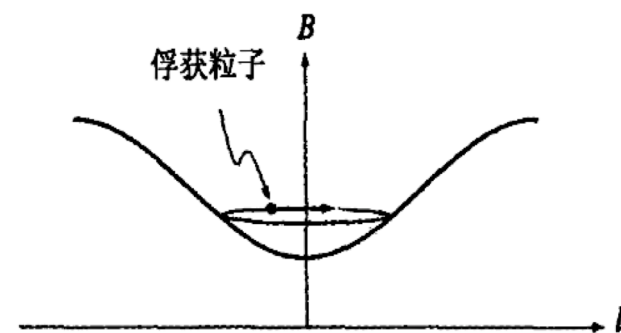
- 接下来，考虑布泽坐标系下准极向对称的原理，并具体说明为什么这一原理有助于使粒子漂离磁面变得最小。在最简单的水平上，检视 $\frac{d\psi}{dt}$ 表达式可以知道，选择 $B = B(\psi)$ 或许是理想的，因为这种位形的性质就像直的一维圆柱，即都没有粒子漂离磁面。但不幸的是，这种性质在环形位形下物理上是无法实现的，因为环形位形起码是一种二维结构。于是，W7-X小组将目标集中在准极向概念 $B = B(\psi, \zeta)$ 上。尽管如此，精确的准极向结构在几何上也是不可能的。因此，在确保单粒子约束这一基本思路不变的前提下，W7-X小组主要是要解决如何针对那些相对于磁面可能发生最大偏移的最危险的一类粒子来尽可能实现位形上的准极向对称性。这种准极向对称位形一旦实现，这类粒子将转变为俘获粒子，由此W7-X小组即可以通过其设计来实现使这些粒子的损失最小化。

7.2 仿星器——WENDELSTEIN 7-X (W7-X)

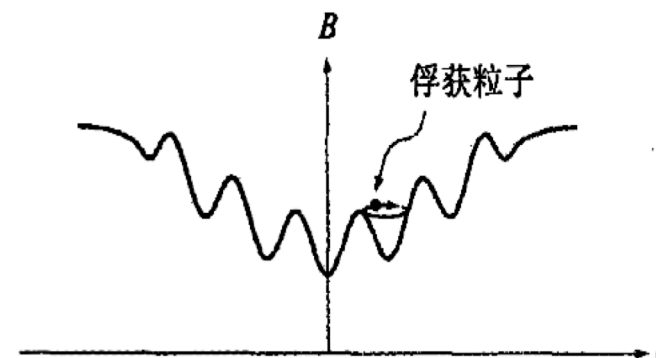
- 俘获粒子的产生是因为在环形几何下 $\nabla_{\parallel} B \neq 0$ 。右图描述了 B 关于 l （这里 l 是沿磁场线的距离）的典型分布。右图（a）表示的是轴对称托卡马克的分布，右图（b）表示的是仿星器或者具有环向纹波（由于空间分离的环向磁场线圈的数量有限所致）的托卡马克的分布。 v_{\parallel} 较小的粒子在 B 的极小区域被俘获。
- 为了理解俘获粒子的行为，有必要对极小点附近的 $B(\psi, \chi, \zeta)$ 进行分析。简单的计算说明，这样的极小点在下式成立时出现：

$$\nabla_{\parallel} B = \mathbf{b} \cdot \nabla B = \frac{J}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial \chi} + q \frac{\partial B}{\partial \zeta} \right) = 0$$

- 接下来考虑深度俘获的粒子，它的 $v_{\parallel} \approx 0$ 。在环形位形下，这种粒子通常不可能一直被约束在某个磁面的狭窄区域中，因为由于 B_{ϕ} 的 $1/R$ 依赖关系， ∇B 漂移只有纯垂直分量，因此通常不能在等离子体的顶部和底部被抵消（因为粒子只能沿磁场线走一小段）。



(a) 轴对称托卡马克情形



(b) 三维仿星器情形

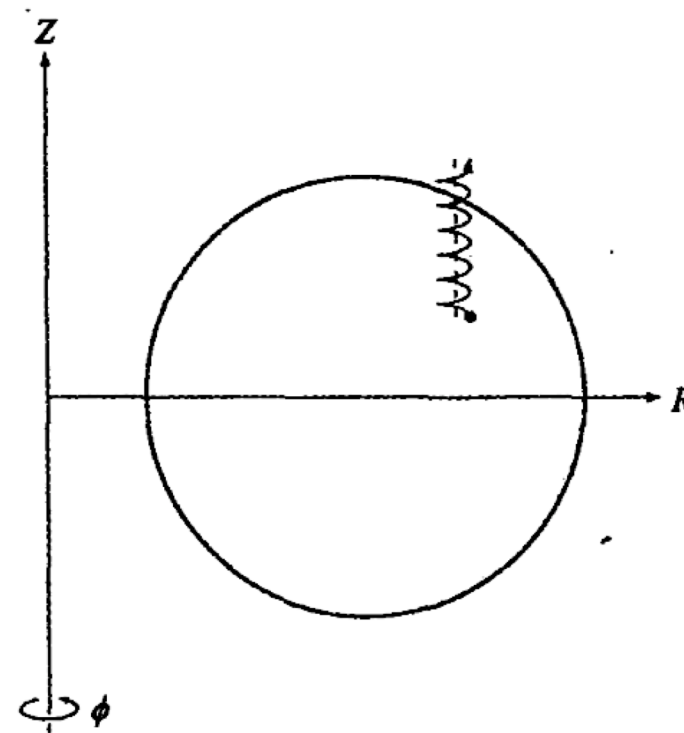
B 关于 l 的函数曲线

7.2 仿星器——WENDELSTEIN 7-X (W7-X)

- B_{max} 附近的 B 的几何形态的变化决定了粒子是否会漂离磁面。这种几何变化正比于 ∇B 在磁面上的分量，但却垂直于磁场线：

$$\frac{d\psi}{dt} \sim \nabla_{\perp} B = \frac{1}{|\nabla_{\psi}|} (\nabla_{\psi} \times \mathbf{b}) \cdot \nabla B = -\frac{J}{B|\nabla_{\psi}|} \left(i_p \frac{\partial B}{\partial \chi} - i_t \frac{\partial B}{\partial \zeta} \right)$$

- 如右图所示，位于 $\nabla_{\perp} B \neq 0$ 处的深度俘获粒子并不环绕原点运动而是漂移出等离子体。即使粒子并未损失，但它相对磁面的偏离很可能非常大，从而导致大的扩散损失。尽管任一时刻俘获粒子的快速损失比例可能较小，但它们的数量却由于速度空间中非俘获粒子的库仑碰撞而不断得到补充。换句话说，俘获粒子常常代表着等离子体中最快的粒子和能量损失通道。W7-X的设计目标是将极小点（此处 $\nabla_{\parallel} B = 0$ ）附近的 $\nabla_{\perp} B$ 漂移最小化。从某种程度上说，深度俘获粒子不离开磁面而是保持良好的约束是可能的。换句话说，在W7-X的设计中，准极向对称属性 $\partial B / \partial \chi = 0$ 集中表现在极小 B 场区域，这些区域中 $\partial B / \partial \zeta = 0$ 。



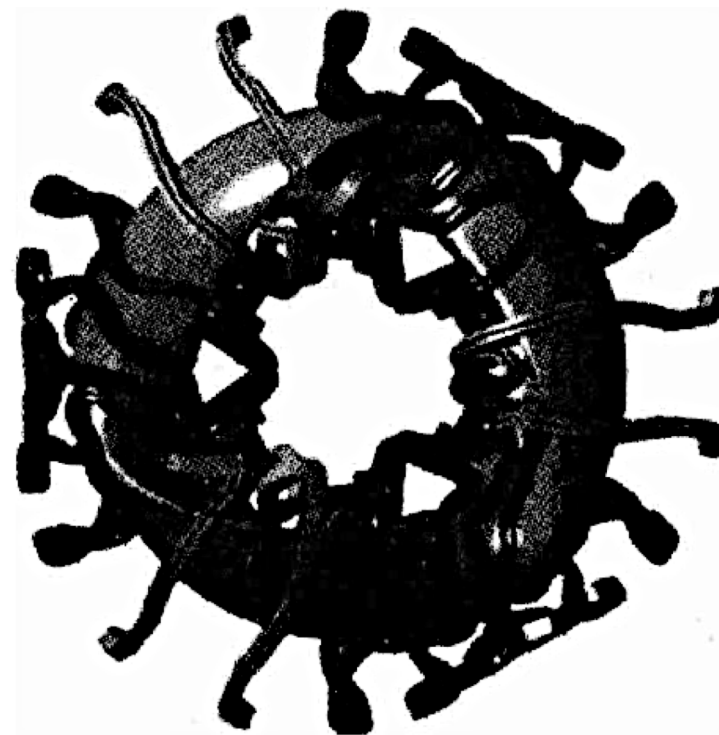
深度俘获的粒子， ∇B 漂移导致它直接漂移出等离子体

7.2 仿星器——WENDELSTEIN 7-X (W7-X)

- W7-X的设计考虑了所有粒子的轨道，而不只是深度俘获粒子轨道。实际上，只要深度俘获粒子能被良好地约束，其余粒子偏离磁面的漂移也都能小到可以接受的程度。因此，W7-X的几何结构通过优化在磁场极小点（同时有最小 J_{\parallel} ）处实现了准极向对称。更深入的研究表明，在环径比相对较大的时候（ $R_0/a \approx 10.6$ ）能够得到优化的设计方案。定性上说，在磁场线的某一位置 $\nabla_{\perp} B$ 和 $\nabla_{\parallel} B$ 同时为零意味着局域来讲磁场线在这些位置是“直”的。所以，从单粒子约束的观点来看，W7-X可以看作一系列沿环向串结起来的磁镜，每个磁镜在其磁场极小点附近是“柱对称”的。
- W7-X完工并且运行以后，检验三维几何下等离子体约束的重要理论。

7.2 仿星器——国家紧凑型仿星器 (NCSX)

- NCSX代表了在三维空间中实现高质量单粒子约束性能的不同途径。它的设计基于下述准环向对称概念。目前实验装置刚刚完成了设计阶段，预期建造工作将很快在美国普林斯顿等离子体物理实验室开始。它是一个新颖的实验装置，在紧凑的几何空间里使用模块化的铜线圈。右图是NCSX的一张图片。与W7-X一样，线圈模块从技术上是非常复杂的。整个实验的耗资估计将在一亿美元量级。



美国NCSX的示意图

7.2 仿星器——国家紧凑型仿星器 (NCSX)

- 从磁流体力学的观点来看，NCSX可视为仿星器和托卡马克的混合体。与W7-X不同，NCSX的位形允许存在——事实上它需要——很大的净的环向等离子体电流，用以产生类似于托卡马克所具有的良好磁流体力学性质、输运性质以及技术特性。这个环向电流是由自举效应自然产生的，因而不需要外部的电流驱动。由这个净电流产生的典型的磁场线转动变换可以与螺旋磁场产生的转动变换相比，但总是小于后者。这是为了避免让整个结构对压强分布（它决定了自举电流的分布）过度敏感。最重要的是，这个环向电流也最终导致了一种更加紧凑的设计， $R/a \sim 4$ 。人们期望，按这种紧凑设计外推得到的反应堆能够具有较小的单元体积（即较低的总功率输出），这意味着较低的成本（尽管不一定是较低的每瓦成本）。与欧洲和日本不同，美国通常认为紧凑性是一个更为重要的问题。
- NCSX设计背后最核心的概念就是准环向对称。这个概念提供了固有的优秀单粒子约束性能。定性地说，准环向对称位形 $[B = B(\psi, \chi)]$ 与轴对称托卡马克 $[B = B(r, \theta)]$ 有某些相似之处。就像在一个轴对称的环中运动一样，粒子的垂直 ∇B 漂移在横截面的顶端和底端相互抵消。同样，等离子体中流动着真实的环向电流，在没有导体壁、有限 β 的条件下也可以拥有良好的磁流体力学稳定性。

7.2 仿星器——国家紧凑型仿星器 (NCSX)

- 接下来我们要更深入探究这种准轴对称性是怎样导致良好的单粒子约束的。让我们再次将注意力集中在俘获粒子上,它们是最容易从等离子体中快速损失的。为了比较,我们不妨先回想一下W7-X的设计思想:设计的磁场 B 应使得深度俘获粒子不会漂移出磁面;同时当 $\nabla_{\parallel}B = 0$ 时有 $\nabla_{\perp}B = 0$ 。在 $\nabla_{\perp}B \neq 0$ 的地方,粒子将在局部 B 极小的任意极向位置被俘获,并且直接漂移出等离子体,因为垂直的 ∇B 漂移通常在等离子体的顶部和底部不会抵消。
- 类似地,具有准环向对称性的NCSX也不允许深度俘获粒子漂移出磁面。这可由导心轨道的布泽表达式直接推出。准环向对称等价于要求在所有位置上有 $\partial B / \partial \zeta = 0$,所以 B 的极小点,即深度俘获粒子的位置,由满足下列条件的角度 χ 确定:

$$\nabla_{\parallel}B = \frac{J}{B} \frac{\partial B}{\partial \chi} = 0$$

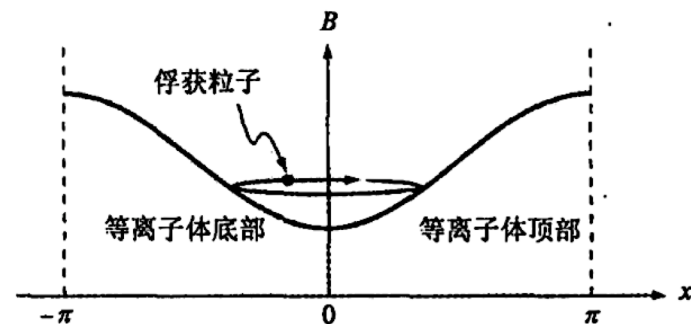
- 由于准环向对称性,上式也意味着偏离磁面的垂直漂移在下面这一点为零:

$$\nabla_{\perp}B = \frac{J i_p}{B |\nabla \psi|} \frac{\partial B}{\partial \chi} = 0$$

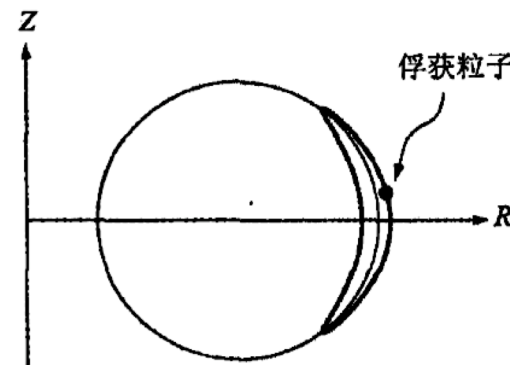
- 深度俘获的粒子在准环向对称的结构里不可能直接损失。

7.2 仿星器——国家紧凑型仿星器 (NCSX)

- 有趣的是，准环向对称性还保证中等或者弱俘获粒子的垂直漂移总能够在等离子体的顶部和底部抵消。右图通过画出 $B - \chi$ 曲线在极向平面上的投影说明了这一点。关键的一点是，由于具有类似于托卡马克的对称性， B 极小点只有一个并且出现在环的外侧（即 $\chi = \theta = 0$ 的位置）。因此，所有俘获粒子的轨道具有上下对称性，如图所示，导致垂直的 ∇B 漂移在等离子体顶部和底部精确地抵消。结论是准轴对称不允许俘获粒子直接从等离子体内损失掉。
- 我们看到，虽然准极向对称与准环向对称对于约束俘获粒子有一些相似之处，但它们有一个重要的不同点：准极向对称系统可以设计成极小或者完全没有平行电流，而准环向系统总是有净的平行电流。所以，完全不同的目标——消除或是利用这个平行电流——导致W7-X和NCSX实验装置具有极其不同的外观。



(a) 准轴对称仿星器中的俘获粒子



(b) 俘获粒子在等离子体的顶部和底部消耗同样多的时间，从而抵消了垂直的 ∇B 漂移

7.2 仿星器——国家紧凑型仿星器 (NCSX)

- 最后，我们注意到，如前所述，尽管没有直接的俘获粒子损失，但中等或者弱俘获粒子漂离磁面带来的因扩散导致的粒子损失要比非俘获粒子更加迅速。这实际上是所有准环向对称位形，包括完全轴对称的托卡马克，都会遇到的问题。这种增强了的损失被称为“新经典”输运。尽管如此，从聚变反应堆总的约束需求来看，新经典损失在一定程度上还是能够接受的。事实上，由微观湍流驱动的反常输运通常起主导作用。总的结论是，W7-X的准极向串接磁镜概念和 NCSX的类托卡马克的准环向概念是三维仿星器位形避免粒子与能量出现不可接受的大损失的两种方法。
- 当NCSX运行起来以后，它将为准环向对称原理提供重要的检验。深入的三维分析以及位形中大量类似托卡马克的性质，使得NCSX小组对实验的成功充满了信心。

7.2 仿星器——仿星器小结

- 仿星器是一种三维磁场位形。这种概念的所有版本均具有内在稳态运行的主要优点，不需要通过电流驱动来维持放电。通常来说，仿星器的净环向电流不大甚至为零，这意味着它所面临的磁流体力学不稳定性导致的大破裂问题应该比托卡马克小。
- 目前主要有三种类型的仿星器实验装置：日本的LHD、德国的W7-X和美国的NCSX。LHD已经建成并实现满负荷运行。它采用连续绕制的超导线圈，到目前为止，其性能与相似尺寸的托卡马克可比或有些许偏低。W7-X已经建造完成，它是一个采用模块化线圈的大型超导装置。W7-X的主要目标是检验准极向串接磁镜对称性原理的可行性，这种位形具有良好的单粒子约束，并且实质上没有净的自举驱动的平行电流或类似偶极驱动的普费尔施-施吕特电流。NCSX刚刚完成设计，应当很快便会开始建造。它具有紧凑性的设计，并使用模块化的铜线圈。NCSX是一个仿星器与托卡马克的混合体，具有很大的环向自举电流。它的首要目标是通过类似托卡马克的准环向对称性获得较好的粒子与能量约束。
- 在等离子体物理性能方面，仿星器是托卡马克的主要竞争对手。但最终，预期的物理优势必须与建造更大规模的实验装置或者反应堆所需的超导线圈模块而增加的复杂度和造价进行权衡。

主要内容

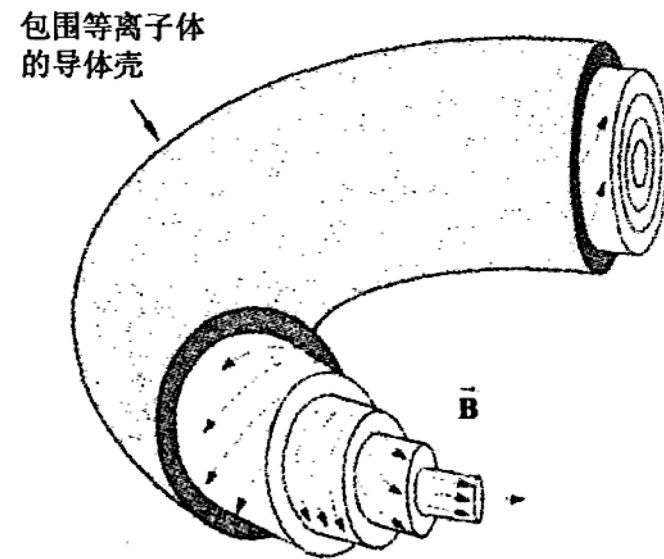
- 7.0 引言
- 7.1 托卡马克
- 7.2 仿星器
- 7.3 反场箍缩
- 7.4 场反位形

7.3 反场箍缩——反场箍缩简介

- 反向场箍缩位形 (The Reversed Field Pinch, RFP) 是第一种利用表面电流模型进行分析的位形。它是一种轴对称的环形位形，其特点是大的环向电流，中等大小的环向磁场以及相对较高的 β 值。目前国际上的RFP装置主要有这么几个：①麦迪逊对称环 (Madison Symmetric Torus, MST, 美国威斯康星大学)；②反向场实验装置 (Reversed Field Experiment, RFX, 由意大利帕多瓦大学、政府机构和商业机构组成的协作机构负责运行)；③日本产业技术综合研究所 (AIST) 实验室的RFP装置 (位于日本筑波)。此外还有一个位于瑞典的较小的实验装置Extrap T2R。

7.3 反场箍缩——反场箍缩简介

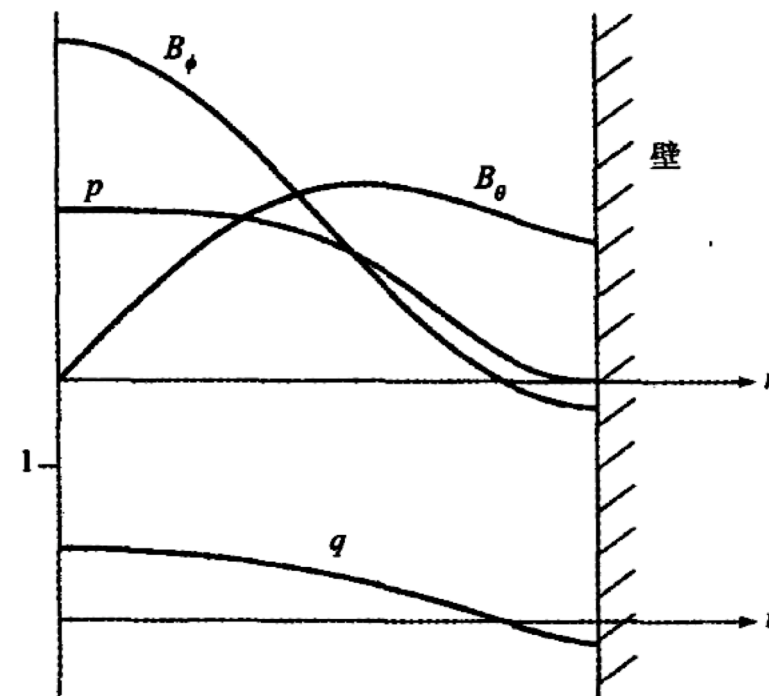
- RFP的原理图如右图所示。装置的运行方式如下：首先在真空室内形成一个弱的环向偏置磁场，接着迅速提升大的等离子体环向电流，由此产生对等离子体和环向偏置磁场的压缩。此外，电流通过欧姆加热方式提高等离子体的温度。在电流提升结束时，等离子体内部的极向和环向磁场的强度很接近。但由于大部分环向磁通量被禁锢和压缩在等离子体中，因此仅在等离子体的边缘区残留少量的剩余磁场。值得注意的是，在某些运行状态下，边缘区环向磁场会自发反向——“反向”场箍缩由此得名。通常这是我们最期望得到的运行状态。



RFP原理图

7.3 反场箍缩——反场箍缩简介

- 等效的柱形RFP典型的参数分布如右图所示。可以看到，压强在中心呈平坦分布， B_ϕ 在等离子体边缘处反向。详细的分析指出，RFP的基本物理性质可以用线性几何来精确描述。本小节采用圆柱几何处理进行讨论，因此极大地简化了数学运算。
- 从反应堆的观点来看，相比于托卡马克，RFP有优势也有劣势。优势在于：首先，产生偏置磁场所需的环向磁场线圈不大，这最终会带来紧凑的高功率密度的等离子体，从经济上看这是个明显的优势；其次，与托卡马克相比，预期RFP会实现相当高的 β 值。在有理想导体壁的情形下，理论预言的最大稳定 β 值约为0.5，而已经实现的实验值则在0.15~0.25量级；第三，环向电流也许可以大到——或者说至少接近——足以通过欧姆加热等离子体到点火。与各种外部微波加热手段相比，欧姆加热具有简单、高效而且成本低廉等优点，这是RFP另一个重要的优势所在。



RFP参数的典型径向分布

7.3 反场箍缩——反场箍缩简介

- 当然，我们也应看到RFP有几处不利的地方：首先，等离子体边缘区的弱环向磁场意味着边缘安全因子较低，这反过来会引起电阻性磁流体力学湍流。这种湍流表现为明显增强的能量输运。通常，RFP的能量约束时间 τ_E 要比托卡马克的小很多。最近有关电流密度分布控制的新型实验技术已经显著改善了上述情形，但是要想赶上托卡马克的性能，RFP还有很长的路要走。
- 其次，由于欧姆变压器无法以直流稳态方式运行，故外界电流驱动是必不可少的。而且RFP需要的环向电流很大，因此所需的电流驱动功率很高。这增加了反应堆的成本和复杂性。基于这些原因，目前研究的针对托卡马克的电流驱动方式很可能对于RFP来说不是可行的。但是，有一种被称为“振荡场电流驱动 (OFCD)”的方式可能对RFP是有效的，可对托卡马克而言就不是了。OFCD采用交流驱动电压，因此可以通过感应驱动的变压器实现正弦稳态。目前这种方法还处于实验室实验的早期研发阶段。

7.3 反场箍缩——反场箍缩简介

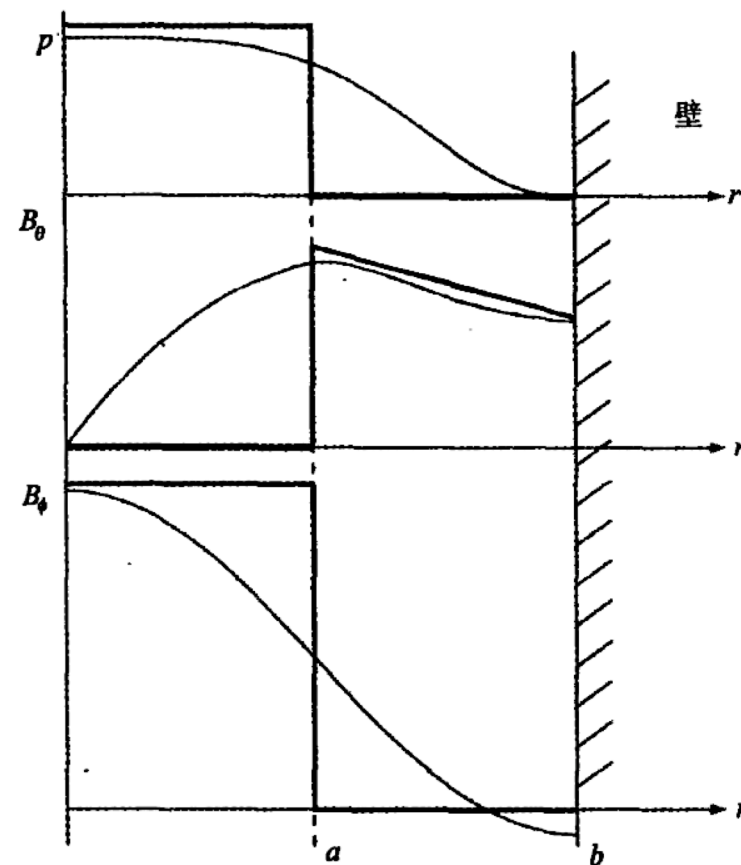
- 最后一点，RFP位形的高磁流体力学稳定的 β 值依赖于理想导体壁的存在。如果壁的电导率有限，等离子体将会受制于电阻壁模，临界 β 减为零，甚至在 $\beta = 0$ 时等离子体依然是不稳定的，会在5~10种不同的电流驱动模式之间来回切换。这意味着需要较为复杂的反馈系统。
- 这里的分析着重于磁流体力学 β 极限值，这也是研究RFP磁位形的主要目的。根据表面电流模型，研究发现， $m = 0$ 和 $m = 1$ 模式决定了最严格的稳定性边界。我们首先从理想导体壁开始分析，然后再针对电阻壁的情形。对于理想导体壁，表面电流模型预言的临界 β 值约为0.5。在6种可能的电流驱动模式下，电阻壁条件下导出的临界 β 值均为零。所以RFP位形作为聚变反应堆的最终可行性与改善输运、研发可以驱动大的环向电流的OFCD系统，以及能够稳定电阻壁模等方面密切相关。

7.3 反场箍缩——反场箍缩表面电流平衡

- 将通常的二维表面电流平衡关系简化为能够精确描述圆柱形RFP的一维形式。令倒环径比趋于零： $a/R_0 \equiv \varepsilon \rightarrow 0$ ，很容易实现从二维到一维的转变。接着，磁场和压强参数选取为右图所示的典型RFP参数近似分布。
- 注意到RFP适当的参数定标要求 $p \sim B_i^2/2\mu_0 \sim \hat{B}_\theta^2/2\mu_0$ ，即所有压强的量级相同。并且外界环向磁场仍设为零： $B_0 = 0$ 。严格来讲，RFP中的环向场很小而且在等离子体边缘附近反向： $B_0/B_i < 0$ 且 $|B_0/B_i| \ll 1$ 。这里反向是稳定特定的内部磁流体力学模所需的。这些模是由采用平滑参数分布时出现的压强和电流梯度驱动的。但在表面电流模型中这些模并不存在。因此既然从一开始就没有这些内模的信息，那么令 $B_0 = 0$ 也就不会造成额外的损失。更重要的是，最严格的稳定性限制条件来自于外部扭曲模而不是内模。详细分析表明，在 $|B_0/B_i| \ll 1$ 时，各种外部扭曲模对 B_0 的大小的依赖关系很弱。根据上述讨论，适用于RFP的表面电流平衡关系式简化为：

$$p + \frac{B_i^2}{2\mu_0} = \frac{\hat{B}_\theta^2}{2\mu_0}$$

- 注意到在圆柱模型中 $\hat{B}_\theta(a, \theta) = \text{常数}$ 。



RFP位形的表面电流模型近似

7.3 反场箍缩——反场箍缩表面电流平衡

- 环绕等离子体表面的极向磁场是均匀的。上式表明，等离子体压强与内部环向磁压强之和与极向磁场的张力相平衡。
- 上式的形式也可以作为RFP等离子体比压 β 的一种有用的定义：

$$\beta \equiv \frac{2\mu_0 p}{\hat{B}_\theta^2} = \frac{8\pi^2 a^2 p}{\mu_0 I^2}$$

- 其中， I 是环向电流。在RFP中，总体 β 值等于极向 β 值： $\beta = \beta_p$ 。根据这个定义可得 $0 \leq \beta \leq 1$ ，它表明不存在平衡态 β 极限。
- 上述两式体现了稳定性分析所需的平衡态信息。

7.3 反场箍缩——反场箍缩表面电流稳定性

- 这里将一般的表面电流稳定性分析应用于RFP位形。我们将分别计算等离子体和真空的贡献，然后代入压强平衡匹配条件，最终得到明确的RFP临界稳定性条件。

- **1. 等离子体的贡献**

- 第一步是将二维环面的稳定性方程简化为适用于直圆柱体的一维稳定性方程。这很容易实现，只要令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 并根据环向坐标 ϕ 定义轴向坐标 z 为 $z = R_0 \phi$ 即可。类似地，环向模数 n 与轴向波数 k 之间的关系可表示为 $k = n/R_0$ 。最后，直圆柱体平衡具有极向和轴向对称性。所以，我们可以对极角做傅里叶分析。基于这些变换，表面位移的法向分量具有形式 $\xi(\theta, \phi) \rightarrow \xi_0 \exp[i(m\theta - kz)]$ ，其中 ξ_0 是常数。对于所有的 m 和 k 都必须检验其稳定性。
- 现在考虑等离子体对稳定性分析的贡献。与表面电流稳定性问题的基本形式相一致，等离子体的影响可以通过解如下方程得到：

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_1}{dr} \right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) V_1 = 0$$

- 以等离子体内部的均匀性为条件，以及

$$\left. \frac{dV_1}{dr} \right|_a = -ikB_i \xi_0$$

7.3 反场箍缩——反场箍缩表面电流稳定性

- 依据修正的贝塞尔函数容易得到如下解：

$$V_1(r) = -\frac{iB_i\xi_0}{I'_m(ka)} I_m(kr)$$

- 其中， I'_m 表示对自变量求导。另外，注意到贝塞尔函数 I_m 的行为定性上类似于非振荡增长的指数函数，它在原点是非奇异的；而互补的修正贝塞尔函数 K_m 的行为则定性类似于非振荡衰减的指数函数，它在 $r \rightarrow 0$ 时是奇异的。
- 现在可以直接计算压强平衡匹配条件所需的量 $B \cdot B_1|_a$ ：

$$B \cdot B_1 \Big|_a = B \cdot \nabla V_1 \Big|_a = -\frac{B_i^2}{a} \frac{\rho_a I_a}{I'_a} \xi_0$$

- 其中， $\rho_a = k_a$ 是归一化波数，同时采用了如下简化记号： $I_a = I_m(\rho_a)$ 以及 $I'_m = \frac{dI_m(\rho_a)}{d\rho_a}$ 。

7.3 反场箍缩——反场箍缩表面电流稳定性

■ 2. 真空的贡献

- 可以通过类似的方式导出真空对稳定性分析的贡献。在这个区域中要解的相关方程式为：

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\hat{V}_1}{dr} \right) - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) \hat{V}_1 = 0$$

- 条件为：

$$\left. \frac{d\hat{V}_1}{dr} \right|_b = 0$$
$$\left. \frac{d\hat{V}_1}{dr} \right|_a = \frac{im\hat{B}_\theta}{a} \xi_0$$

- 最终的解是满足上式所选取的贝塞尔函数 I_m 和 K_m 及其任意常数的组合。

7.3 反场箍缩——反场箍缩表面电流稳定性

- 简单计算得出：

$$\hat{V}_1(r) = \frac{im\hat{B}_\theta\xi_0}{ka} \left[\frac{I'_b K_m(kr) - K'_b I_m(kr)}{I'_b K'_a - K'_b I'_a} \right]$$

- 现在，匹配条件所需的量 $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a$ 可得出如下：

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a = \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{V}_1|_a = -\frac{m^2 \hat{B}_\theta^2}{a} \frac{K_a}{\rho_a K'_a} \Lambda_b \xi_0$$

- 其中， Λ_b 表示导体壁的影响，可表示为：

$$\Lambda_b = \frac{1 - (K'_b I_a)/(I'_b K_a)}{1 - (K'_b I'_b)/(I'_b K'_a)}$$

7.3 反场箍缩——反场箍缩表面电流稳定性

■ 3. 压强平衡匹配条件

- 稳定性分析的最后一步是将等离子体和真空的贡献代入压强平衡匹配条件中，这在圆柱几何条件下简化为：

$$[\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1]_a - \frac{\hat{B}_\theta^2}{a} \xi_0 = 0$$

- 经过代换，我们得到：

$$\left[\frac{m^2 \hat{B}_\theta^2}{a} \frac{K_a}{\rho_a K'_a} \Lambda_b - \frac{B_i^2}{a} \frac{\rho_a I_a}{I'_a} + \frac{\hat{B}_\theta^2}{a} \right] \xi_0 = 0$$

- 注意到幅度 ξ_0 是所有项的公因子。因此，如果存在非平凡的解，方括号中的系数必然为零。这就是决定本征值的条件，对RFP来说，它可以看作 β 的临界稳定值。

7.3 反场箍缩——反场箍缩表面电流稳定性

- 利用平衡关系消去 B_i^2 即可得到我们需要的本征值关系的形式：

$$(1 - \beta) \frac{\rho_a I_a}{I'_a} - m^2 \frac{K_a}{\rho_a K'_a} \Lambda_b - 1 = 0$$

- 在更详细的分析之前，我们从这个关系可以得到两个一般性结论。首先，注意到 I_a ， I'_a ， K_a 均为正，而 K'_a 为负。另外可以看出 Λ_b 恒正。所以，上式的前两项——分别表示等离子体和真空的贡献——为正。因为它们由真空磁场产生，所以总是起稳定作用（也就是说，它们的贡献类似于无限大、均匀的、无电流等离子体平衡条件下的等离子体波解）。其次，起不稳定性作用的“ -1 ”项来源于磁场表面梯度的不均匀性： \hat{B}_θ^2/a 。它相当于极向磁场坏曲率的贡献。因为环向磁场线是直的，没有曲率贡献。
- 最后要指出的一点是，尽管本征值条件相对简单，但它的含义并不一目了然，因为其中包含了很多超越贝塞尔函数。在下一小节中我们将对贝塞尔函数做简单近似，以便得到 β 的边缘稳定极限值的明确形式。

7.3 反场箍缩—— $m = 0$ 模

- 现在考虑将一般的本征值关系（如上式）应用于 $m = 0$ 模，这有点类似于处理完全Z箍缩中的腊肠不稳定性。关键区别在于RFP位形具有内部轴向磁场，所以RFP中的腊肠扰动必然会挤压等离子体和内部磁场，然而在Z箍缩中则仅压缩等离子体，对轴向磁场的挤压是一种额外的致稳效应，可以想见，足够大的轴向磁场 B_i 将会稳定 $m = 0$ 模式。实际情形正是如此。因为增加 B_i 相当于减小 β ，保持 $m = 0$ 模式的稳定导致可允许的最大 β 值。
- 注意到 $m = 0$ 模式中的贝塞尔函数 I_m 具有如下性质： $\rho \ll 1$ 时， $I_0(\rho) \approx 1 + \rho^2/4$ ； $\rho \gg 1$ 时， $I_0(\rho) \approx \sqrt{1/2\pi\rho}\exp(\rho)$ ，由此可以得到临界 β 值的明确表达式。为此我们合理地假设：

$$\frac{\rho_a I_a}{I'} \approx 2 + ka$$

- 这在 ρ 很大或者很小时均适用，而且对于中间值还算精确。

7.3 反场箍缩—— $m = 0$ 模

- 根据这个近似， $m = 0$ 且 $ka > 0$ （最不穩定波數範圍）情形下的本征值條件的簡化為：

$$(1 - \beta)(2 + ka) - 1 = 0$$

- 或者解出邊緣 β 值：

$$\beta \leq \beta_c(ka) \equiv \frac{1 + ka}{2 + ka}$$

- 顯然對 β 的最嚴格的限制發生在 $ka = 0$ 時，可寫為：

$$\beta \leq \beta_{max} = \frac{1}{2}$$

- 最終結論是：穩定 $m = 0$ 模要求 $B_i \geq \hat{B}_\theta / \sqrt{2}$ 。對應的穩定的最大 β 值為 $1/2$ 。這個值雖然比平衡態的最大 β 值1要小，但是對於聚變能源這個目標來說還是太高了。

7.3 反场箍缩—— $m = 1$ 模

- 对于 $m \neq 0$ 的情形，RFP中最危险的是 $m = 1$ 模。定性地说，RFP的 $m = 1$ 模与完全Z箍缩的 $m = 1$ 模有类似之处。但因为 $m = 1$ 模的扰动是造成磁场线弯曲，所以内部环向磁场的存在具有致稳作用。尽管如此，边界安全因子很小[即当前模式的 $q(a) = 0$]导致真空区域的稳定性减弱。真空区域中没有可弯曲的环向磁场线，因此不稳定性始终存在，除非 β 足够小且导体壁足够封闭。
- 下面的分析考察 $m = 1$ 模的稳定性，由此得到稳定的边缘 β 值，它是壁位置的函数。对于紧邻的壁，稳定的 β 值有可能很高。对于远距离的壁，即使 $\beta = 0$ ，等离子体也是不稳定的。通过对贝塞尔函数进行近似，然后解出稳定的边缘 β 值，即可定量得出下述结果。

7.3 反场箍缩—— $m = 1$ 模

- 注意到：对于 $\rho \ll 1$, $I_1(\rho) \approx \rho/2$, $K_1(\rho) \approx 1/\rho$; 对于 $\rho \gg 1$, 渐近形式为 $I_1(\rho) \approx \sqrt{1/2\pi\rho}\exp(\rho)$, $K_1(\rho) \approx \sqrt{\pi/2\rho}\exp(-\rho)$ 。与处理 $m = 0$ 模时情形相仿, 对于 ρ 很大或者很小时, 这些展开式可以贝塞尔函数的各种组合来近似表示本征值方程的简单函数解, 对于中间值, 这个解也还算精确。特别地, 如果 $m = 1$ 且 $ka > 0$ (最不稳定性波数范围), 我们可以近似得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_a I_a}{I'_a} &\approx \frac{k^2 a^2}{1 + ka} \\ \frac{K_a}{\rho_a K'_a} &\approx -\frac{1}{1 + ka} \end{aligned} \right\}$$

- 类似地, 壁项简化为:

$$\Lambda_b \approx \frac{1 + a^2/b^2}{1 - a^2/b^2}$$

- 注意到如果壁位置有限, 则 $\Lambda_b > 1$ 。如果壁“无穷远”, 则 $\Lambda_b \rightarrow 1$ 。

7.3 反场箍缩—— $m = 1$ 模

- 根据这些近似， $m = 1$ 模式的本征值方程简化为：

$$(1 - \beta) \frac{k^2 a^2}{1 + ka} + \frac{\Lambda_b}{1 + ka} - 1 = 0$$

- 或者解得稳定的边缘 β 值：

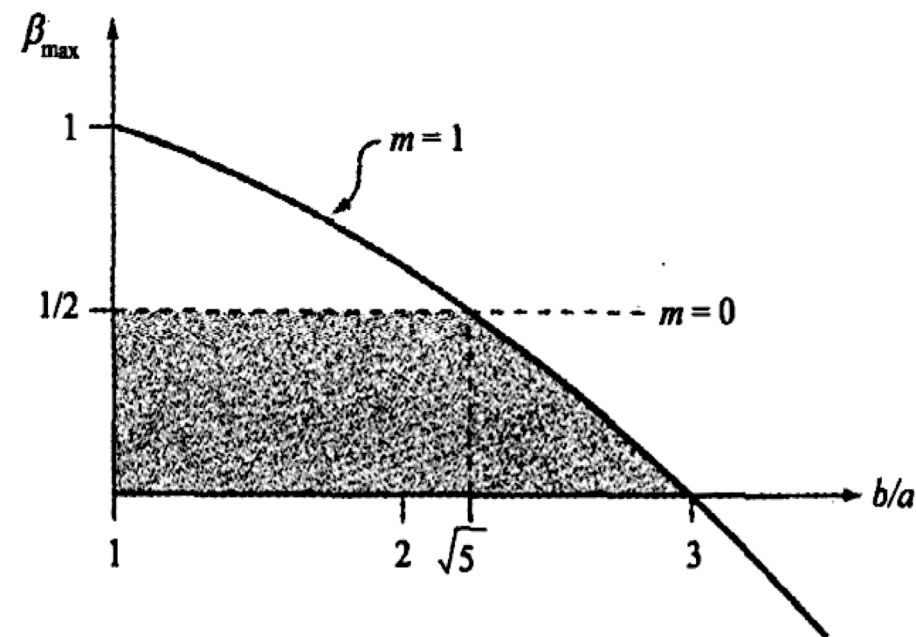
$$\beta \leq \beta_b(ka) \equiv \frac{k^2 a^2 - ka + \Lambda_b - 1}{k^2 a^2}$$

- 恒等号右侧关于 ka 的函数有最小值，它给出了对 β 的最严格的限制。容易得出最小波数为 $ka = 2(\Lambda_b - 1)$ 。对应的 β 稳定范围是：

$$\beta \leq \beta_{max} = \frac{1}{8} \left(9 - \frac{b^2}{a^2} \right)$$

7.3 反场箍缩—— $m = 1$ 模

- 右图显示了物理量 β_{max} 随 b/a 的变化。注意到，如果 β_{max} 为正（这对于物理上可以实现的等离子体是必需的），则理想导体壁的距离不能大于 $b/a = 3$ 。如果 $b/a > 3$ ，即使 $\beta = 0$ ，等离子体也是不稳定的。另外，如果 $b/a = \sqrt{5} \approx 2.24$ ，那么 $\beta_{max} = 1.2$ ，也就是说， $m = 0$ 和 $m = 1$ 模式的稳定性边界在此 β 值时重合。



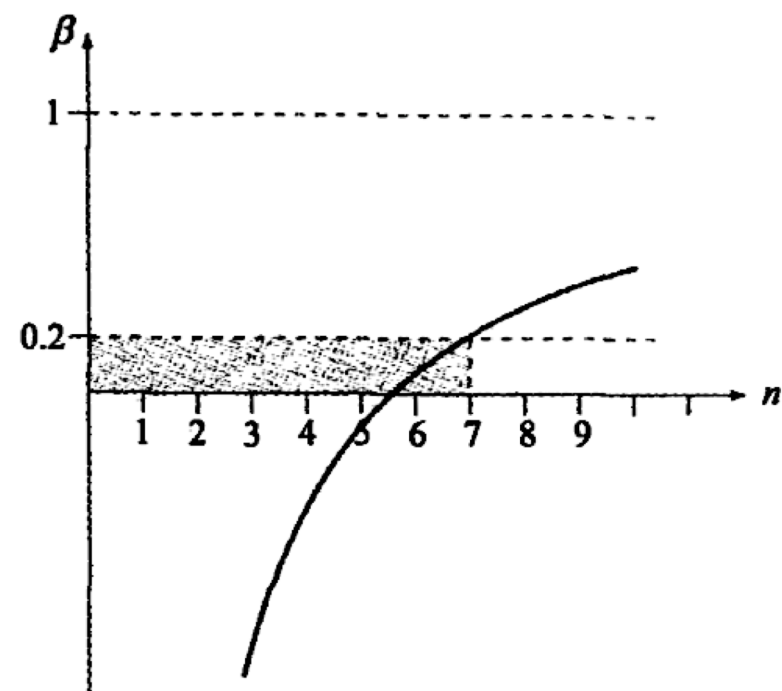
RFP中稳定的最大值 β_{max} 随 b/a 的变化图（图中还显示了 $m = 0$ 模的值，阴影区域是稳定区域）

7.3 反场箍缩—— $m = 1$ 模

- 最后需要讨论的一点是考虑壁远离等离子体的情形。在这种极限情形下，RFP总是不稳定的，我们感兴趣的问题是严格地确定哪些以及有多少模式是不稳定的。为了获得这些信息，指定 $\Lambda_\infty = 1$ 且考虑用 n/R_0 取代 k 时的等效环面。边缘稳定性关系式简化为：

$$\beta \leq \beta_\infty(n) \equiv 1 - \frac{R_0}{na}$$

- 右图画出了在 $R_0/a = 5.5$ 的实际情形下边缘 β 随模数 n 的变化。注意到对于 $\beta = 0$ ，等离子体在 $0 \leq n \leq 5$ 时是不稳定的。随着 β 增加，有更多的模式变得不稳定。例如，当 $\beta = 0$ 时 $n = 6$ 的模式也变得不稳定。结论是：没有理想导体壁的RFP位形，即使在 $\beta = 0$ 的情形下至少对于某些 n 值是不稳定的。



$R_0/a = 5.5$ 且 $b/a \rightarrow \infty$ 时边缘 β 随环向模数的变化（阴影区中的整数 n 在 $\beta = 0.2$ 时是不稳定的）

7.3 反场箍缩——电阻壁模

- 上述分析表明，如果存在理想导体壁，RFP位形在高 β 时可以是磁流体力学稳定的。无壁等离子体在 $\beta = 0$ 时是不稳定的。这里考虑更为实际的情形：壁存在但是电导率有限。分析表明，电阻壁条件下的边缘稳定性判据与无壁条件下的稳定性边界完全一致；也就是说，电阻壁对边缘 β 不起任何致稳作用。但是，不稳定性增长率则从理想磁流体力学情形下的值减小到与壁的电阻耗散时间有关的值。这一点很关键，因为只有当所需的回路响应时间跟壁的耗散时间可比时（通常为几十毫秒），实际的反馈系统才是可行的。实际上，对于理想磁流体力学时间尺度下（通常为几个微秒）的增长模式来说，反馈控制是不可行的。
- 分析中包括重新计算电阻壁情形下真空的贡献。对稳定性分析中的其他部分的贡献仍保留不变。因为我们关心的是缓慢增长的模式，所以仍假设可以忽略惯性项（即令等离子体中 $\omega^2 = 0$ ）。计算过程包括求解电阻壁两侧的真空扰动磁场以及利用“薄壁”近似求解电阻壁本身的内部磁场。壁两边和等离子体-真空界面两边合适的匹配条件最终使得我们能够算出稳定性分析所需的物理量 $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a$ 。最终结果是给出电阻壁模增长率的显性表达式，它由两种理想的边缘稳定性 β 极限值表示，分别对应于有壁和无壁的情形。最后，值得注意的是，尽管计算是在柱面电流模型下进行的，但其结果是通用的，对于多维几何条件下的任意参数分布都是适用的。

7.3 反场箍缩——电阻壁模

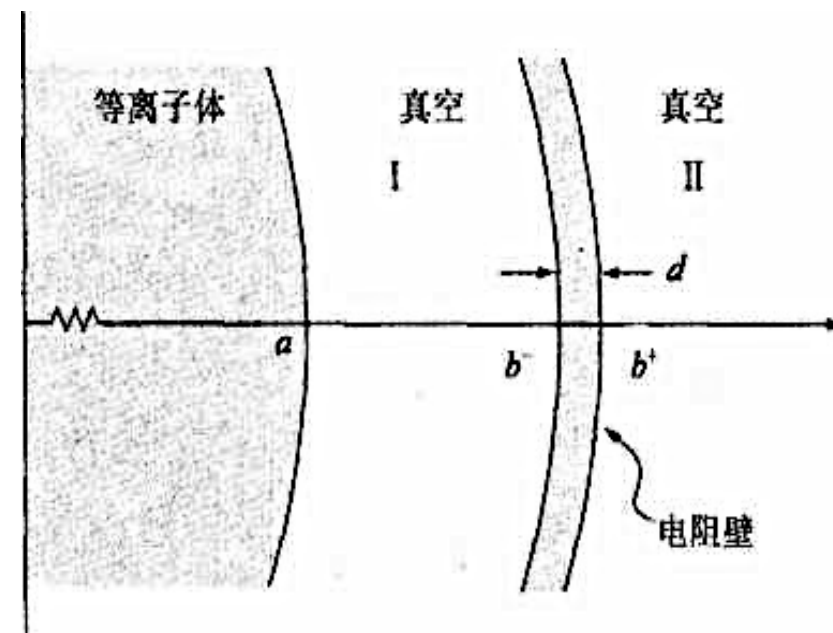
■ 1. 真空和电阻壁的磁场

- 在有电阻壁的情形下，等离子体外部区域的分析实际上是一个右图所示的三区域问题。内侧和外侧真空区域的磁场可以写成满足拉普拉斯方程的势函数的形式。相应的势函数的解为：

$$\left. \begin{aligned} \hat{V}_I &= [C_1 K_m(kr) + C_2 I_m(kr)] \exp[\omega_i t + i(m\theta - kz)] \\ \hat{V}_{II} &= C_3 K_m(kr) \exp[\omega_i t + i(m\theta - kz)] \end{aligned} \right\}$$

- 这里的 C_j 是未知系数，由待定的匹配条件确定。通过设 $\omega = i\omega_i$ ，时间的依赖性被明确地表示出来，可以预期，电阻壁模不稳定性是一种纯增长模式。另外，注意到 \hat{V}_{II} 仅有 $K_m(kr)$ 部分的贡献，因为正则性要求 $r \rightarrow \infty$ 时 $\hat{V}_{II} \rightarrow 0$ 。当最终确定后，可将其代回原式计算稳定性分析所需的物理量：

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \Big|_a = \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{V}_1 \Big|_a = \frac{im\hat{B}_\theta}{a} (C_1 K_a + C_2 I_a)$$



电阻壁模的三区域问题的几何图像

7.3 反场箍缩——电阻壁模

- 将壁的电阻率 η 代入 $\hat{\mathbf{E}} = \eta \hat{\mathbf{J}} = (\eta/\mu_0) \nabla \times \hat{\mathbf{B}}_w$ 后，即可从法拉第定律得到电阻壁内部的磁场。利用 $\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}}_w = 0$ 这一条件我们得到标准的磁扩散方程：

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}_w}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \hat{\mathbf{B}}_w$$

- 上式的解不是十分复杂，但需要一些精妙的分析。关键是假设 $d \ll b$ ，它使我们能够根据以下简化方法引入“薄壁”近似：①在此极限情形下仅需要径向分量 $\hat{\mathbf{B}}_{wr}$ ；②为方便起见，引入如下定义的类似平板的局部径向坐标 x ： $r = b + x$ ，其中 $0 \leq x \leq d$ ；③在薄壁模型中， x 方向上的变化梯度较大，但在 θ 和 z 方向上变化要慢得多。所以可以近似认为 $\nabla^2 \approx \partial^2 / \partial x^2$ ；④傅里叶分析表明 $\hat{\mathbf{B}}_{wr}$ 可以写为 $\hat{B}_{wr} = \hat{B}_{wr}(x) \exp(\omega_i t + i(m\theta - kz))$ ；⑤ ω_i 的典型幅度对应于壁耗散时间的倒数： $\omega_i \sim \eta / \mu_0 b d$ 。为了比较分析过程中出现的各项，这个假设是必需的。根据这些条件，上式简化为：

$$\frac{\partial^2 \hat{B}_{wr}}{\partial x^2} - \frac{\mu_0 \omega_i}{\eta} \hat{B}_{wr} = 0$$

7.3 反场箍缩——电阻壁模

- 在上述假设条件下，有 $\partial^2/\partial x^2 \sim 1/d^2$ 和 $\mu_0\omega_i/\eta \sim 1/bd$ ，经过简单的迭代，我们可得上式的解。为此做展开 $\hat{B}_{wr} = \hat{B}_{r0} + \hat{B}_{r1} + \dots$ ，其中 $d/b \ll 1$ 是展开参数。零阶和一阶的方程分别为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{B}_{r0}}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{B}_{r1}}{\partial x^2} &= \frac{\mu_0\omega_i}{\eta} \hat{B}_{r0} \end{aligned} \right\}$$

- 其解为：

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}_{r0} &= B_{r0} \\ \hat{B}_{r1} &= B_{r0} \left(\frac{\mu_0\omega_i}{2\eta} x^2 \right) + B_{r1} \left(\frac{x}{d} \right) \\ \hat{B}_{wr} &\approx \hat{B}_{r0} + \hat{B}_{r1} = B_{r0} \left(1 + \frac{\mu_0\omega_i}{2\eta} x^2 \right) + B_{r1} \left(\frac{x}{d} \right) \end{aligned} \right\}$$

- 其中， B_{r0} 和 B_{r1} 分别是零阶和一阶的未知常数。注意， ω_i 项也是一阶的。
- 现在，所有3个区域中的解可以用5个未知常数 $C_1, C_2, C_3, B_{r0}, B_{r1}$ 确定，而这些常数则可通过匹配条件来确定。

7.3 反场箍缩——电阻壁模

■ 2. 匹配条件

- 匹配条件有5个：关于等离子体表面的有一个，关于电阻壁两侧的各有两个。壁条件可以简化为一组与 $r = b$ 位置的势函数 \hat{V}_I 和 \hat{V}_{II} 有关的跳变条件。
- 首先考虑关于等离子体表面的条件。它与理想导体壁情形下的条件一样：

$$\left. \frac{\partial \hat{V}_I}{\partial r} \right|_a = k(C_1 K'_a + C_2 I'_a) = \frac{im\dot{B}_\theta}{a} \xi_0$$

- 接下来考虑壁。这一跳变条件直接可得，尽管形式上有点复杂。关键是壁尽管很薄但仍有一定厚度。所以壁的两个表面都没有表面电流。这意味着壁内磁场的法向和切向分量在壁面两边与真空磁场之间是连续的。磁场的法向分量的连续性要求：

$$\left. \frac{\partial \hat{V}_I}{\partial r} \right|_{b^-} = \hat{B}_{wr} \Big|_{x=0} \qquad \left. \frac{\partial \hat{V}_{II}}{\partial r} \right|_{b^+} = \hat{B}_{wr} \Big|_{x=d}$$

7.3 反场箍缩——电阻壁模

- 为了计算切向磁场的连续性，注意到壁内 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，这一条件意味着 $i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_w = -\partial \hat{B}_{wr} / \partial x$ 。类似地，真空区域中 $i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 = -k_0^2 \hat{V}$ ，其中， $k_0^2 = k^2 + m^2/b^2$ 。因此切向磁场的连续性要求：

$$\hat{V}_I|_{b^-} = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial \hat{B}_{wr}}{\partial x} \bigg|_{x=0}, \quad \hat{V}_{II}|_{b^+} = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial \hat{B}_{wr}}{\partial x} \bigg|_{x=d}$$

- 经过简短的计算，常数 \hat{B}_{r0} 和 \hat{B}_{r1} 可以消去，由此得到下面这组真空势函数的跃变条件。每个条件包含 d/b 展开式中的首个非零项的贡献：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{V}_I}{\partial r} \bigg|_{b^-} &= \frac{\partial \hat{V}_{II}}{\partial r} \bigg|_{b^+} \\ \hat{V}_I|_{b^-} &= \hat{V}_{II}|_{b^+} - \left(\frac{\mu_0 \omega_i d}{\eta k_0^2} \right) \frac{\partial \hat{V}_{II}}{\partial r} \bigg|_{b^+} \end{aligned} \right\}$$

7.3 反场箍缩——电阻壁模

- 这些条件可用系数 C_j 写为：

$$\left. \begin{aligned} C_1 K'_b + C_2 I'_b - C_3 K'_b &= 0 \\ C_1 K_b + C_2 I_b - C_3 \left(K_b - \frac{\mu_0 \omega_i dk}{\eta k_0^2} K'_b \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- 上式和前面的 $\frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \Big|_a$ 的表达式即所需的关系式，它们的推导显然需要更为复杂的分析。这些关系式应看作由表面位移 ξ_0 表示的关于3个未知系数 C_1 ， C_2 ， C_3 的3个线性代数方程。经过较为冗长的计算，我们可以算出这些系数并代入式 $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \Big|_a = \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{V}_1 \Big|_a = \frac{im \hat{B}_\theta}{a} (C_1 K_a + C_2 I_a)$ ，
从而得到电阻壁的本征值关系。

7.3 反场箍缩——电阻壁模

■ 3. 电阻壁的稳定性边界

- 根据上述过程，我们得到真空对压强平衡匹配条件的贡献的表达式：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \Big|_a &= -\frac{m^2 \dot{\mathbf{B}}_\theta^2}{a} \frac{K_a}{\rho_a K'_a} \left[\frac{\Omega_i (1 - K'_b I_a / I'_b K_a) + 1}{\Omega_i (1 - K'_b I_a / I'_b K_a) + 1} \right] \xi_0 \\ &\approx \frac{\dot{B}_\theta^2}{a} \frac{1}{1 + ka} \left[\frac{\Omega_i (1 + a^2/b^2) + 1}{\Omega_i (1 - a^2/b^2) + 1} \right] \xi_0\end{aligned}$$

- 这里的 Ω_i 是归一化的不稳定性增长率：

$$\Omega_i = - \left(\frac{\rho_b^2 I'_b K'_b}{m^2 + \rho_b^2} \right) \frac{\mu_0 \omega_i b d}{\eta} \approx \left(\frac{1 + kb}{1 + k^2 b^2} \right) \frac{\mu_0 \omega_i b d}{2\eta}$$

- 简化形式中的贝塞尔函数相当于 $m = 1$ 的近似。

7.3 反场箍缩——电阻壁模

- 下一步是将这个关系式代入压强平衡匹配条件。由此得到的本征值方程很容易改写为 $m = 1$ 时的增长率 ω_i 的显性表达式，它可写为：

$$\omega_i \tau_w \approx - \left[\frac{2(1 + k^2 b^2)}{(1 + kb)(1 - a^2/b^2)} \right] \left(\frac{\beta - \beta_\infty}{\beta - \beta_b} \right)$$

- 其中，

$$\left. \begin{aligned} \beta_\infty &= 1 - \frac{1}{ka} \\ \beta_b &= 1 - \frac{1}{ka} + \frac{\Lambda_b - 1}{k^2 a^2} = 1 - \frac{1}{ka} + \left(\frac{2}{b^2/a^2 - 1} \right) \frac{1}{k^2 a^2} \end{aligned} \right\}$$

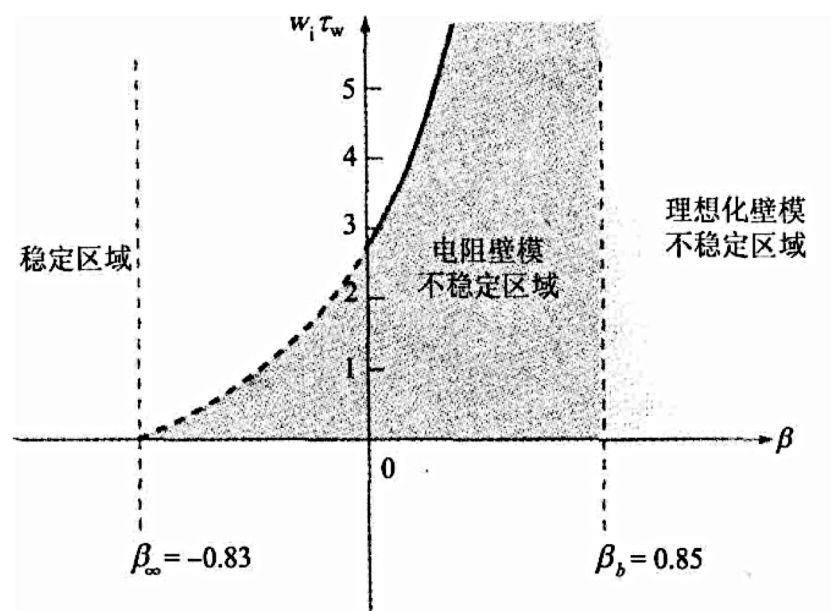
- $\tau_w = \mu_0 b d / \eta$ 是壁耗散时间。这就是所需的电阻壁模的本征值方程。
- 分析 $\omega_i \tau_w$ 的表达式时，首先，我们注意到方括号内的项总是正的。其次，注意到 $\beta_b(ka)$ 和 $\beta_\infty(ka)$ 分别是理想导体壁分别位于 $r = b$ 和 $r = \infty$ 时所对应的边缘稳定性 β 值。另外，随着 ka 变化， $\beta_b(ka)$ 和 $\beta_\infty(ka)$ 均可正可负，但是总有 $\beta_b > \beta_\infty$ 。最后要记住的是，电阻壁模是一种在理想化壁模以外的由等离子体支撑的新的模。

7.3 反场箍缩——电阻壁模

- 在上述分析的基础上，还有3种有趣的情形要考虑：
 - 首先，假设在某个取定的 k 下，等离子体对于无穷远壁情形下的理想化壁模是稳定的： $\beta < \beta_\infty < \beta_b$ 。这时本征值关系意味着 $\omega_i \tau_w < 0$ ，也就是说，此时等离子体对于理想化壁模和电阻壁模都是稳定的。因为此时理想导体壁对理想稳定性来说不是必需的，所以电阻壁不改变稳定性的性质。
 - 第二种情形是，尽管理想导体壁存在，但其距离还不足以稳定理想化壁模： $\beta > \beta_b > \beta_\infty$ 。这时仍有 $\omega_i \tau_w < 0$ ，即电阻壁模仍是稳定的。但等离子体对于快变、甚至可能是突变的理想化壁模则是不稳定的。如果理想导体壁不是近到足以稳定理想化壁模，那么即使将它变成电阻壁也不起作用。
 - 第三种情形，也是最有趣的情形是，理想导体壁存在而且距离近到足以稳定理想化壁模，但无壁等离子体对于理想化壁模是不稳定的： $\beta_b > \beta > \beta_\infty$ 。在此情形下 $\omega_i \tau_w > 0$ ，这表明此时电阻壁模是不稳定的。因为如果壁是电阻性的，那么在理想导体壁中发展起来的致稳的涡流会在壁耗散时间内耗散掉。在这个时间尺度上，电阻壁不起作用，稳定性边界回到没有壁的情形。

7.3 反场箍缩——电阻壁模

- 右图显示了 $R_0/a = 5.5$, $b/a = \sqrt{5}$ 的RFP位形下的上述结果。图中显示了 $n = 3$ 模式的电阻壁模增长率 $\omega_i \tau_w$ 随 β 的变化。注意到 $\beta = \beta_b \approx 0.85$ 右侧的区域对于理想化壁模是不稳定的。 $\beta = \beta_\infty \approx -0.83$ 左侧的区域对于理想化壁模和电阻壁模均是稳定的，但显然这在物理上是无法实现的，因为 β 不能为负。中间区域对于理想化壁模是稳定的，但对于电阻壁模是不稳定的。如前所述，这个模式即使 $\beta = 0$ 也是不稳定的。



对于 $R_0/a = 5.5$, $b/a = \sqrt{5}$, $n = 3$ 的RFP 情形，电阻壁模的增长率随 β 的变化

7.3 反场箍缩——反场箍缩小结

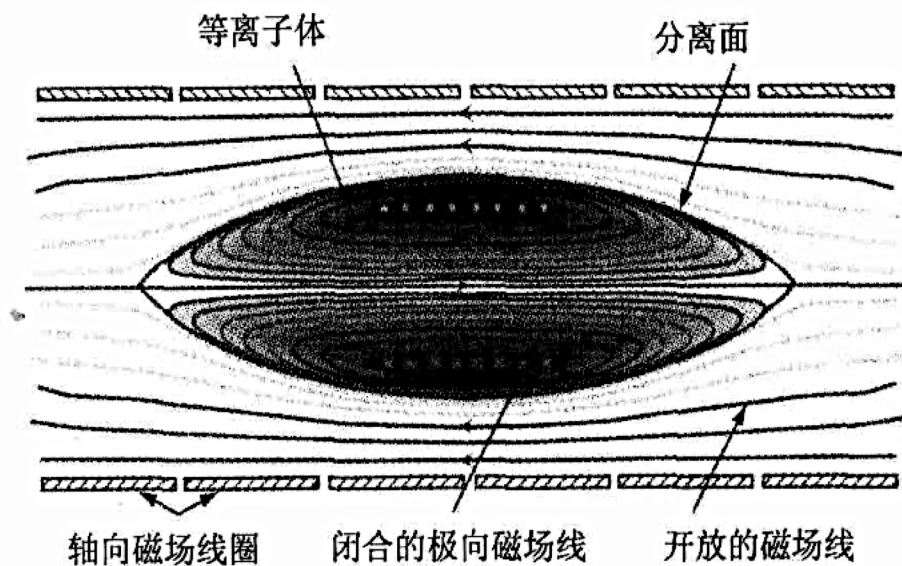
- RFP是一种具有较大环径比、轴对称的环形位形。从磁流体力学稳定性方面看，由于内部存在环向磁场，它的稳定性与完全Z箍缩相比有了极大的改善。但因为边缘安全因子小，如果没有环绕等离子体的理想导体壁的话，它会受到各种外部扭曲模的影响，即使 $\beta = 0$ 亦难幸免。如果存在合适紧邻的理想导体壁，RFP位形在极高的 β 值（ $\sim 1/2$ ）下对于最危险的 $m = 0$ 和 $m = 1$ 模式仍是稳定的。对于实际的电阻壁，不稳定性将重现，尽管此时不稳定性增长率小了很多。因此最终的结论是，此时我们需要某种形式的反馈稳定系统。
- 尽管如此，输运仍是RFP研究的重点，这也是威斯康星大学的MST装置研究计划的核心。早期实验的能量损失速率要比同尺寸的托卡马克快两个量级。在这些实验中，厚铜壁在实验的时间尺度上有效地起到了理想导体壁的作用，因此电阻壁模不是实验要解决的主要问题。此外，一些创新的实验构想已大大改善了输运状况，提升了不止一个数量级，这确实是相当不错的结果。
- 但随着输运状况有望继续得到改善，加之实验上脉冲放电时间的延长，电阻壁模将变得重要起来。这一考虑促使其他的RFP研究小组（例如，意大利的RFX研究小组和瑞典的Extrap T2R小组）将他们的研究计划重点放在了发展主动控制磁流体力学行为，尤其是电阻壁模的方法上。
- 全世界的RFP研究人员正在深入研究RFP装置面临的几个主要的等离子体物理问题。时间会告诉我们，RFP装置的整体物理性能能否比得上托卡马克。

主要内容

- 7.0 引言
- 7.1 托卡马克
- 7.2 仿星器
- 7.3 反场箍缩
- 7.4 场反位形

7.4 场反位形——场反位形简介

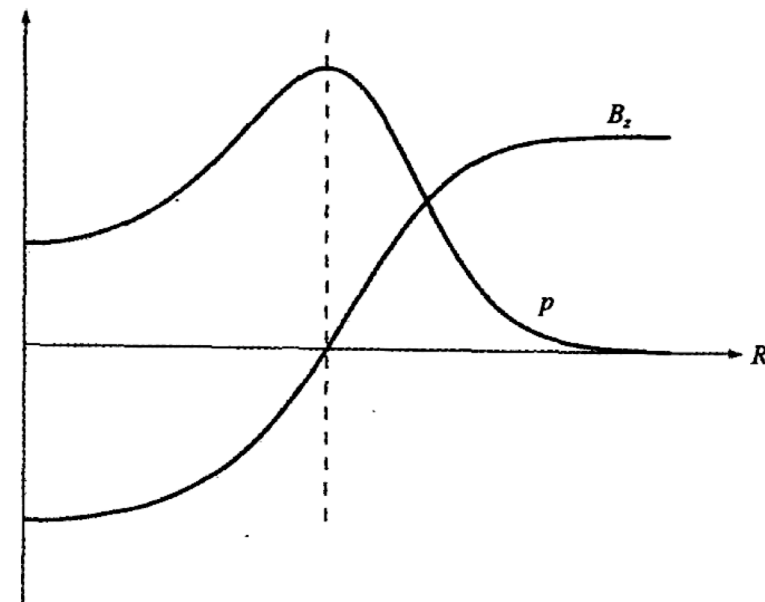
- 场反位形 (The Field Reversed Configuration, FRC) 是一种非常紧凑的轴对称闭合位形, 其中等离子体完全由极向磁场约束。这种位形没有外加的环向磁场, 因此不需要环向磁场线圈绕组。另外, 这种位形也没有穿过装置中心的欧姆场变压器。因此, FRC 内在地就是一种脉冲装置, 从技术结构上看, 它相当简单。FRC 装置的示意图如右图所示。
- 其运行方式如下: 初始时在真空腔中沿轴向建立起小的轴向 θ 箍缩偏置磁场, 然后注入中性气体, 独立电源对气体进行预电离, 产生等离子体。此时开启主电源, 形成强烈的轴向 θ 箍缩磁场。这个磁场比偏置磁场要大 10 倍左右, 而且方向相反。主磁场增加得极快, 引起等离子体的压缩和加热。假设初始等离子体已经准备好, 并且磁场已按适当程序建立起来, 因此轴向磁场将会像图中所示那样交错和重连。最终是在分离磁面内形成一系列拉长的具有闭合磁面的磁场位形。



FRC装置的原理图

7.4 场反位形——场反位形简介

- 典型的压强和磁场的分布如右图所示。以最初 θ 箍缩磁场方向为负方向来看，可以看出，在离轴的某个位置 B_z 变号。这就是“场反位形”这个名称的由来。有趣的是，虽然采用了两个 θ 箍缩磁场来给等离子体成形，但最终形成的是一种具有扁平的环形Z箍缩的拓扑结构。
- FRC具有Z箍缩的拓扑结构这一特点允许我们根据已知的单纯Z箍缩的计算结果来估计FRC的理想磁流体力学稳定性，而无需做新的分析。推理如下：在等离子体的端口附近，FRC位形具有坏的极向磁场曲率；在等离子体扁平的中心部分，极向磁场线基本上是平直的，也就是曲率为零；而且FRC位形中不存在起稳定作用的环向磁场。最终结果是FRC位形中存在坏曲率或者零曲率区域，但是没有好曲率区域。所以，根据理想磁流体力学理论，FRC位形应该是很不稳定的。这一结论确实在数值模拟中得到了证实。



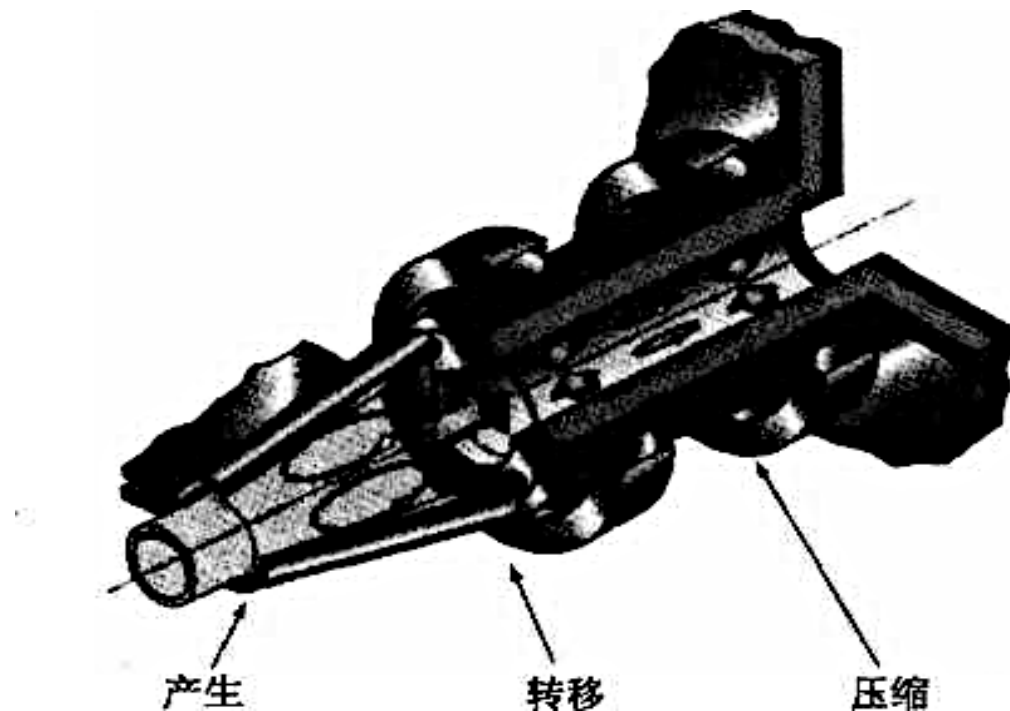
FRC装置中平面
 $B_z(R, 0)$, $p(R, 0)$
的典型分布

7.4 场反位形——场反位形简介

- 既然它的磁流体力学行为是非常不稳定的，有人也许会问，研究FRC对于聚变计划有什么意义。原因主要有两个：第一个原因与FRC实验的观测结果有关。大量实验事实表明，FRC等离子体似乎比理想磁流体力学预言的要稳定得多。尽管产生这一有利行为的原因还不完全明了，但大多数研究人员认为，等离子体动理学效应扮演着重要角色。这些效应包括欧姆定律中的霍尔效应项，以及离子回旋半径大小与等离子体小半径相当这一事实。这两个效应对理想磁流体力学模型起着致稳作用的调整。然而，大多数研究人员也认为，如果将FRC位形放大到反应堆要求的大尺寸，那么动理学效应就不那么显著了，这意味着等离子体对于理想磁流体力学模型来说将会变为不稳定。考虑到FRC在小尺寸下性能良好但大尺寸下表现不佳的特性，研究认为FRC也许可以作为一种很好的等离子体源，即所谓“磁化靶聚变（MTF）”源。MTF正是在聚变能背景下研究FRC位形的第二个基本原因。MTF的基本原理是：将预先加热的高密度（ $10^{23}m^{-3}$ ）中等温度（300 eV）的等离子体源置于一个空心金属圆柱体中，然后挤压圆柱体及其中的等离子体，实现极高的粒子压强和磁场强度，爆聚的等离子体流最终停滞下来，随后再次膨胀。因为等离子体的超高密度，预计在停滞点附近会发生很多的聚变反应，释放足够多的超出输入的压缩能的聚变能。人们考虑了很多种产生靶等离子体的方式，FRC位形也许具有最多的有利性质。
- 下面将着重深入分析运用FRC靶等离子体的MTF概念。只要掌握了其基本原理，我们就能够从聚变能的角度探讨其优劣。

7.4 场反位形——磁化靶聚变概念

- 如右图所示，MTF包含3个步骤：产生、转移和压缩。



MTF概念的原理图

7.4 场反位形——磁化靶聚变概念

■ 1. 产生

- MTF过程的第一步是等离子体的“产生”。在这里或多或少会用到FRC技术。对MTF来说，FRC是一种很好的位形，它的技术简单，而且等离子体中也没有环向场。不希望出现环向场的原因接下来会很明了。对初始形成的FRC位形的唯一限制条件是它必须满足“小判据”，就是说它必须对动理学修正的磁流体力学模是稳定的。这条判据主要是基于实验数据中归纳出的经验规律，具体要求是：

$$S/\kappa < 3.5$$

- 其中， $\kappa = Z_S/R_S$ 表示分离面的拉长度； $S = R_S/\delta_i$ 是分离面的半径与所谓离子无碰撞趋肤深度在 $\delta_i = C/\omega_{pi}$ 的比值。

7.4 场反位形——磁化靶聚变概念

- 从MTF的应用上看，要求初始FRC等离子体具有高密度 $n_e \approx 10^{23} \text{m}^{-3}$ ，大的拉长度 $\kappa \approx 10$ ，分离面半径 $R_S \approx 0.05 \text{m}$ 。对于这些参数，上式勉强可以满足。所需的初始温度和磁场分别为 $T_e = T_i \approx 0.3 \text{keV}$ 和 $B = 5 \text{T}$ ，对应的 $\beta \approx 1$ ，压强为 100 atm 。我们注意到，FRC位形下的初始等离子体密度比其他聚变位形中的典型等离子体密度大约高3个数量级。FRC等离子体产生的另一个值得注意的地方是在主 θ 箍缩线圈的两端各增加了一组小线圈。这些线圈产生一个弱的磁镜场，使得在每次脉冲放电过程中FRC等离子体都成形于 θ 箍缩的中心。此外它们还是转移室的“引导场”。

7.4 场反位形——磁化靶聚变概念

■ 2. 转移

- TF过程的第二步是“转移”。其目的是将等离子体从FRC产生室的初始位置转移到MTF压缩腔。这是通过在主 θ 箍缩线圈系统右侧略微减弱的磁场来实现的。因为左侧的磁场较强，磁压强较大，由此引起左右磁压强的不平衡。这个不平衡将等离子体沿转移室中的引导场推向右边，直到等离子体进入压缩腔。

7.4 场反位形——磁化靶聚变概念

■ 3. 压缩

- MTF概念的核心部分是压缩腔。压缩腔的主要部件是一个很薄的金属圆柱体，有时称作衬套，大小跟一个汽水瓶差不多。一旦FRC等离子体转移进入压缩腔，就立刻由外电路驱动起沿圆柱体轴向（Z方向）的强大电流，由此产生紧贴圆柱体外表面的很强的极向磁场 B_θ ，形成的表面磁压强以约为 $v_R \approx 10^6 \text{ m/s}$ 的极快速度将圆柱体沿径向向内压缩。这一绝热过程将等离子体压缩到很高的密度和温度，足以引起大量的聚变反应。
- 压缩过程的原理如下：在相对短暂的压缩阶段，衬套和等离子体都可以看作理想导体，因为它们的趋肤耗散特征时间很长。因此在等离子体边界与衬套之间的狭窄区域内，磁通量必然是守恒的。衬套的快速向内运动压缩这个磁通量，由此大大增加了等离子体表面的磁场强度，其相应的增大了的表面磁压强则将FRC等离子体（及其内部磁通量）绝热压缩到具有极高温度和密度的半径很小的体积中。

7.4 场反位形——磁化靶聚变概念

- 随着等离子体粒子压强和内部反向磁场压强的逐渐增大,衬套的运动最终在某一个时刻停顿下来。如果系统设计得恰当,停顿时刻的温度应该在 10 keV 量级,这会引起大量的聚变反应。聚变反应的持续时间 τ_E 约等于衬套的停留时间,后者取决于衬套的质量和能量,以及FRC等离子体的最终性质。对MTF反应堆,研究得出的压缩后FRC等离子体的最终状态的典型参数列于下表。可以看出,与托卡马克的 n , B , τ_E 的典型取值相比,MTF终态的密度和温度都很高,但是聚变反应的持续时间却非常非常短。

| 参 数 | 压 缩 前 | 最大压缩状态时 |
|---------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 密 度 | 10^{23} m^{-3} | 10^{25} m^{-3} |
| 温 度 ($T_e \approx T_i$) | 300 eV | 10 keV |
| 磁 场 | 5 T | 500 T |
| 等离子体寿命 | $20\text{ }\mu\text{s}$ | 200 ns |
| 衬套内径 | 5 cm | 0.5 cm |

衬套压缩前状态与最大压缩状态时的MTF参数的对比

7.4 场反位形——磁化靶聚变概念

- 为了产生足够多的聚变反应以实现能源应用的可行性，必须有很大一部分燃料得到燃烧。在优化设计中，这一要求体现为 $\tau_D \approx \tau_E$ 。如果能量约束时间过短， $\tau_D \gg \tau_E$ ，则在聚变反应能够发生之前等离子体就冷却了。另一方面，如果 $\tau_D \ll \tau_E$ ，那么对等离子体的约束就显得过度了，这时可适当减小系统的体积，从而降低了造价。
- 上述定性图像说明了为什么FRC这种没有内部环向磁场的位形对于MTF是一种很好的选择。原因在于：如果存在环向磁场，那么由于在理想磁流体力学条件下，这个磁场和等离子体一起运动，因此爆聚衬套的能量除了用于压缩等离子体及其极向磁场之外，还将不得不分配部分能量用于压缩环向磁场。显然这样就降低了爆聚的效率，而且与没有环向磁场的情形相比，要得到相同的终态等离子体参数，衬套所需的初始动能更高。效率的大幅度降低将导致功率平衡所需的输入能量大到无法接受。
- 这一思路也带来另一个问题：既然没有环向磁场可以提高效率，那么通过某种途径消除压缩腔中的极向磁场岂不更好？假设衬套能量的一半传给了等离子体，另一半给了极向磁场，那么取消极向磁场将会使得效率翻番。回答是响亮的——“不！”原因在于，有没有磁场，对等离子体的热输运损失关系重大。下一章中我们将指出，横越磁场的热输运损失要比平行磁场方向上——或无磁场——的情形小好几个量级。所以极向磁场起着等离子体和衬套之间的热绝缘的重要作用。如果没有极向磁场，能量约束时间 τ_E 会很短，也就不可能实现预期的功率平衡。

7.4 场反位形——场反位形作为聚变能来源

- 随着MTF基本概念的建立，现在我们可以从聚变堆可行性的角度来评估其优劣。开始时人们注意到，MTF系统与其他聚变概念在参数上存在巨大差异，因此聚变界大多数人将它视为众多候选方案中的一匹“黑马”。因为它的参数运行范围是如此的不同，现有的具体可用的科学知识几乎很难移植过去。尽管如此，MTF概念确实提供了常规磁约束聚变概念之外的另一种选择，因此它当然值得作为一种潜在的聚变能来源来研究。
- 现在让我们考虑MTF概念的潜在优势。首先，由于聚变反应速率与燃料的数密度平方成正比，因此MTF预言的极高的 n 值意味着可以实现很高的聚变功率密度。其次，高的功率密度反过来意味着MTF系统的几何尺寸可以做得很小。因为装置建设成本取决于其体积，所以这是个很大的优势。第三，尽管MTF需要高电压和脉冲技术，但在总体上这些技术还是要比诸如激光功率源、微波功率源或者中性粒子束功率源简单，成本也较小。所有这些都是在MTF相对于托卡马克的优势所在。
- 将这些优势综合起来，我们看到，MTF研究的根本动机是：MTF概念具有这样一种潜力，它可以在比常规磁约束聚变途径花费少得多的条件下来进行核聚变点火物理的某些方面研究，并验证实验装置的科学可行性。MTF的另一个有吸引力的实际考虑是，MTF研究所需的许多脉冲功率源已经在美国能源部防卫计划的资助下在洛斯阿拉莫斯（Los Alamos）和圣地亚（Sandia）国家实验室建立起来了。

7.4 场反位形——场反位形作为聚变能来源

- 当然，还有许多科学上和工程技术上的问题需要MTF研究人员来解决。这些问题主要包括以下几个方面：
 - 首先，必须能够产生具有压缩前参数的FRC初始等离子体。这需要从现有FRC等离子体产生条件外推得到，尽管活跃的实验计划目前正在进行并取得了一定的进展。
 - 其次，衬套的爆聚带来了一些与等离子体科学相关的材料科学问题。其中有：①在爆聚过程中衬套壁材料变为液态，故衬套壁材料会与等离子体混合；②爆聚过程中等离子体热运输的特征时间尺度为 τ_E ，但目前对这一输运过程还不了解，而足够长的 τ_E 对MTF的成功甚为关键；③必须要证明在整个爆聚过程中磁流体力学平衡保持成立，以免等离子体从FRC的端部逃逸。
 - 第三，可能也是大多数常规聚变途径研究人员担心最多的一点是：如何将MTF技术外推到电站级别的反应堆中。尽管很多人会同意，一次性MTF爆聚是有可能的，但反应堆要求的是一系列快速连续不断的爆聚，大概几秒钟一次。这就对高电压技术和压缩腔技术提出了很高的要求，因为每一次爆聚后都需要排尽杂质。而且，由于每次脉冲都会损坏一副衬套，因此需要不断提供衬套备件。为了实现经济上的可行性，衬套的造价必须足够低廉，这当然也是个技术上的挑战。
 - 最后，衬套本身也面临着工程技术上的困难，其中包括确保衬套在爆聚过程中不会因为焦耳热引起的巨大的内压强而破裂。这些问题中有很多与惯性约束聚变所面临的问题非常相似。
- MTF的发展还处在早期阶段，目前着眼于建成一套能够在一次性爆聚中成功实现点火的完整的集成系统也许是比较现实的。如果这个任务能够取得成功，届时再更深入地考虑反应堆方面的技术难题，从而确定建造新装置的必要性亦为时不晚。

7.4 场反位形——场反位形概念小结

- FRC是一种紧凑的、拉长的环向Z箍缩位形。尽管人们根据理想磁流体力学分析预言它是非常不稳定的，但小装置的实验观察却表明它出乎意料地稳定，估计这是由于其他等离子体动力学效应造成的。不加环向磁场的实验观测表明，FRC也许是产生MTF概念所需的靶等离子体的一种理想选择。在MTF概念中，一团小体积、高密度的FRC等离子体产生后，被注入压缩腔内，接着金属衬套将等离子体压缩到高温高密度状态，引起大量的聚变反应。
- 研究MTF的根本目的是希望用较其他聚变概念成本低的条件产生聚变等离子体，因为它的体积小，高电压技术相对成本也较低。在产生聚变能方面，我们主要担心的是如何将现有技术推广到快速脉冲反应堆规模。



谢谢！