
第五章 单粒子在磁场中的运动



主要内容

- 5.0 引言
- 5.1 导心
- 5.2 漂移运动
- 5.3 香蕉轨道

主要内容

- **5.0 引言**
- **5.1 导心**
- **5.2 漂移运动**
- **5.3 香蕉轨道**

5.0 引言

- 讨论和理解磁场如何约束聚变等离子体中带电粒子 → 给出一套关于自洽磁场中粒子轨道运动具体行为的直观图像。目的是带电粒子能够被约束在等离子体中，并且不会漂移出磁场而打在第一壁上。
- 首先给定磁场和电场下带电粒子的运动，这时不考虑自洽——例如，将电流以及带电粒子流动产生的相应的感生磁场包括进来——的问题。设定条件和假设有将场设定为已知量，并假定其为平滑、缓变的函数，以便与等离子体受长程集体作用支配的要求相协调。自洽场的问题后面再讨论。
- 通过对单粒子运动的研究，了解不同类型运动的频率之间存在的等级差别。频率的等级排列是：

$$\omega_c \gg \omega_g \gg \nu_{\text{Coul}} \gg \nu_{\text{fus}}$$

- 最快的并起主要作用的行为是回旋运动，粒子沿磁场方向运动不受力，而垂直于磁场方向则在小圆周轨道上做回旋运动。粒子只受到垂直方向的约束，为避免平行方向的损失，就有必要采用环形几何。

5.0 引言

- 通过对单粒子运动的研究，了解不同类型运动的频率之间存在的等级差别。频率的等级排列是：
 - 频率等级上的第二层次起因于场在空间和时间上的缓变，这种缓变导致了对基本回旋运动的重要修正，即所谓的“引导中心运动”，其中特别重要的是导心横越磁场的漂移（ v_g ）的发展。漂移运动与热运动相比尽管很小（ $|v_g| \ll v_T$ ），但仍很重要：（1）确认 v_g 的方向，确保粒子不会直接漂移到壁上；（2）漂移对等离子体中电流的影响，建立自洽模型的基础。缓变场中的导心运动是指场的空间变化从回旋半径尺度上看是缓慢的，而场的时间变化相对于回旋频率的倒数而言也是缓慢的。发展导心理论的主要动机是提供聚变等离子体中的粒子约束图像。
 - 频率等级上的第三级是库仑碰撞频率 ν_{Coul} 。尽管这种碰撞很稀少，它是粒子和能量横越磁场弥散的主要机制（如不考虑等离子体湍性运动），正是这种机制降低了约束性能。虽然碰撞不频繁， $\nu_{\text{Coul}} \ll |v_g|/r_L \equiv \omega_g$ ，但它们代表了导致约束损失的基本物理机制。

5.0 引言

- 通过对单粒子运动的研究，了解不同类型运动的频率之间存在的等级差别。频率的等级排列是：
 - 频率等级的最后一级是核聚变碰撞，这类碰撞就更加稀少了。它们基本上属于刚体碰撞。聚变碰撞对于粒子运动的直接影响非常小。它们主要是通过 α 粒子加热和 $D - T$ 燃料消耗间接地影响着等离子体的约束。
 - 这一章主要讨论回旋运动，然后导心理论，限于频率等级前两项。库仑碰撞将不讨论。
- 内容如下：
 - 首先讨论磁约束聚变的基础——均匀、稳恒磁场中的回旋运动，由牛顿定律和洛伦兹力精确导出。
 - 接着，对磁场进行一系列修正，给出更贴近实际的磁场几何。对于每一种修正，主要考虑计算导心漂移的结果。分析中直接运用微扰理论，该理论假设所研究的场随时间和空间均缓慢变化。

5.0 引言

- 内容如下：
 - 漂移有很多种：首先要计算的是由相互垂直的电场和磁场产生的 $E \times B$ 漂移。存在非零电场，它非但不破坏等离子体的屏蔽能力，而且事实上它正是这种屏蔽作用能够维持的原因。其次，引入直线磁场的垂直梯度来产生 ∇B 漂移，再引入磁场弯曲所导致曲率漂移。
 - 下一项修正是令电场和磁场随时间变化。它带来的主要影响就是产生了惯性驱动的漂移，这种漂移称为极化漂移。最后一项修正是平行于磁场方向的梯度。它产生一种平行方向的磁镜力，使得具有很大大垂直速度的粒子能够被约束在强磁场之间的区域内，并由此导出磁镜概念。然而，尽管磁镜力改善了平行约束，但终端的碰撞会破坏这种作用，因此需考虑环形约束。
- 修正的完备性：从导心漂移的角度上说，所列情形是完备的，即没有其他更多的导心漂移。

5.0 引言

- 磁场能够非常有效地约束垂直方向上的带电粒子，在平行于磁场方向上，粒子无法被长时间地约束，由此导致了对环形几何的需要。
- 稳恒、均匀磁场的加入和调整尽管会引起粒子一系列较慢的横越磁场的漂移，但这些漂移的方向不会引起粒子流直接流向第一壁。
- 就聚变来说，导心理论预言，存在各种能够很好约束带电粒子的环形磁场几何。

主要内容

- 5.0 引言
- 5.1 导心
- 5.2 漂移运动
- 5.3 香蕉轨道

5.1 导心

- 导心理论的发展始于对单粒子在磁场和电场中运动的一些基本性质的讨论。
- 这些讨论包括对要求解的精确运动方程的描述和基本守恒关系的推导，这些守恒关系将确认一些严格的运动不变量。

5.1 导心——精确的运动方程

- 导心理论的发展始于由牛顿定律决定的精确的运动方程。对于等离子体物理学应用来说，只需要考虑以洛伦兹力形式出现的磁场力和电场力，重力的作用非常小，可以忽略不计。因此，需要求解的方程为：

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \end{aligned} \right\}$$

- 通常 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 和 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 是三维空间和时间的函数。因此上式是一组耦合的非线性常微分方程，其中未知变量 \mathbf{v} 和 \mathbf{r} 是时间 t 的函数。运用导心理论的各种基本假定，这组方程能够得到多种情形下的解。所谓导心理论假定是指 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 场的空间变化尺度要比回旋半径大，而场的时间变化尺度慢于回旋频率的倒数。

5.1 导心——基本的守恒关系

- 由上式可以得到几个基本的守恒关系。这些关系包括能量守恒和动量守恒。运用守恒关系可以导出“严格的运动不变量”，它们强烈制约着粒子的轨道。
- 首先讨论的是 $E = 0$ 且 B 与时间无关，即 $B = B(r)$ 的情形。用 v 点乘上式得到：

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = 0$$

或

$$\frac{1}{2} m v^2 = \text{常数}$$

- 结论是：在稳恒磁场中粒子的动能是一个常数。换句话说，稳恒磁场不对带电粒子做功。另一个与此相关的基本结论是：稳恒磁场不产生平行于 B 的力，这个结论由关系式 $B \cdot (v \times B) = 0$ 即可看出。

5.1 导心——基本的守恒关系

- 这一关系可以推广到包含静电场的情形。由于场是稳恒的，因此法拉第定律意味着 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ 。再用 \mathbf{v} 点乘运动方程式，并利用（稳恒场的）恒等式：

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi = \mathbf{v} \cdot \nabla\phi$$

- 由此可得，

$$W \equiv \frac{1}{2}mv^2 + q\phi = \text{常数}$$

- 即动能和势能的和是一个常数。
- 对严格的运动不变量的确定原则上都可以采用一种简单的描述。通常场是 x, y, z, t 的函数，当考虑一个或多个变量可省略的特殊情形，亦即场不随着这些变量变化时，都有一个或多个对应的严格的运动不变量。
- 上面讨论的与时间无关的情形对应于能量守恒。

5.1 导心——基本的守恒关系

- 作为另一个例子，假定场是 x, z, t 的函数，而与 y 坐标无关。通常的处理方法是引入标量势和矢量势，即 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ， $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。用 \mathbf{e}_y 点乘运动方程，可得：

$$\frac{d}{dt}mv_y = q(E_y - v_x B_z + v_z B_x) = -q \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = -q \frac{dA_y}{dt}$$

- 其中用到了 $\partial A_y / \partial y = 0$ 。可以得到：

$$p_y \equiv mv_y + qA_y = \text{常数}$$

- 其中， p_y 是正则动量的 y 分量。用类似方法可以证明，对于轴对称（即 $\partial/\partial\theta = 0$ ）的圆柱几何情形，正则角动量的 θ 分量也是一个运动常数：

$$p_\theta \equiv mrv_\theta + qrA_\theta = \text{常数}$$

- 在理解复杂的电场和磁场中的粒子运动行为时，严格的运动不变量的存在是很有用的。为了得到粒子轨道的完整解析解，选择相对简单的 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} ，并且明确说明存在严格的运动不变量。

5.1 导心——均匀稳恒磁场中的运动

- 磁约束的基本内容是带电粒子在均匀、稳恒磁场中的行为。
- 粒子轨道显示，粒子在垂直于磁场方向上受到很好的约束，但在平行方向上不受约束。
作法：假定 $E = 0$ 和 $B = B\mathbf{e}_z$ （其中， B 是常数），解牛顿运动方程，即可解释这种行为：

$$\left. \begin{aligned} dv_x/dt &= \omega_c v_y & v_x(0) &= v_{x0} \equiv v_{\perp} \cos \phi \\ dv_y/dt &= -\omega_c v_x & v_y(0) &= v_{y0} \equiv v_{\perp} \sin \phi \\ dv_z/dt &= 0 & v_z(0) &= v_{z0} \equiv v_{\parallel} \\ dx/dt &= v_x & x(0) &= x_0 \\ dy/dt &= v_y & y(0) &= y_0 \\ dz/dt &= v_z & z(0) &= z_0 \end{aligned} \right\}$$

- 其中， $\omega_c = qB/m$ 是回旋频率（有时也称作回转频率或者拉莫尔频率）； v_{\perp} ， ϕ ， v_{\parallel} ， x_0 ， y_0 ， z_0 均为常数，分别代表粒子的初始速度和位置。

5.1 导心——均匀稳恒磁场中的运动

■ 1. 平行方向的运动

- 首先研究平行于磁场方向的运动。方程相应的部分为：

$$\left. \begin{aligned} dv_z/dt &= 0 & v_z(0) &= v_{z0} \equiv v_{\parallel} \\ dz/dt &= v_z & z(0) &= z_0 \end{aligned} \right\}$$

- 容易得出解为：

$$\left. \begin{aligned} v_z(t) &= v_{\parallel} \\ z(t) &= z_0 + v_{\parallel} t \end{aligned} \right\}$$

- 这是匀速直线运动。平行力不提供约束，粒子做简单的无阻尼运动。所以粒子沿给定磁场线的方向上的运动是不受约束的。

5.1 导心——均匀稳恒磁场中的运动

■ 2. 垂直方向的运动

- 在 (x, y) 平面上，带电粒子受到的力总是与速度 \boldsymbol{v} 垂直。由经典力学可知，这会 导致一种圆周运动，实际情形确实是这样。首先考虑与速度有关的方程：

$$\left. \begin{aligned} dv_x/dt &= \omega_c v_y & v_x(0) &= v_{x0} \equiv v_{\perp} \cos \phi \\ dv_y/dt &= -\omega_c v_x & v_y(0) &= v_{y0} \equiv v_{\perp} \sin \phi \end{aligned} \right\}$$

- 消去 v_x ：

$$\left. \begin{aligned} d^2 v_y/dt^2 + \omega_c^2 v_y &= 0 \\ v_y(0) &= v_{\perp} \sin \phi \\ dv_y(0)/dt &= -\omega_c v_x(0) = -\omega_c v_{\perp} \cos \phi \end{aligned} \right\}$$

5.1 导心——均匀稳恒磁场中的运动

- 上式是常系数的线性常微分方程。其通解能很容易得出，加上初始条件，可得：

$$\left. \begin{aligned} v_y(t) &= -v_{\perp} \sin(\omega_c t - \phi) \\ v_x(t) &= v_{\perp} \cos(\omega_c t - \phi) \end{aligned} \right\}$$

- 可以看到，粒子以等于回转频率的角频率旋转。同时，对于均匀磁场情形，不仅总动能是守恒量，而且平行方向和垂直方向上的动能分量也分别守恒，即 $v_z^2(t) = v_{\parallel}^2 = \text{常数}$ ， $v_x^2(t) + v_y^2(t) = v_{\perp}^2 = \text{常数}$ 。

5.1 导心——均匀稳恒磁场中的运动

- 通过速度积分即可完成垂直方向上运动的解，由此得到粒子轨道的 $x(t)$ ， $y(t)$ 表达式：

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_g + r_L \sin(\omega_c t - \phi) \\ y(t) &= y_g + r_L \cos(\omega_c t - \phi) \end{aligned} \right\}$$

- 其中，回旋半径（有时也称作拉莫尔半径）为 $r_L = v_{\perp} / \omega_c = mv_{\perp} / qB$ ；量 x_g ， y_g 定义为粒子的导心位置：

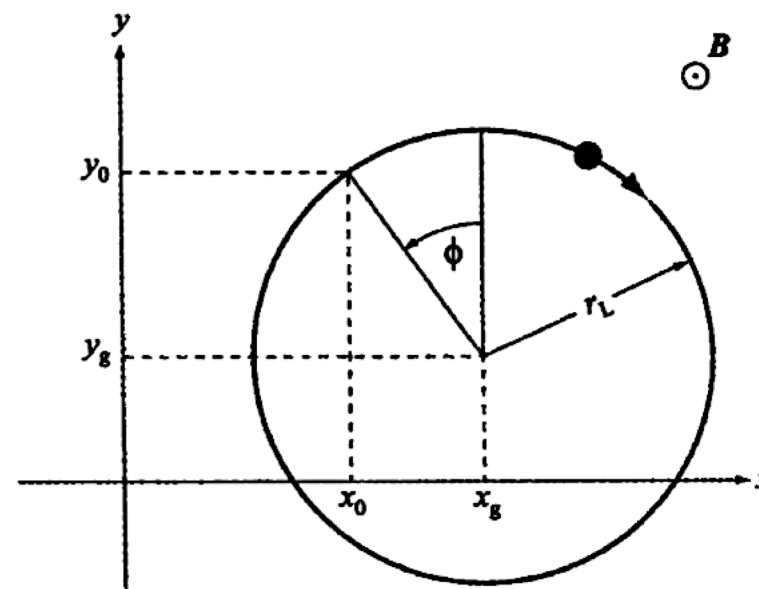
$$\left. \begin{aligned} x_g &\equiv x_0 + r_L \sin \phi \\ y_g &\equiv y_0 - r_L \cos \phi \end{aligned} \right\}$$

- 由这个定义可以得到轨道方程：

$$(x - x_g)^2 + (y - y_g)^2 = r_L^2$$

5.1 导心——均匀稳恒磁场中的运动

- 该轨道如右图所示。可以看出，粒子的轨道是一个以回旋半径为半径的圆。轨道的中心位置为 x_g, y_g ，因此得名“导心”。由于通常情况下回旋半径与等离子体半径相比非常小，因此得出结论：粒子在垂直磁场方向上存在很好的约束。
- 导心的概念是“导心理论”的基础。通过研究更一般场下导心的速度和位置，可以得到粒子平均位置的精确图像，它与实际轨道的偏差仅在回旋半径的量级上。导心运动为理解在缓慢变化的磁场和电场——常见的实际情形——中带电粒子的运动提供了很好的直观图像。



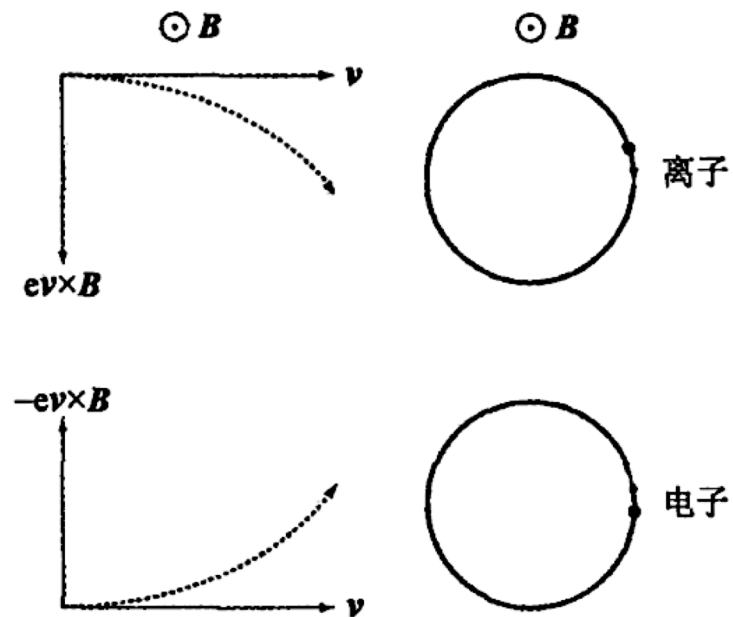
磁场中带正电粒子的回旋轨道
(图中给出了导心位置 x_g, y_g
和初始位置 x_0, y_0)

5.1 导心——均匀稳恒磁场中的运动

- 回旋运动的另一个特性是旋转的方向。
- 因为电子和离子的电荷符号相反，故它们的回旋方向相反。实际的回旋方向可以通过计算力（ $\pm|q|\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ ）的方向来确定，如右图所示。记住回旋方向的方法是：回旋粒子电流产生的磁场的方向总是和外磁场的方向相反，也就是说回旋运动是抗磁性的。定义回旋频率和回旋半径始终为正，即 $\omega_c = |q|B/m$ ， $r_L = mv_\perp/|q|B$ ，考虑电荷符号时表达式为：

$$\left. \begin{aligned} v_x(t) &= v_\perp \cos(\omega_c t \pm \phi) \\ v_y(t) &= \pm v_\perp \sin(\omega_c t \pm \phi) \\ x(t) &= x_g + r_L \sin(\omega_c t \pm \phi) \\ y(t) &= y_g \mp r_L \cos(\omega_c t \pm \phi) \end{aligned} \right\}$$

- 其中正负号中，上面的符号对应于负电荷情形。解的振荡部分就简写为 $\mathbf{v}_{\text{gyro}}(t)$ 和 $\mathbf{r}_{\text{gyro}}(t)$ 。



带电粒子的受力表明，回旋方向在逆磁方向上（对离子 $q = +e$ ，对电子 $q = -e$ ）

5.1 导心——均匀稳恒磁场中的运动

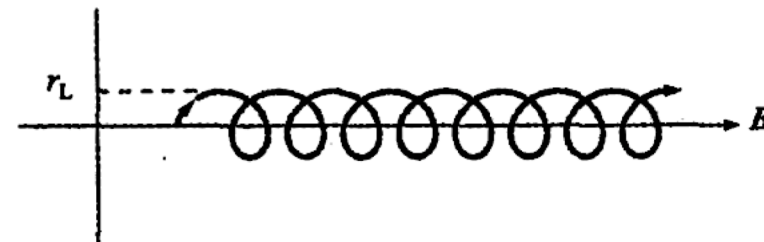
- 最后讨论回旋运动的定性结果。可以看到，回旋频率随着磁场 B 的增强而增大，即强高 $B \rightarrow$ 高 ω_c ，并且电子回旋频率比离子的快 m_i/m_e 倍。回旋半径随垂直速度 v_\perp 的增大而增大，但随磁场 B 的增强而减小，即大 v_\perp 、小 $B \rightarrow$ 大 r_L 。在粒子热速度为 $v_\perp = v_T \equiv (2T/m)^{1/2}$ ，离子回旋半径是电子的 $(m_i/m_e)^{1/2}$ 倍。典型值如下：

$$\left. \begin{aligned} \omega_{ce} &= \frac{eB}{m_e} = 1.76 \times 10^{11} B = 8.8 \times 10^{11} (\text{s}^{-1}) \\ \omega_{ci} &= \frac{eB}{m_i} = 4.79 \times 10^7 B = 2.4 \times 10^8 (\text{s}^{-1}) \\ r_{Le} &= \frac{(2m_e T_e)^{1/2}}{eB} = 1.07 \times 10^{-4} \frac{T_k^{1/2}}{B} = 8.3 \times 10^{-5} (\text{m}) \\ r_{Li} &= \frac{(2m_i T_i)^{1/2}}{eB} = 6.46 \times 10^{-3} \frac{T_k^{1/2}}{B} = 5.0 \times 10^{-3} (\text{m}) \end{aligned} \right\}$$

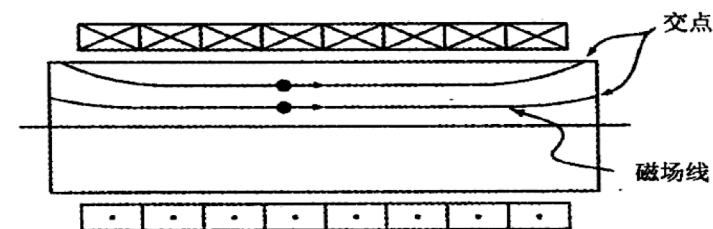
- 其中具体数值对应于氦粒子在 $T_k = 15\text{keV}$ 、 $B = 5\text{T}$ 时的值。

5.1 导心——回旋运动的结果

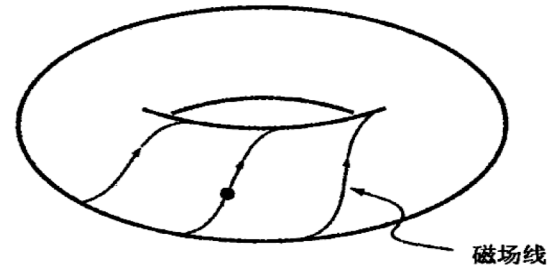
- 将带电粒子的垂直方向和平行方向的运动结合起来，就得到了上图所示的螺旋轨道。粒子沿着磁场线无阻尼地螺旋前进，它与磁场线的垂直距离即为回旋半径。
- 磁约束聚变反应堆几何必须是环形的，如下图（a）所示的技术相对简单的直线几何是不可行的。在有限长的直线几何下，所有的磁场线在离开系统时必定会和第一壁接触，所以沿磁场线自由流动的粒子在很短的时间里就会撞到壁上。换句话说，粒子不能被约束，所以就没有时间来发生聚变反应。但在下图（b）所示的环形几何下就能够避免。在此情形下，粒子仍沿磁场线螺旋前进，但是它们绝不会撞到第一壁上，因为在环形几何中磁场线不会离开腔室，而且粒子的垂直方向的偏移很小，即 $r_{Li} \ll a$ 。



均匀磁场中带电粒子的螺旋轨迹



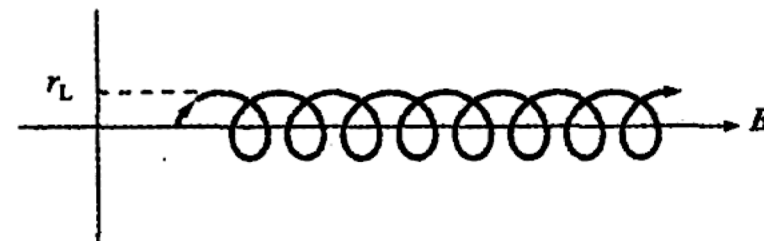
(a) 粒子沿着磁场线运动，当粒子撞上壁时损失掉



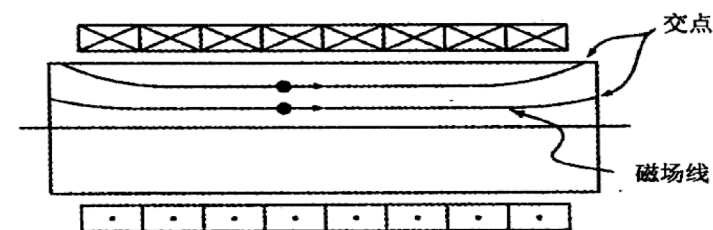
(b) 沿环面缠绕的磁场线避免了自由流动导致的终端损失

5.1 导心____回旋运动的结果

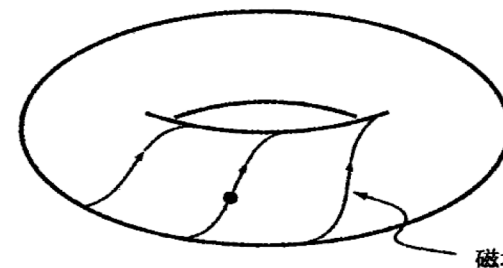
- 应当指出，目前已发明出各种不同的位形来给开端系统“堵漏”。这些位形都是以就要谈到的“磁镜”效应为基础的。但即便如此，实际情形中的终端损失仍然大得难以克服。也正因此，聚变应用中所有领先的磁场几何都是环形的。
- 总之，带电粒子在恒定均匀磁场中的回旋运动是聚变等离子体磁约束的基础。



均匀磁场中带电粒子的螺旋轨迹



(a) 粒子沿着磁场线运动，当粒子撞上壁时损失掉



(b) 沿环面缠绕的磁场线避免了自由流动导致的终端损失

主要内容

- 5.0 引言
- 5.1 导心
- 5.2 漂移运动
- 5.3 香蕉轨道

5.2 漂移运动——概论

漂移运动罗列如下：

- 稳恒磁场 B 和电场 E 下的运动： $E \times B$ 漂移
- 垂直梯度的场下的运动： ∇B 漂移
- 弯曲磁场中的运动：曲率漂移
- 真空磁场中 $V_{\nabla B}$ 漂移和 V_K 漂移的综合
- 时变电场 E 和磁场 B 中的运动：极化漂移

5.2 漂移运动 $E \times B$ 漂移

- 首先考虑在恒定磁场上叠加一个（空间和时间上）恒定电场的情形。已知等离子体有很强的屏蔽电场的能力，故需讨论德拜屏蔽效应和电场之间存在的兼容性，可以证明实际上这其中并没有矛盾。
- 采用的都是“单粒子运动”的思想，其中简单假定了均匀恒定的电场和磁场都是已知的，考察带电粒子在这二者的复合场下的运动。做出的调整是将粒子原有的回旋运动分成两个部分：一部分是平行于电场的分量；另一部分是与电场垂直的分量。可以证明，粒子的平行分量具有恒定加速度，而垂直分量则具有垂直于 E 和 B 的漂移，也就是通常所说的 $E \times B$ 漂移。

5.2 漂移运动 $E \times B$ 漂移

■ 1. 平行电场的作用

- 在稳恒磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ 的基础上，假定等离子体中存在稳恒电场 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E_\parallel \mathbf{e}_z$ 。首先考虑平行电场的作用。根据牛顿定律，运动方程的平行分量为：

$$m \frac{dv_z}{dt} = qE_\parallel \quad v_z(0) = v_\parallel$$

- 可以很容易地解出：

$$v_z(t) = v_\parallel + \frac{q}{m} E_\parallel t$$

- 就是说，在原来速度为 v_\parallel 的匀速直线运动上增加了一个由平行电场引起的恒定加速度。假设粒子速度能够持续地线性增加，最终粒子速度将会变成²⁸相对论性的。

5.2 漂移运动 $E \times B$ 漂移

- 实际上这种情况不会经常发生：电子和离子能够沿着磁场方向自由流动表明，通常情况下在等离子体中产生的平行电场是非常小的，这与德拜屏蔽的原理是一致的。然而，由于存在库仑碰撞，实际的平行电场并不像德拜屏蔽理论预期的那样小。这些碰撞使得平行方向上的运动受到小的摩擦阻力，并由此产生小而有限的等离子体电阻率。这个电阻率产生了小的（但是仍然比德拜值要高）平行电场，这与有限长铜导线两端存在小而有限的电压降的情形类似。这个小电场与摩擦阻力结合在一起，将带电粒子能达到的最大速度限制在非相对论值的水平上。
- 有关平行方向运动值得关注的最后一点是：在某些条件下，碰撞引起的摩擦阻力太小，以至于不能阻止等离子体中某些种类电子的热化，这些电子确实能够加速到相对论性速度。这些电子被称为“逃逸电子”。

5.2 漂移运动 $E \times B$ 漂移

■ 2. 垂直电场的作用

- 垂直电场对回旋运动的作用：假定 $E_{\perp} = E_x \mathbf{e}_x$ ，其中 E_x 是常数。运动方程的垂直部分变成：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \omega_c v_y + \frac{q}{m} E_x \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\omega_c v_x \end{aligned} \right\}$$

- 将第二个方程带入第一个，以消去 v_x ：

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_c^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right) = 0$$

- 通过引入一个新的速度变量 $v'_y = v_y + E_x/B$ ，很容易得到方程的解。 v'_y 的方程简化为：

$$\frac{d^2 v'_y}{dt^2} + \omega_c^2 v'_y = 0$$

- 这相当于前面讨论的回旋运动。

5.2 漂移运动 $E \times B$ 漂移

- 由此，原先的速度解变为：

$$\boldsymbol{v}_{\perp}(t) = \boldsymbol{v}_{\text{gyro}}(t) - (E_x/B)\boldsymbol{e}_y$$

- 注意到，新增的漂移项和 \boldsymbol{E} 、 \boldsymbol{B} 都垂直。这个结果可以简单地推广到任意的垂直电场情况 $\boldsymbol{E}_{\perp} = E_x\boldsymbol{e}_x + E_y\boldsymbol{e}_y$ ，其中 E_x 、 E_y 是常数。对于一般情形，引入一个新的垂直速度变量：

$$\boldsymbol{v}'_{\perp} = \boldsymbol{v}_{\perp} - \boldsymbol{E}_{\perp} \times \boldsymbol{B} / B^2$$

- 垂直平面 (x, y) 上的分量的基本运动方程为：

$$m \frac{d\boldsymbol{v}_{\perp}}{dt} = q(\boldsymbol{E}_{\perp} + \boldsymbol{v}_{\perp} \times \boldsymbol{B})$$

- 可以简化为：

$$\frac{d\boldsymbol{v}'_{\perp}}{dt} = \omega_c \boldsymbol{v}'_{\perp} \times \boldsymbol{e}_z$$

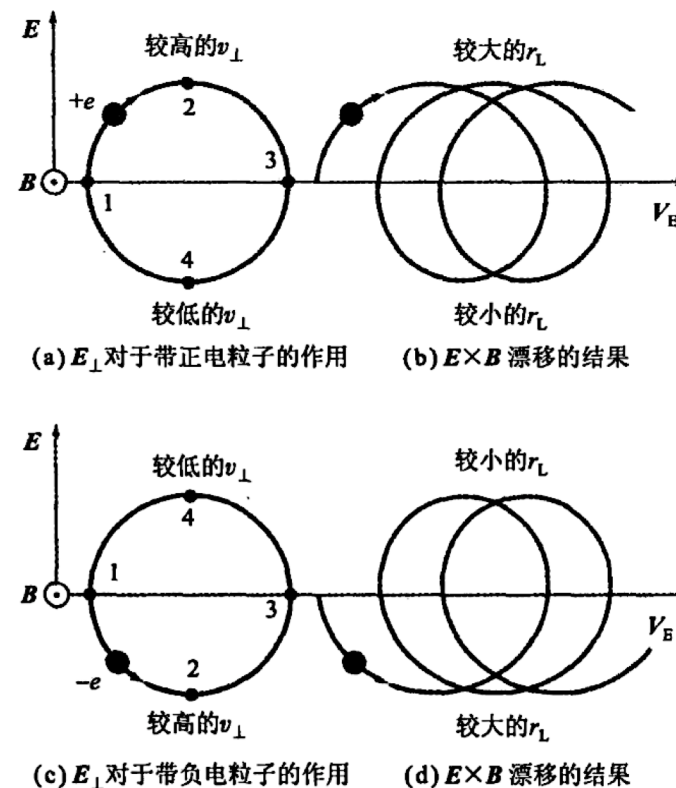
- 这相当于均匀磁场下的回旋运动。

5.2 漂移运动 $E \times B$ 漂移

- 基于上式，原始速度的一般形式可以写成：

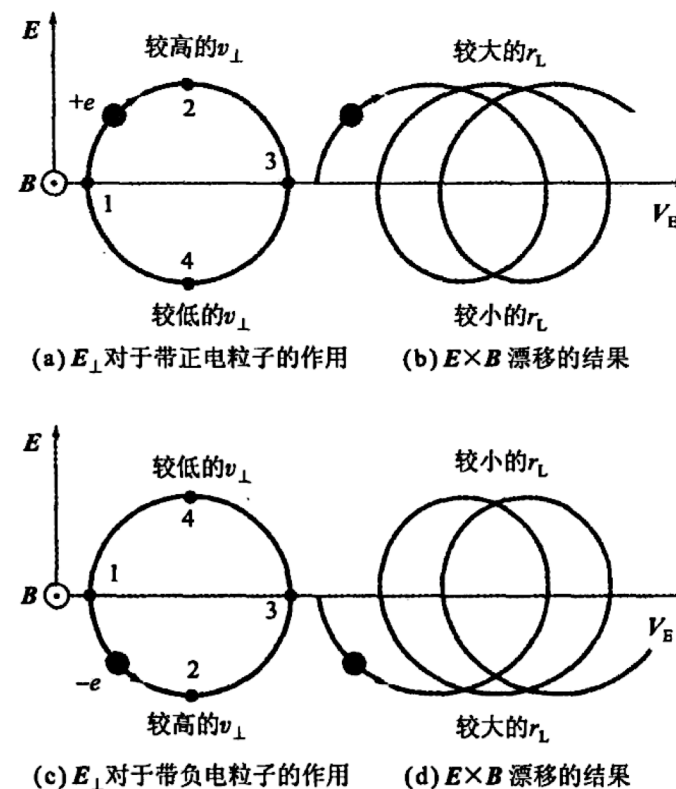
$$\left. \begin{aligned} v_{\perp}(t) &= v_{\text{gyro}}(t) + V_E \\ V_E &= \frac{E \times B}{B^2} \end{aligned} \right\}$$

- 结论是：均匀垂直电场的引入相当于在回旋运动的基础上叠加了一个恒定的漂移速度 (V_E)，即 $E \times B$ 漂移，它垂直于 E 和 B ，且与质量、电荷量都无关。电子和离子都以相同的速度漂移。
- 右图给出 $E \times B$ 漂移的物理图像：由于回旋半径随着垂直速度增加而增大，即 $r_L \sim v_{\perp}/B$ 。先考虑图 (a) 所示的带正电的粒子在电场和磁场下的运动为，不考虑电场时粒子的回旋运动轨道。考虑到电场作用后，当粒子由位置1运动到位置2时，电场的作用使得粒子加速。当粒子由位置2运动到位置3时，粒子运动变慢，又回到原来的速度。注意到在轨道的上半部分，每一点的速度都比不考虑电场时的速度大，也就是说，平均来看，回旋半径是增大的。



5.2 漂移运动 $E \times B$ 漂移

- 轨道的下半部分则相反。从位置3到位置4的运动中，粒子被减速。从位置4回到位置1，粒子加速到原来的速度。轨道下半部分的平均速度比不考虑电场时要小，也就是说，平均来看，回旋半径较不考虑电场时的要小。
- 这些效应的综合结果显示在图 (b) 中。轨道上半部分的 v_{\perp} 较大而下半部分的 v_{\perp} 较小，这样，平均回旋半径的不同导致了垂直于 E 和 B 的漂移。图 (c) 和图 (d) 中显示了带负电的电子的类似物理图像。漂移方向与粒子的电荷符号无关。



5.2 漂移运动 $E \times B$ 漂移

- 垂直电场和德拜屏蔽同时存在的原因，有两种考虑方法：
 - 首先，注意到由于电子和离子具有相同的 $E \times B$ 漂移速度，这个速度相当于一个不引起电流 $J_{\perp} = en(u_{\perp i} - u_{\perp e}) = 0$ 的宏观流体的流速 $u_{\perp} = V_E$ 。 $E \times B$ 漂移速度的表达式可以写成 $E_{\perp} + u_{\perp} \times B = 0$ 。我们知道，在低频电磁理论里，在以速度 u_{\perp} 运动的流体中的电场和磁场能够通过关系式 $E'_{\perp} = E_{\perp} + u_{\perp} \times B$ 和 $B' = B$ 变换到随着流体运动的坐标系。因此，在流体静止的坐标系中，有 $E'_{\perp} = 0$ ，这和德拜屏蔽原理是一致的。
 - 第二种考虑方法稍显微妙。等离子体中能够存在小的垂直电场（该电场值仍比德拜值大）。这将涉及自洽等离子体模型的发展和求解。定性来说，这种电场的产生是因为垂直于 B 的电子和离子受到磁约束不能自由流动，不能屏蔽局部可能产生的电荷不平衡。可以证明，这些不平衡是电子和离子回旋半径不同的结果，由此最终会产生大小为 $e\phi \sim T$ 的静电势。
- 总的说来，在带电粒子运动的导心理论中， $E \times B$ 漂移是横越磁场的基本漂移之一。

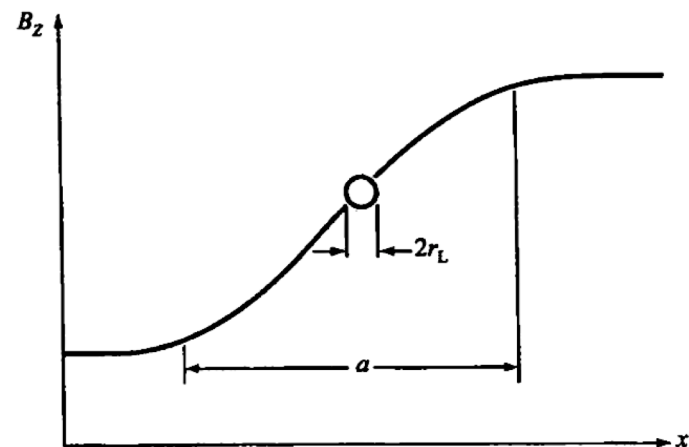
5.2 漂移运动—— ∇B 漂移

- 对回旋运动引入的第二种修正与场的不均匀性有关。具体而言，包括了垂直于磁场的 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 的梯度的作用。虽然磁场 \mathbf{B} 是不均匀的，但是它的方向仍然是直线的。也就是说， \mathbf{B} 可以设为 $\mathbf{B} = B(x, y)\mathbf{e}_z$ 的形式。至于电场的梯度形式，可设为 $\mathbf{E} = E_x(x)\mathbf{e}_x + E_y(y)\mathbf{e}_y$ 。注意到 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ，否则，由法拉第定律知， \mathbf{B} 必随时间变化。这里等离子体中的场的梯度是由长直螺线管线圈产生的。
- 磁场梯度产生垂直于 \mathbf{B} 和 ∇B 的粒子漂移，也就是通常所说的 ∇B 漂移。而电场的梯度使回旋频率产生一个小的偏移，可直接用微扰展开的方法来分析。展开项中的小参数是回旋半径与场的不均匀性的特征标长的比值，即 $r_L \nabla B / B \sim r_L \nabla E / E \sim r_L / a \ll 1$ 。磁场和电场相对于回旋半径尺度来说变化非常缓慢。

5.2 漂移运动—— ∇B 漂移

- 1. $E = 0$, B 有垂直梯度的情形
- 简化计算, 假设初始 $E = 0$, $B(x, y) \rightarrow B(x)$, 但这一假设不久就会取消。运动方程的垂直部分变成:

$$\left. \begin{aligned} m dv_x / dt &= qB(x)v_y \\ m dv_y / dt &= -qB(x)v_x \\ dx / dt &= v_x \\ dy / dt &= v_y \end{aligned} \right\}$$

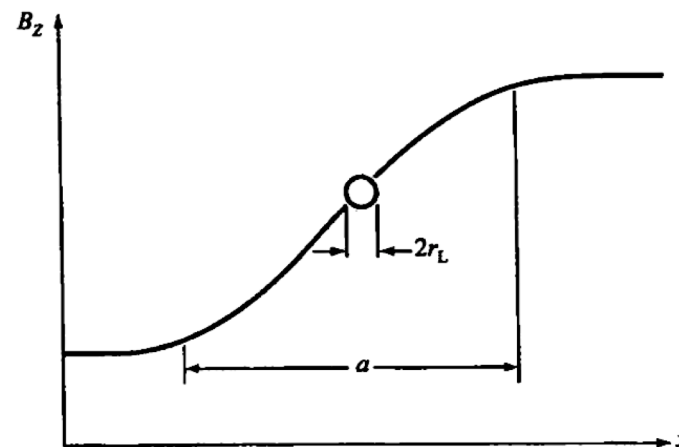


弱磁场梯度下的回旋轨道在
 x 方向上的宽度满足 $r_L \ll a$

5.2 漂移运动 ∇B 漂移

- 由于 B 是 x 的函数，因此这些方程是复杂的非线性微分方程。方程可以通过小回旋半径近似来简化。关键步骤是在导心处对 B 作泰勒展开。即弱场梯度只是使粒子的 x 位置稍微偏离导心轨道，如图所示。在这种情况下，运动方程的垂直部分变成：

$$\left. \begin{aligned} dv_x/dt &\approx \omega_c(x_g) \left[1 + \frac{\partial B(x_g)}{\partial x_g} \frac{x - x_g}{B(x_g)} \right] v_y \\ dv_y/dt &\approx -\omega_c(x_g) \left[1 + \frac{\partial B(x_g)}{\partial x_g} \frac{x - x_g}{B(x_g)} \right] v_x \\ dx/dt &= v_x \\ dy/dt &= v_y \end{aligned} \right\}$$



弱磁场梯度下的回旋轨道在 x 方向上的宽度满足 $r_L \ll a$

- 可以发现，方括号中的第二项是 r_L/a 级小量。

5.2 漂移运动—— ∇B 漂移

- 由直接微扰展开得到上式的解为：

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + v_1 + \cdots \\ r &= r_0 + r_1 + \cdots \end{aligned} \right\}$$

- 将此展开式带入到运动方程中，并令零阶项为零：

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{v}_0/dt &= \omega_c \mathbf{v}_0 \times \mathbf{e}_z \\ d\mathbf{r}_0/dt &= \mathbf{v}_0 \end{aligned} \right\}$$

- 因为 $\omega_c = \omega_c(x_g) = \text{常数}$ ，故上式的解是由式 $\left. \begin{aligned} v_y(t) &= -v_\perp \sin(\omega_c t - \phi) \\ v_x(t) &= v_\perp \cos(\omega_c t - \phi) \end{aligned} \right\}$ 和式

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_g + r_L \sin(\omega_c t - \phi) \\ y(t) &= y_g + r_L \cos(\omega_c t - \phi) \end{aligned} \right\} \text{给出的简单回旋运动。}$$

5.2 漂移运动—— ∇B 漂移

- 现在将零阶解带入一阶量的微扰方程中：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_{x1}}{dt} - \omega_c v_{y1} &= -\frac{v_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial x_g} [1 - \cos 2(\omega_c t - \phi)] \\ \frac{dv_{y1}}{dt} + \omega_c v_{x1} &= -\frac{v_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial x_g} \sin 2(\omega_c t - \phi) \end{aligned} \right\}$$

- 这是线性非齐次微分方程。

5.2 漂移运动 ∇B 漂移

- 可以看到，方程中有两种驱动项——一种是常数项，另一种是两倍于回旋频率的振荡项。由于方程是线性的，因此可用叠加的方法来确定每种驱动项的响应。可以看出，二次谐波项是作为导心位置的小的偏移加上对回旋半径大小的一个小量修正项而出现的。这两种效应都不重要，因为它们不会导致导心的漂移。所以在目前考虑的情形下可以将它们忽略不计。在这种假设下，速度分量的方程变成：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_{x1}}{dt} - \omega_c v_{y1} &= -\frac{v_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial x_g} \\ \frac{dv_{y1}}{dt} + \omega_c v_{x1} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- 这两个方程形式上与式 $\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \omega_c v_y + \frac{q}{m} E_x \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\omega_c v_x \end{aligned} \right\}$ 是一样的，而此式产生了 $E \times B$ 漂移。通过直接比较可知，

表示匀加速度 $F/m \rightarrow qE/m$ 的任何驱动项产生如下形式的等效 $E \times B$ 漂移：

$$V_F = \frac{1}{q} \frac{F \times B}{B^2}$$

5.2 漂移运动—— ∇B 漂移

- 将这个结果应用到前式，得到 ∇B 漂移表达式：

$$V_{\nabla B} = \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x_g} \mathbf{e}_y$$

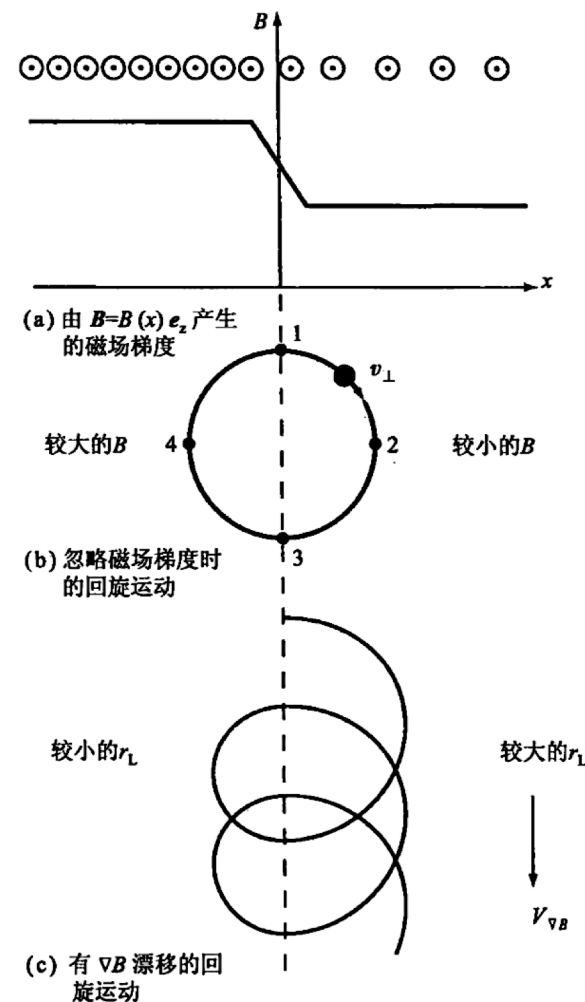
- 这个结果可以简单地推广到 $B = B(x, y)$ 的二维情况。 ∇B 漂移的一般形式是：

$$V_{\nabla B} = \mp \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}$$

- 其中，正负号中的负号对应于负电荷情形。显然，场是用导心处的值来估算的。
- ∇B 漂移有如下特点：①漂移方向与 \mathbf{B} 和 ∇B 都垂直；②对于典型的热粒子（ $v_{\perp} \sim v_T$ ）， ∇B 漂移相对于热速度是小量， $|V_{\nabla B}/v_T| \sim r_L/a$ ；③因为漂移与 mv_{\perp}^2 成正比，所以当 $T_e = T_i = T$ 时，电子和离子有相同的（平均速度）漂移量；④由于 $V_{\nabla B}$ 与 $1/q$ 成正比，电子和离子的漂移方向相反，会产生电流。

5.2 漂移运动 ∇B 漂移

- 漂移的物理图像：图（a）显示的是具有夸张的磁场梯度的磁场分布，图（b）显示了磁场梯度效应被忽略的情况下带正电粒子的零阶回旋运动。
- 由于回旋半径尺度是 $r_L \sim v_{\perp}/B$ ，因此粒子在运动轨道上从位置1到位置2再到位置3的过程中，回旋半径因磁场减小而变大。类似地，在从位置3到位置4再回到位置1的过程中，回旋半径因磁场增加而变小。图（c）显示了对上述回旋运动的修正，证明了 ∇B 漂移的存在。带负电的情形与此类似。
- ∇B 漂移对聚变等离子体中电流的产生和相应的自洽磁场有很重要的贡献。



5.2 漂移运动—— ∇B 漂移

■ 2. 均匀磁场 B 下电场 E 的垂直梯度

- 电场存在弱垂直梯度的情形：设磁场仍然是均匀的（ $B = \text{常数}$ ），因为磁场 B 的弱梯度的效应已经计算过了，而且业已证明这些效应可以用叠加的方法结合起来。
- 电场梯度的影响主要是对回旋频率产生小的修正，而且这种修正的意义不大。
- 假设电场的形式为 $E = E_x(x)\mathbf{e}_x$ 。它满足 $\nabla \times E = 0$ ，所以磁场不随时间变化。与 ∇B 漂移时的处理一样，运用直接微扰展开方法将电场在粒子导心位置处展开可以得到数学解。相应的速度分量方程变为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} - \omega_c \left[v_y + \frac{E_x(x_g)}{B} \right] &\approx \frac{q}{m} \frac{\partial E_x}{\partial x_g} (x - x_g) \\ \frac{dv_y}{dt} + \omega_c v_x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

5.2 漂移运动 ∇B 漂移

- 注意到，如果电场没有梯度，这个解可由回旋运动和 $E \times B$ 漂移叠加给出。当存在电场梯度时，将零阶解带入上式右边的修正项时必须小心，因为这一项可能是按回旋频率的基频在振荡，从而以共振驱动项形式出现在方程里。共振驱动项通常会使解随时间线性增长，解随时间线性发散，微扰处理就不成立了。但对上式进行更仔细的研究后发现，这种共振增长的情形不会出现，解仍然是有限的：将上式中的第一个方程微分，然后将第二个方程中的 dv_y/dt 代入，经过简单计算得到：

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 \left(1 - \frac{1}{\omega_c B} \frac{\partial E_x}{\partial x_g} \right) v_x = 0$$

- 该式表明，电场垂直梯度的主要作用是对回旋频率产生了一个小的修正，既不存在新的粒子漂移也不存在共振。换句话说，这种作用的意义不大，可忽略不计。
- 最后，值得指出的是，如果按比值 r_L/a 展开的高阶形式，确实会出现这种漂移即“有限回旋半径”漂移。电子和离子的这种漂移的方向相同，但离子漂移的数值较大。
- 但由于这种漂移较小（与导心的其他漂移项相比仅为 r_L/a 量级），因此对于的绝大部分聚变等离子体物理来说，这种漂移均不具有重要影响，可忽略不计。

5.2 漂移运动——曲率漂移

- 截至目前，就磁场的空间特性来说，已经讨论了空间分布均匀的磁场和存在垂直梯度的磁场两种情形。在这些情形中，场的方向都是沿着 \mathbf{e}_z 方向平直的，如果引入弯曲磁场，可以证明，磁场线的弯曲会使导心产生新的漂移，其方向既垂直于磁场方向也垂直于曲率矢量的方向。这种漂移是由粒子沿弯曲磁场线不受约束地平行运动时所受到的离心力驱动的，所以这种漂移被称为“曲率漂移”。
- 假定场的形式为 $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{e}_\theta$ 和 $\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{e}_r$ ，还是用微扰展开的方法来求解。在计算出漂移后，再将结果推广到一般曲率的情形。推导的第一步是给出柱坐标系下位置、速度和加速度的表示式：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= r(t)\mathbf{e}_r + z(t)\mathbf{e}_z \\ \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_z\mathbf{e}_z \\ \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{e}_z \end{aligned} \right\}$$

5.2 漂移运动——曲率漂移

- 其中，两个单位矢量方向随时间 t 的变化如下：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{r} \mathbf{e}_\theta \\ \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_\theta}{r} \mathbf{e}_r \end{aligned} \right\}$$

- 运动方程的速度分量能够写成：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} &= \frac{q}{m} (E_r - v_z B) \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{q}{m} v_r B \\ \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

5.2 漂移运动——曲率漂移

- 主要行为仍是回旋运动加 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移。可以引入类似于 ∇B 漂移分析的微扰展开，即 $\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{v}_0(t) + \mathbf{v}_1(t)$ 。其中， $\mathbf{v}_0(t)$ 由 $\mathbf{v}_{\perp 0}(t) = \mathbf{v}_{\text{gyro}} + \mathbf{V}_E$ 和 $\mathbf{v}_{\theta 0}(t) = v_{\parallel} = \text{常数}$ 组成。注意到，这里的平行方向指的是 θ 方向。下一步就是将这些量带入上式，并且将所有的量在导心位置 r_g 处展开。经过简单计算可以得出 $\mathbf{v}_1(t)$ 的方程为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_{\perp 1}}{dt} - \omega_c \mathbf{v}_{\perp 1} \times \mathbf{e}_{\theta} &= \frac{\omega_c (r - r_g)}{B} \left[\frac{\partial B}{\partial r_g} \mathbf{v}_{\perp 0} \times \mathbf{e}_{\theta} + \frac{\partial E_r}{\partial r_g} \mathbf{e}_r \right] + \frac{v_{\parallel}^2}{r_g} \mathbf{e}_r \\ \frac{dv_{\parallel 1}}{dt} &= - \frac{\mathbf{v}_{r0} \mathbf{v}_{z0}}{r_g} \end{aligned} \right\}$$

- 其中 $\omega_c = qB(r_g)/m$ 。

5.2 漂移运动——曲率漂移

- 解有以下特性：（1）平行速度 $v_{\parallel 1}(t)$ 产生一个小的不重要的二次谐波修正，这是 $v_{r0}(t)$ 和 $v_{z0}(t)$ 都以基频振荡且相位差是 $\pi/2$ 的结果。（2） $v_{\perp 1}$ 方程右边的前两项代表了之前讨论的 ∇B 漂移和 $E_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})$ 回旋频率修正。只有最后一项代表了新的贡献。因为微扰展开使一阶方程完全线性化，所以这一新增项的作用也可以用叠加的方法来计算。
- 从物理上讲，这一项代表了作用在沿弯曲磁场线自由平行运动的粒子上的离心力。从数学上看，这一项具有恒定外力的形式。因此，导心发展起一种与式 $\mathbf{V}_F = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2}$ 类似的、既垂直于磁场方向又垂直于离心力方向的漂移，即所谓曲率漂移，其形式为：

$$\mathbf{V}_{\kappa} = \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c r} \mathbf{e}_z$$

- 其中所有物理量取的都是导心处的值。这种漂移和 $\mathbf{V}_{\nabla B}$ 具有相似的标度关系，只是 v_{\perp}^2 被 v_{\parallel}^2 替代。后者的值与热速度相比很小（ $|\mathbf{V}_{\kappa}|/v_T \sim r_L/a$ ），而且相近温度下的电子和离子的漂移大小是相当的。但电子和离子的曲率漂移方向相反，因此会产生电流。

5.2 漂移运动——曲率漂移

- 通过引入曲率半径矢量 R_c ，可以将 V_K 的表达式扩展到任意曲率的磁场几何中。具体需要以下几步：首先，引入平行于磁场的单位矢量 $\mathbf{b}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{B}/B$ ；其次，将速度矢量分解成垂直分量和平行分量 $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_\perp + v_\parallel \mathbf{b}$ ；最后，通过如下运算将运动方程的垂直分量分离出来（为了简化，假设 $E = 0$ ）：

$$\mathbf{b} \times \left\{ \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_\perp + v_\parallel \mathbf{b}) - \omega_c (\mathbf{v}_\perp + v_\parallel \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \right] \times \mathbf{b} \right\} = 0$$

- 其中 $\omega_c = qB(\mathbf{r})/m$ 。各项可以简化为：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b} \times \{ [\omega_c (\mathbf{v}_\perp + v_\parallel \mathbf{b}) \times \mathbf{b}] \times \mathbf{b} \} &= -\omega_c \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \times \left\{ \left[\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \right] \times \mathbf{b} \right\} &= \left(\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} \right)_\perp \\ \mathbf{b} \times \left\{ \left[\frac{d}{dt} (v_\parallel \mathbf{b}) \right] \times \mathbf{b} \right\} &= v_\parallel \mathbf{b} \times \left[\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \right) \times \mathbf{b} \right] = v_\parallel \left[(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \left(\mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right) \mathbf{b} \right] \end{aligned} \right\}$$

5.2 漂移运动——曲率漂移

- 注意到单位矢量 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ ，并且 $\mathbf{b} \cdot d\mathbf{b}/dt = (1/2)d(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})/dt = 0$ ，因此最后一项还可以继续简化。并且 $d\mathbf{b}/dt$ 项可以写成：

$$\frac{d\mathbf{b}(\mathbf{r})}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{b} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{b}$$

- 将上述结果结合起来，即可得到垂直方向运动方程的简单形式：

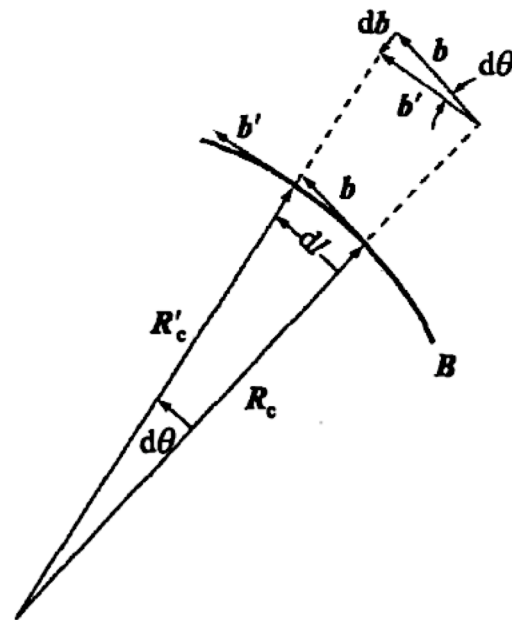
$$\left(\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} \right)_{\perp} - \omega_c \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{b} = -v_{\parallel} \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{b} - v_{\parallel}^2 \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$$

5.2 漂移运动——曲率漂移

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt}\right)_\perp - \omega_c \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{b} = -v_\parallel \mathbf{v}_\perp \cdot \nabla \mathbf{b} - v_\parallel^2 \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$$

- 方程的左边代表回旋运动。右边代表的是两种不均匀性产生的驱动项，两项都是 r_L/a 级小量。包含 v_\parallel 和 v_\perp 的项以回旋频率振荡，平均值为零，只对回旋运动产生小的修正，不引起导心漂移。最后一项具有恒定外力的形式，它表示广义离心力，并导致了曲率漂移。
- 磁场曲率矢量 $\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$ 和曲率半径矢量 \mathbf{R}_c 之间的关系：如图可知， \mathbf{b} 沿弯曲磁场线的变化为：

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{b} &= \mathbf{b}(\mathbf{r}_\perp, l + dl) - \mathbf{b}(\mathbf{r}_\perp, l) = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial l} dl = (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}) dl \\ |d\mathbf{b}| &= d\theta = \frac{dl}{R_c} \end{aligned} \right\}$$



显示 $\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$ 与 \mathbf{R}_c 关系的几何图形（其中 $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}_\perp, l)$, $\mathbf{b}' = \mathbf{b}(\mathbf{r}_\perp, l + dl)$ 。 \mathbf{R}_c 和 \mathbf{R}'_c 的形式与此类似）

5.2 漂移运动——曲率漂移

- 这里用到了沿着磁场的变化等价于取平行梯度 $\partial/\partial l = \mathbf{b} \cdot \nabla$ 这一关系。从几何上和曲率半径矢量的定义上可以看出， R_c 反平行于 $\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$ ，因此 $R_c = -K \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$ 。其中比例因子 K 可以通过 $|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}| = |d\mathbf{b}|/dl = 1/R_c$ 得出：

$$\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b} = -\frac{R_c}{R_c^2}$$

- 将上式代入到式 $\left(\frac{dv_{\perp}}{dt}\right)_{\perp} - \omega_c \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{b} = -v_{\parallel} \mathbf{v}_{\perp} \cdot \nabla \mathbf{b} - v_{\parallel}^2 \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$ 的离心力项，然后，运用式 $\mathbf{V}_F = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2}$ 中的恒定外力与导心漂移之间的关系，可以得到曲率漂移的普适形式为：

$$\mathbf{V}_{\kappa} = \mp \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{R_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B}$$

- 同样，负号用于电子的结果。和 ∇B 漂移类似，曲率漂移对等离子体中电流的产生和相应的自洽磁场有很重要的贡献。

5.2 漂移运动——真空磁场中 $V_{\nabla B}$ 漂移和 V_{κ} 漂移的综合

- 在 $E = 0$ 的稳态聚变等离子体中，非均匀弯曲磁场产生两种导心漂移—— ∇B 漂移和曲率漂移。在等离子体电流较小的特定情形下，磁场变成近似于真空磁场，且 $V_{\nabla B}$ 和 V_{κ} 之间存在简单关系。这里就是要导出这个关系。结果表明，真空磁场的 $V_{\nabla B}$ 和 V_{κ} 方向相同，也就是说，它们产生的电流无法相互抵消。

- 已知矢量恒等式：

$$\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = 2\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + 2\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$$

- 对于真空磁场 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 。用 \mathbf{b} 叉乘上式，经过简单计算可得：

$$\mathbf{B} \times \nabla B = B \mathbf{b} \times [\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla B) + B \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}] = -B \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{R}_c}{R_c^2}$$

5.2 漂移运动——真空磁场中 $V_{\nabla B}$ 漂移和 V_{κ} 漂移的综合

- 用 ∇B 漂移的表达式可以得到 $V_{\nabla B} + V_{\kappa}$ 的简单表达式：

$$V_{\kappa} + V_{\nabla B} = \mp \frac{1}{\omega_c} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B}$$

- 两种漂移在相同的方向上，所以产生的电流不能抵消。这导致了下面的有趣问题：如果导心电流总是增加的，并且 $V_{\nabla B}$ 和 V_{κ} 是仅有的由非均匀弯曲磁场产生的电流驱动型导心漂移，那么 \mathbf{B} 如何能与真空场相符合？答案是，额外的宏观流动，即所谓的“磁化电流”，它的增长正好抵消了 $V_{\nabla B} + V_{\kappa}$ 对于 \mathbf{J} 的贡献。

5.2 漂移运动——极化漂移

- 考察单粒子导心运动理论中随着时间缓慢变化的电场和磁场的影响，特别关注形为 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_x(\mathbf{r}_\perp, t)\mathbf{e}_x + E_y(\mathbf{r}_\perp, t)\mathbf{e}_y$ 的电场和 $\mathbf{B} = B(\mathbf{r}_\perp, t)\mathbf{e}_z$ 的磁场。可以证明，时间变化带来的主要结果是产生了新的导心漂移（即所谓的“极化漂移”）和新的近似运动常量（即所谓“绝热不变量”）。
- 极化漂移是由时变电场中粒子的惯性作用产生的。当 E_\perp 随时间缓慢变化时，粒子的运动随着场的时间变化而变化，然而由于惯性，粒子的运动会稍落后于场的变化。产生的极化漂移在 E_\perp 方向上（注意，不是在 $E_\perp \times B$ 方向），并且由于离子质量较重，因此离子产生的极化漂移比电子的大。
- 绝热不变量可以解释带电粒子的垂直能量是如何随时间缓变磁场而变化的。可以看到，增大的 B 场会导致 v_\perp^2 的相应增加。这里的不变量不是严格的运动常数，而是说它的值在回旋周期平均后保持不变。

5.2 漂移运动——极化漂移

- 极化漂移的分析将分成两部分：
 - 第一部分，假定磁场在空间和时间上都是均匀的（即 $B = \text{常数}$ ），电场只随时间变化，即这个简单模型能够给出极化漂移的主要特性。数学解通过直接迭代过程得到。
 - 第二部分，假定磁场也是时间的函数，根据法拉第定律，时变 B 场将产生空间变化的电场。对此在分析中引入一个特殊的数学时间变换来处理这些效应。由此得到两个结果：首先，在极化漂移的基础上增加了一个微小修正；其次，得到了新的近似运动常量。这个常量就是绝热不变量 μ 。

5.2 漂移运动——极化漂移

- 1. $E = E_x(t)e_x + E_y(t)e_y$ 且 $B = \text{常数}$ 的极化漂移

- A. 数学推导

- 在讨论的场中，粒子的垂直速度的运动方程是：

$$\left. \begin{aligned} dv_x/dt - \omega_c v_y &= \omega_c E_x(t)/B \\ dv_y/dt + \omega_c v_x &= \omega_c E_y(t)/B \end{aligned} \right\}$$

- 对于任意的 E_x 、 E_y ，形式上很容易得到这组方程精确的数学解，但这种形式解的意义却不大，因为其中包含很多复杂的积分。可以通过时间缓变假设来最终得到这个解，在此假设下可以得出积分的近似值。

5.2 漂移运动——极化漂移

- 在时间缓变的假设下，可以通过直接迭代过程得到较精确的近似解。这种过程的基础是引入一个衡量时间缓变程度的小量。具体来说就是，假定对应于电场时间变化的特征频率远小于回旋频率，即 $|\dot{E}_\perp|/|E_\perp| \sim \omega \ll \omega_c$ 。低频假设保证了迭代中每一个新的项比它前面的项小 ω/ω_c 倍。
- 迭代过程的第一步是通过引入一个新的速度变量 v'_\perp 来去掉 $E \times B$ 漂移：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v'_x + E_y(t)/B \\ v_y &= v'_y - E_x(t)/B \end{aligned} \right\}$$

- v'_\perp 的运动方程变成：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv'_x}{dt} - \omega_c v'_y &= -\frac{1}{B} \frac{dE_y}{dt} \\ \frac{dv'_y}{dt} + \omega_c v'_x &= \frac{1}{B} \frac{dE_x}{dt} \end{aligned} \right\}$$

- 此式的右边项比前面的运动方程式子对应的右边项小 ω/ω_c 倍。

5.2 漂移运动——极化漂移

- 迭代的第二步是令上式的右边项为一个新的“不变”（实际上是随时间缓变）的外力。类似于 $E \times B$ 漂移，通过引入新的速度变量 v'_\perp ，能够把这些项从解中清楚地分离出来：

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= v''_x + \frac{1}{\omega_c B} \frac{dE_x}{dt} \\ v'_y &= v''_y + \frac{1}{\omega_c B} \frac{dE_y}{dt} \end{aligned} \right\}$$

- v''_\perp 的方程是：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv''_x}{dt} - \omega_c v''_y &= -\frac{1}{\omega_c B} \frac{d^2 E_x}{dt^2} \approx 0 \\ \frac{dv''_y}{dt} + \omega_c v''_x &= -\frac{1}{\omega_c B} \frac{d^2 E_y}{dt^2} \approx 0 \end{aligned} \right\}$$

- 右边项可以忽略不计，因为它们包含与初始方程右边项一样的电场分量，但却要小 $(\omega/\omega_c)^2$ 倍。原则上，可以继续这种迭代过程到更高阶方程，但由构造过程可以明显看出，每一次新得出的右边项都比前面的迭代项小 ω/ω_c 倍。上式的高阶项忽略不计了，显然我们可以看出 v'_\perp 的解是熟悉的回旋运动。

5.2 漂移运动——极化漂移

- 通过分析，可以看到，在稳恒 B 场上叠加了时间缓变的垂直电场后，粒子的组合轨道能够近似表示为：

$$\mathbf{v}_{\perp}(t) = \mathbf{v}_{\text{gyro}} + \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2} + \mathbf{V}_p$$
$$\mathbf{V}_p = \mp \frac{1}{\omega_c B} \frac{d\mathbf{E}_{\perp}}{dt}$$

- 其中负号对应于电子。
- 解的特性：粒子速度主要由回旋运动加上 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移的瞬时值组成。这正是我们期待的缓变电场中的结果。在电场方向上新增了一项小的漂移速度 \mathbf{V}_p ，这就是极化漂移。电子和离子的漂移方向相反（会在电场方向产生电荷“极化”），由于离子质量大，因此离子的漂移速度也大得多。从幅度大小上看，极化漂移比 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移要小。特别是， $V_p/V_E \sim \omega/\omega_c \ll 1$ 。也许有人会问，既然 \mathbf{V}_p 这么小，为什么还要保留它呢？原因是虽然它很小，但却是 \mathbf{E}_{\perp} 方向上的第一个非零垂直漂移。显然，在这个方向上， $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移是没有贡献的。

5.2 漂移运动——极化漂移

- 就 E_{\perp} 方向的电流来说，极化漂移引起的电流要比指向同样方向的位移电流更重要。极化电流和位移电流的比较：

$$\left. \begin{aligned} J_p &\approx qnV_{pi} = \frac{nm_i}{B^2} \frac{dE_{\perp}}{dt} \\ J_d &= \varepsilon_0 \frac{\partial E_{\perp}}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

- 因此，极化电流和位移电流的比值为：

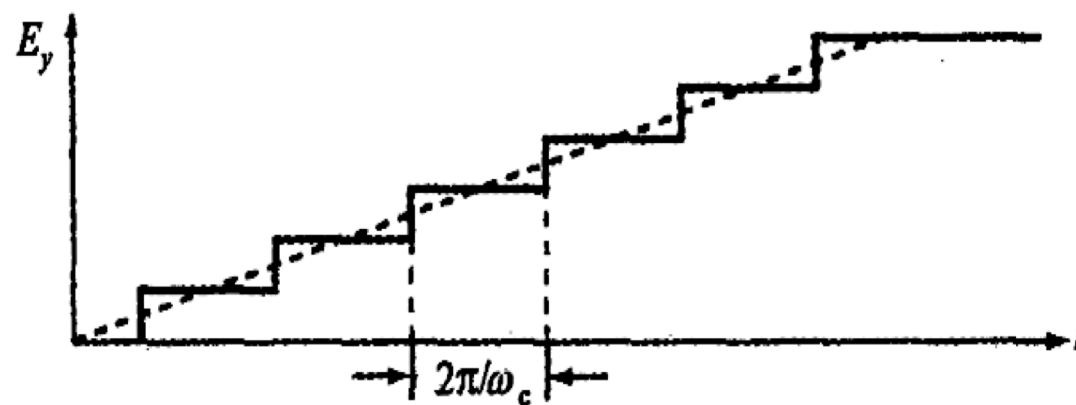
$$\frac{J_p}{J_d} = \frac{c^2}{v_A^2}$$

- 其中 $v_A = (B^2/\mu_0 nm_i)^{1/2}$ 是所谓的阿尔文速度。对于典型的反应堆参数，这个比值约为 $3 \times 10^3 \gg 1$ 。通过以上比较可知，极化电流是主要的。

5.2 漂移运动——极化漂移

■ B. 物理图像

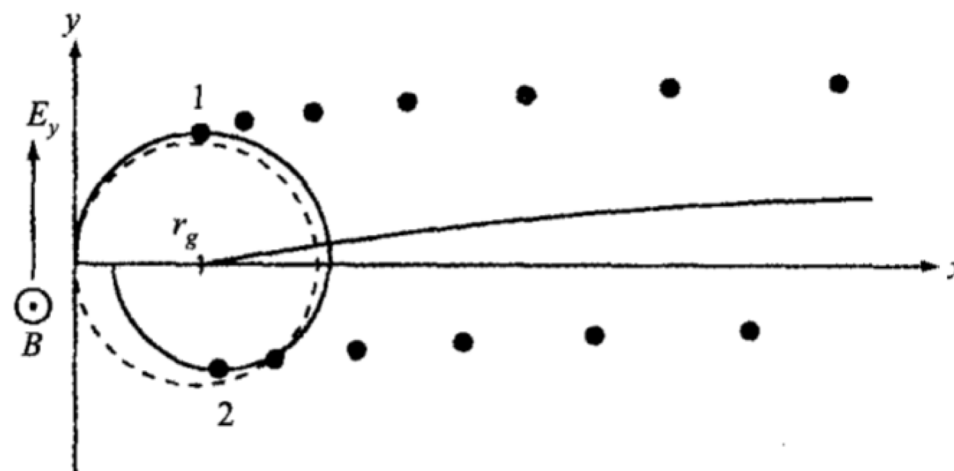
- 极化漂移的物理根源与粒子的惯性有关。为了理解漂移是如何产生的，考虑在稳恒 B 场和随着时间线性变化的 E_y 中的一个带正电粒子的运动，如右图所示。为了简明，电场随着时间的变化近似为一系列逐段增加，每一段的时间间隔对应于一个回旋周期。



虚线：一段时间内线性增加的电场；实线：电场变化的分段函数模型

5.2 漂移运动——极化漂移

- 这种场作用下的定性轨道图像如右图所示。虚线表示没有电场时的圆周回旋轨道，实线表示电场第一阶段的轨道。可以看出，除了向右的导心 $E \times B$ 漂移外，轨道的上下端点（即图中1点和2点）均因平均回旋半径大小的不同而略微上移。轨道半径上的这种差异是粒子的惯性带来的，它使得粒子运动滞后于变化的电场。
- 在电场的第二阶段，由于电场持续增大，上述调整过程将重复出现。导心向右的 $E \times B$ 漂移会稍稍变大。类似地，1点和2点的上移也都变大。图中画出了1点、2点以及导心 r_g 在电场随后各阶段的包络。很明显，当电场随着时间变化时，在 y 方向有导心漂移，这就是极化漂移。当电场稳定后，极化漂移变为零，剩下的就是平稳的 $E \times B$ 漂移。



电场分段模型下粒子轨道的上下端点和导心的轨迹

5.2 漂移运动——极化漂移

- 2. $E_{\perp} = E_x(r_{\perp}, t)e_x + E_y(r_{\perp}, t)e_y$, $B = B(t)e_z$ 时的极化漂移
- 极化漂移的分析将扩展到包括随着时间变化的磁场的影响。同时，还可看到绝热不变量 μ 是一个近似的运动常数。
- 简单而言，忽略 B 在垂直方向上的空间变化，根据法拉第定律，这种磁场会激发一个随着时间和空间都变化的电场，可以通过对时间变量进行数学变换的方法来处理这些效应。

5.2 漂移运动——极化漂移

■ A. 数学分析

- 假定垂直电场的形式是 $\mathbf{E}_\perp = E_y(x, t)\mathbf{e}_y$ ，后面可以很容易推广到 $\mathbf{E}_\perp = E_x(\mathbf{r}_\perp, t)\mathbf{e}_x + E_y(\mathbf{r}_\perp, t)\mathbf{e}_y$ 的情形。将电场在粒子导心处展开，得到起始模型对应的运动方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} - \omega_c v_y &= 0 \\ \frac{dv_y}{dt} + \omega_c v_x &= \frac{\omega_c}{B} \left[E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x_g} (x - x_g) \right] \end{aligned} \right\}$$

- 其中 $\omega_c(t) = qB(t)/m$ ；所有的电场项都是 (x_g, t) 的函数。由于回旋频率与时间有关，因此即便是单纯的回旋运动也很难计算。通过引入新的时间变量 τ 来简化方程， τ 的定义为：

$$\tau = \int_0^t \omega_c(t') dt'$$

- 也就是 $d\tau = \omega_c dt$ 。

5.2 漂移运动——极化漂移

- 通过这种变换，该模型变为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{d\tau} - v_y &= 0 \\ \frac{dv_y}{d\tau} + v_x &= \frac{1}{B} \left[E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x_g} (x - x_g) \right] \\ \frac{dx}{d\tau} &= \frac{v_x}{\omega_c} \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{v_y}{\omega_c} \end{aligned} \right\}$$

5.2 漂移运动——极化漂移

- 通过引入前一节的迭代过程，能够得到方程较精确的近似解，并且在柱坐标系中写出 v_x 和 v_y ：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{\perp}(\tau) \cos[\tau + \varepsilon(\tau)] + \frac{E_y}{B} \\ v_y &= -v_{\perp}(\tau) \sin[\tau + \varepsilon(\tau)] + \frac{d}{d\tau} \left(\frac{E_y}{B} \right) \end{aligned} \right\}$$

- 其中变量 v_x 和 v_y 由新的未知量 $v_{\perp}(\tau)$ 和 $\varepsilon(\tau)$ 代替。这里预设了回旋运动的幅值和相位都是时间的函数，但实际上它们只是随时间缓变的函数。上式的形式已显示对极化漂移的微调，其中包含了 B 场的时间导数。余下的分析主要是求解 $v_{\perp}(\tau)$ ，并由此导出新的近似运动常数。 $\varepsilon(\tau)$ 也能很容易解出。

5.2 漂移运动——极化漂移

- 为了求出 $v_{\perp}(\tau)$ 的解，在将上式带入前式之前，先在速度方程中找到 $x - x_g$ 的表达式。由于这个表达式只出现在小量展开项中，所以需要保留首项回旋运动的贡献。从模型的方程组中的后两个轨道方程可以得出：

$$x - x_g \approx \frac{v_{\perp}(\tau)}{\omega_c(\tau)} \sin[\tau + \varepsilon(\tau)]$$

- 现将以上两式带入模型的方程组中。很容易同时解得 $dv_{\perp}/d\tau$ 和 $d\varepsilon/d\tau$ 。简单计算即可得出待求的方程：

$$\frac{dv_{\perp}}{d\tau} + \frac{v_{\perp}}{2\omega_c B} \left[\frac{\partial E_y}{\partial x_g} + \frac{\partial E_y}{\partial x_g} \cos 2(\tau + \varepsilon) \right] = \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{E_y}{B} \right) \sin(\tau + \varepsilon) \approx 0$$

- 方程右边项是高阶迭代修正项，可以忽略不计。

5.2 漂移运动——极化漂移

- 下一步是用法拉第定律代换 $\partial E_y / \partial x_g = -dB/dt = -\omega_c dB/d\tau$ 来简化上式，得到：

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\tau} = \frac{1}{B} \frac{dB}{d\tau} \cos 2(\tau + \varepsilon)$$

- 其中，

$$\mu \equiv mv_{\perp}^2 / 2B$$

- 即所谓磁矩。将上式在一个回旋周期 ($\tau_0 \leq \tau + \varepsilon \leq \tau_0 + 2\pi$) 内积分，可以发现右边项平均后除了小得可以忽略的 $(\omega/\omega_c)^2$ 阶修正外几乎为零。所以，在高精度水平下，可以得到 $\langle d \ln \mu / d\tau \rangle = 0$ 。这说明在一个回旋周期内平均后， μ 是一个运动常数，即：

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2(t)}{2B(t)} = \text{常数}$$

5.2 漂移运动——极化漂移

■ B. μ 的意义

- μ 是绝热不变量，其大小等于带电粒子的回旋周期平均磁矩。这一点可以从磁矩的通常定义 $\mu = IA$ 看出，其中， I 是闭合回路中的电流， A 是回路所围成的面积。对于磁场中旋转的粒子来说，一个回旋周期的平均电流是 $I = q/\tau_c = q\omega_c/2\pi$ ，而面积是 $A = \pi r_L^2 = \pi(mv_\perp/qB)^2$ 。由此得出 $IA = mv_\perp^2/2B$ ，所以 μ 确实是磁矩。
- μ 在一个回旋周期上平均后是一常数的事实可说明如下。粒子回旋轨道所围成的磁通量是 $\Psi = \pi r_L^2 B = (2\pi m/q^2)\mu \sim \mu$ 。所以，当磁场 B 随时间缓变时，垂直方向的速度和相应的回旋半径都以这样一种方式随着时间缓慢变化，即使得环绕轨道的通量是一个常数。

5.2 漂移运动——极化漂移

■ C. 结果总结

- 在时变电场和磁场中运动的带电粒子会附加一项导心漂移，即所谓极化漂移。对于 $\mathbf{B} = B(t)\mathbf{e}_z$ 和 $\mathbf{E}_\perp = E_x(\mathbf{r}_\perp, t)\mathbf{e}_x + E_y(\mathbf{r}_\perp, t)\mathbf{e}_y$ 的一般情形，漂移能够写成（负号用于电子）：

$$\mathbf{V}_p = \mp \frac{1}{\omega_c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{E}_\perp}{B} \right)$$

- 第二个新结果是确认了一个近似运动常数，即所谓的绝热不变量。它只是一个“近似”常量，因为它是在磁场缓变情形下在一个回旋周期上平均得到的。这个绝热不变量写成：

$$\mu = \frac{mv_\perp^2(t)}{2B(t)} = \text{常数}$$

5.2 漂移运动——极化漂移

- 在聚变应用方面，极化漂移在确定等离子体宏观不稳定性的时间尺度方面起着非常重要的作用。正如描述宏观平衡和稳定性所表明的，极化漂移所对应的时间尺度和实验时间相比是非常快的。如果给定的磁场位形是不稳定的，那么等离子体会由于这一很短的时间尺度而很快撞到壁上，从而损失掉。由此得出结论：对于聚变来讲，磁场位形的设计必须避免这种不稳定性。
- 绝热不变量在两个方面起着重要作用。首先，它是磁约束位形“磁镜装置”的基础。其次，磁矩是很多环形磁场几何下导致横越磁场的能量和粒子的碰撞输运大大增强的重要原因。这种行为要用“新经典输运理论”来解释。尽管这两种应用都依赖于绝热不变量，但 μ 作为磁场空间缓变下的绝热不变量要比它作为时间缓变下的不变量更为重要。

主要内容

- 5.0 引言
- 5.1 导心
- 5.2 漂移运动
- 5.3 香蕉轨道

5.3 香蕉轨道

- 什么是捕获粒子？在什么位形下会出现“香蕉轨道”？
- 回答：存在俘获粒子是因为托卡马克的 $B \approx B_\phi \approx B_0(R_0/R)$ ，因此环外侧的磁场弱，内侧的强，初始时比值 v_{\parallel}/v_{\perp} 小的环外侧的粒子在沿磁场线转动到环内侧强场区时将因磁镜效应折返回来。故谓这类粒子在环外侧被“俘获”。
- 俘获粒子的输运损失大有几个原因。一个主要原因是它们的平行速度小。俘获粒子完成其磁镜运动一个完整周期所需的时间比典型通行粒子走完一个极向截面路径要长。由于俘获粒子的磁镜周期更长，因此需要更长的时间使得离子在 ∇B 漂移和曲率漂移力的驱动下漂离磁面，这样就加大了步长。
- 对俘获粒子输运的分析类似于通行粒子情形，只是在随机行走模型上必须做三个修正。第一，在大环径比极限情形下，仅有一小部分等离子体粒子被俘获，需要知道这一比例；第二，必须在考虑俘获粒子的 v_{\parallel}/v_{\perp} 典型比值后重新计算其径向步长；第三，俘获粒子只能以较小的角度（远小于 90° ）散射才能挪“一步”。

5.3 香蕉轨道

■ 1. 俘获粒子比例

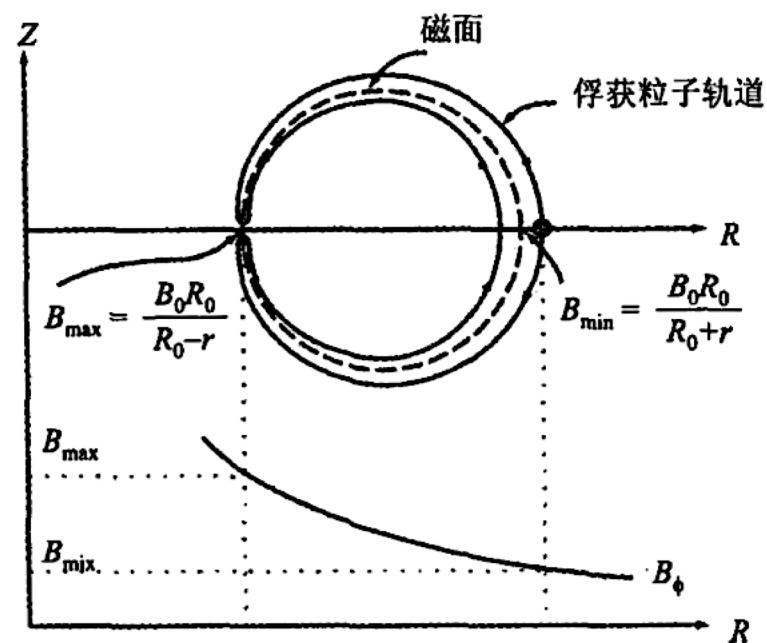
- 考虑右图，很容易算出俘获粒子的比例。图中最小（环外侧）和最大（环内侧）磁场分别为：

$$\left. \begin{aligned} B_{min} &= B_0 \frac{R_0}{R_0 + r} \\ B_{max} &= B_0 \frac{R_0}{R_0 - r} \end{aligned} \right\}$$

- 现在考虑具有速度 $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\perp}$ 的环外侧粒子 ($\theta = 0$) 的偏离。由能量守恒和磁矩守恒，粒子被俘获的条件可以写成：

$$\frac{v_{\parallel}^2}{v^2} < 1 - \frac{B_{min}}{B_{max}} = 1 - \frac{R_0 - r}{R_0 + r} \approx 2 \frac{r}{R_0}$$

- 其中 $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$ ，最后这步等式缘于大环径比假设 $r/R_0 \ll 1$ 。



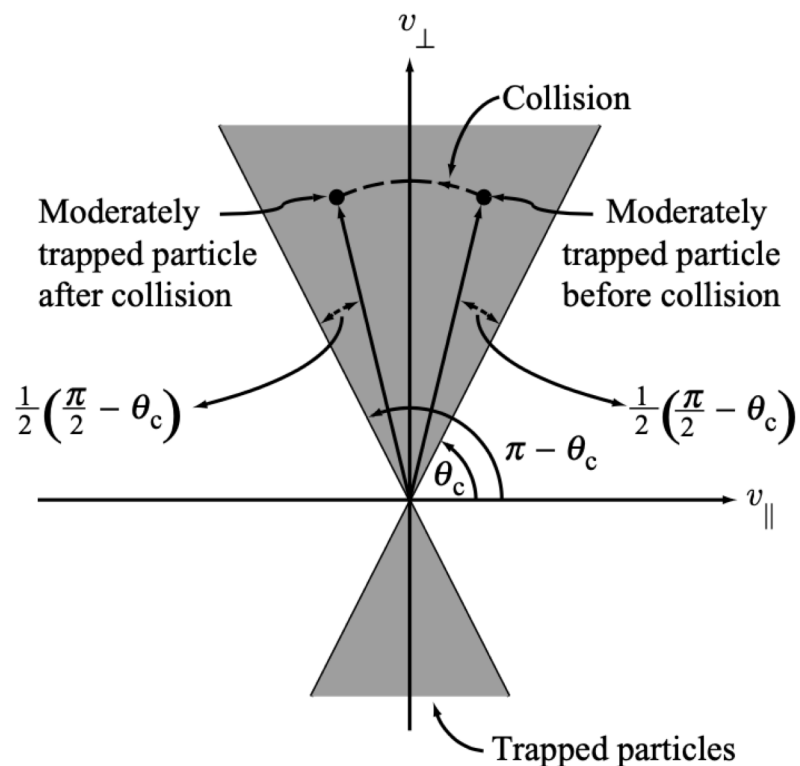
俘获粒子轨道以及最大和最小磁场位置关系 $B \approx B_{\phi} \approx B_0(R_0/R)$

5.3 香蕉轨道

- 右图显示了速度空间下俘获粒子与非俘获粒子之间的边界。注意到临界角 θ_c 定义为 $\cos\theta_c = v_{\parallel}/v \approx (2r/R_0)^{1/2}$ ，因此对分布函数的俘获部分进行积分即可求得俘获粒子的所占比例 f 。对于麦克斯韦分布函数 $F_M(v)$ 有：

$$f = \frac{1}{n} \int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} F_M(v) v^2 dv = \cos\theta_c$$
$$\approx \left(\frac{2r}{R_0}\right)^{1/2}$$

- 倒环径比 $\varepsilon = a/R_0$ 可知，此式意味着 $f \sim \varepsilon^{1/2}$ 。即在大环径比极限下，只有很小一部分粒子被俘获，虽然实际情形 f 很容易超过1/2。即便如此，维持 $\varepsilon \ll 1$ 展开对理解物理是非常有用的。

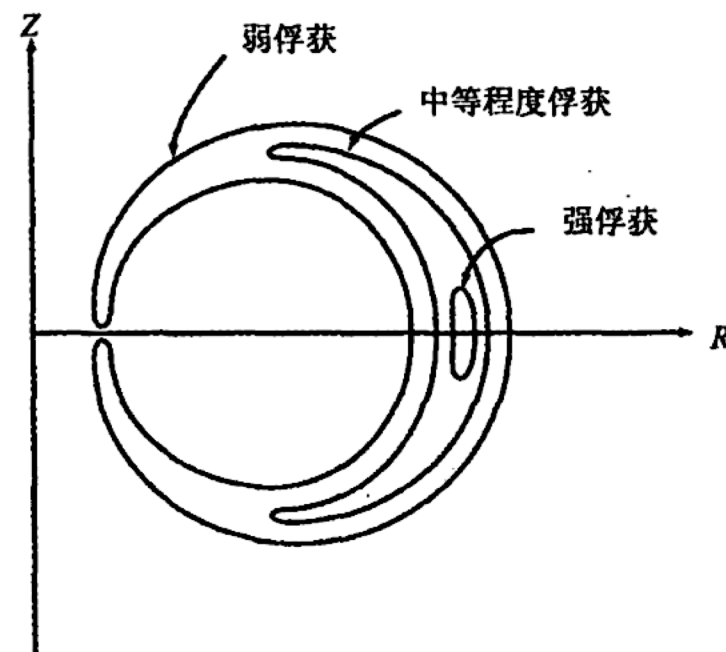


速度空间下显示的俘获-非俘获之间的边界，一定数量的俘获粒子经碰撞后其 v_{\parallel} 反号

5.3 香蕉轨道

■ 2. 回弹频率

- 粒子漂离磁面的距离正比于其导心走过一个完整的磁镜俘获周期所需的时间，可通过考察右图计算获得。图中显示了强俘获粒子、中等程度俘获粒子和弱俘获粒子三种轨道。平均来看，俘获粒子的行为近似等于中等程度俘获粒子的，主要考察对象。
- 由于导心轨道的形状类似于香蕉，因此文献中几乎总是将俘获粒子轨道称为“香蕉”轨道。俘获周期则称为“回弹”周期。



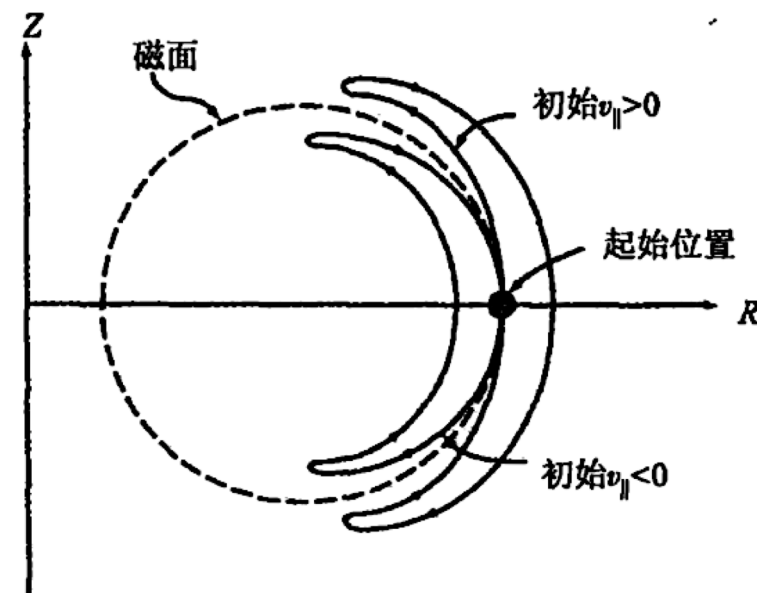
强俘获粒子、中等程度俘获粒子和弱俘获粒子等所对应的三种香蕉轨道 77

5.3 香蕉轨道

- 与通行粒子情形类似，俘获粒子总是在半个回弹周期里单调地漂离磁面，在另外半个周期漂回来。右图展示了具有大小相等方向相反的初速度 v_{\parallel} 的两个粒子的香蕉轨道。可以看出，对于 $v_{\parallel} > 0$ 情形，香蕉轨道向外漂移，而对于 $v_{\parallel} < 0$ 情形则相反。
- 半回弹周期即为中等程度俘获粒子沿极向走过相当于磁面半圆周 $l_p = \pi r$ 距离所花的时间。而俘获粒子实际沿磁场线走过的距离为 $l \approx (B_0/B_{\theta})l_p$ ，因此，半回弹周期为：

$$\tau_{1/2} \approx \frac{l}{v_{\parallel}} \approx \frac{2l}{v_{\parallel}} \approx \frac{2\pi R_0 q}{v_{\parallel}}$$

- 这里 $v_{\parallel} \approx v_{\parallel}/2$ 是粒子做回弹运动的平均平行速度，而 v_{\parallel} 是 $\theta = 0$ 处的外缘平行速度。



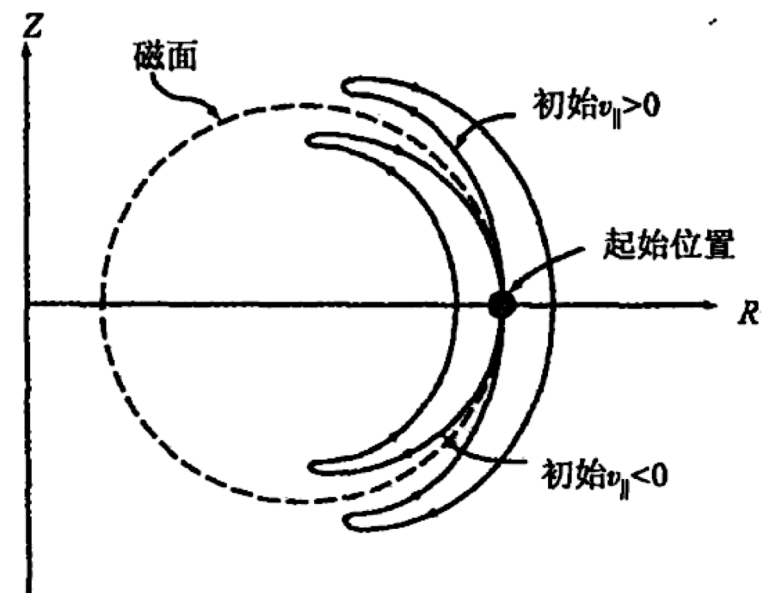
从同一位置出发、具有大小相等方向相反初速度 v_{\parallel} 的两个粒子的香蕉轨道（可以看出， $v_{\parallel} > 0$ 粒子的香蕉轨道向外漂移，而 $v_{\parallel} < 0$ 粒子的香蕉轨道则向内漂移）

5.3 香蕉轨道

- 整个周期的回弹频率定义为 $\omega_B = \pi/\tau_{1/2}$ ，因此有：

$$\omega_B = \frac{v_{\parallel}}{2R_0 q}$$

- 这个量就是计算步长所需的量。



从同一位置出发、具有大小相等方向相反初速度 v_{\parallel} 的两个粒子的香蕉轨道（可以看出， $v_{\parallel} > 0$ 粒子的香蕉轨道向外漂移，而 $v_{\parallel} < 0$ 粒子的香蕉轨道则向内漂移）

5.3 香蕉轨道

■ 3. 步长

- 步长 Δr 定义为具有相同大小但方向相反的 v_{\parallel} 的两个俘获粒子的香蕉轨道中心之间的距离。它的计算基本与通行粒子的情形相同。考虑从 $\theta = \theta_0$, $r = r_0$ 位置出发的一个粒子, 对于中等俘获粒子, $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ 。导心漂移速度的径向分量可以表示为:

$$v_{Dr}(t) \approx |v_{Dr}| \sin(\omega_B t + \theta_0)$$

- 如果考虑到对于俘获粒子有 $v_{\parallel} \ll v_{\perp} \approx v$, 则 $|v_{Dr}|$ 主要由 ∇B 漂移确定, 即

$$|v_{Dr}| = \frac{m_i}{e} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \left| \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} \right| \approx \frac{v^2}{2\omega_{ci} R_0}$$

- 导心相应的径向位置同样可由积分 $\dot{r} = v_{Dr}$ 得到:

$$r(t) \approx r_0 - \frac{|v_{Dr}|}{\omega_B} [\cos(\omega_B t + \theta_0) - \cos(\theta_0)]$$

5.3 香蕉轨道

- 对于 $v_{\parallel} > 0$ 的粒子，香蕉轨道中心的半径 r_B^+ 由下式给出：

$$r_B^+ = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min}) = r_0 + \frac{|v_{Dr}|}{\omega_B} \cos\theta_0$$

- 假定碰撞发生在 $r = r_0$ ， $\theta = \theta_0$ 位置，在此 v_{\parallel} 变号。碰撞后粒子以 $v_{\parallel} \rightarrow -v_{\parallel}$ （等价于 $\omega_B \rightarrow -\omega_B$ ）速度开始新的香蕉轨道。新香蕉轨道的半径 r_B^- 为：

$$r_B^- = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min}) = r_0 - \frac{|v_{Dr}|}{\omega_B} \cos\theta_0$$

- 很容易计算出如下定义의步长：

$$\Delta r = r_B^+ - r_B^- = 2 \frac{|v_{Dr}|}{\omega_B} \cos\theta_0$$

5.3 香蕉轨道

- 随机行走模型所需的方均值为：

$$(\Delta l)^2 = \langle (\Delta r)^2 \rangle = 4 \frac{|v_{Dr}|^2}{\omega_B^2} \langle \cos^2 \theta_0 \rangle = 2 \frac{q^2 v^4}{\omega_{ci}^2 v_{\parallel}^2}$$

- 对速度的平均是：总的粒子能量为 $v^2 \sim 3T/m = (3/2)v_{Ti}^2$ ，而中等俘获粒子的平行能量为 $v_{\parallel}^2 \approx (r/R_0)v^2 \sim (r/R_0) \cdot (3v_T^2/2)$ 。将这些近似式代入上式：

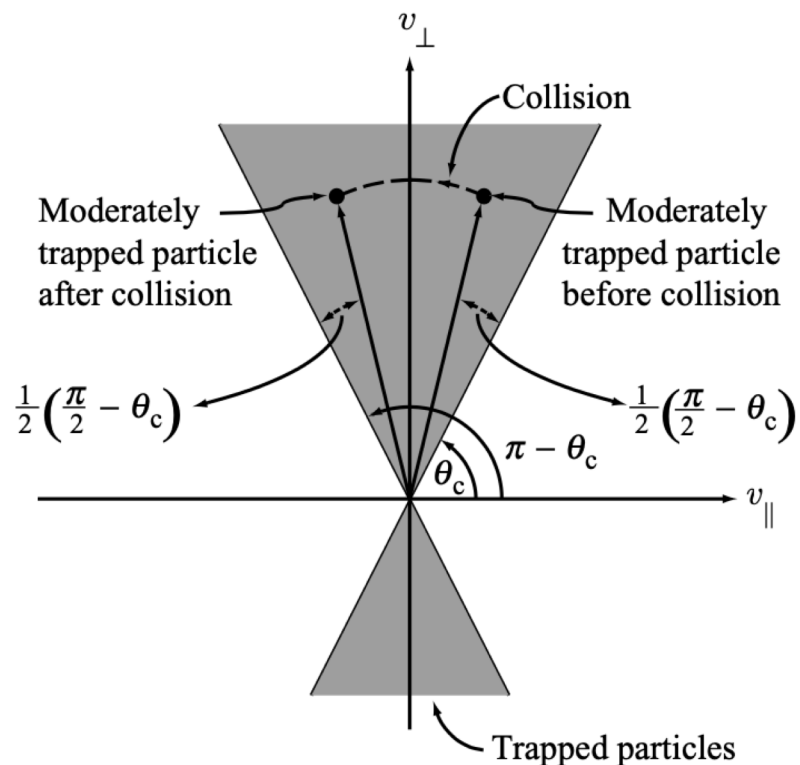
$$(\Delta l)^2 \approx 3 \left(q^2 \frac{R_0}{r} \right) \frac{v_{Ti}^2}{\omega_{ci}^2} \sim \left(q^2 \frac{R_0}{r} \right) r_{Li}^2$$

可以看到，俘获粒子的平均步长正比于 $(q^2 r_{Li}^2 / \varepsilon)^{1/2}$ ，因此平均步长的平方要比通行粒子大 $1/\varepsilon$ 倍，比经典输运大 $50 \sim 100$ 倍。

5.3 香蕉轨道

■ 4. 有效碰撞频率

- 随机行走模型所需的最后一个量是两次碰撞之间的平均间隔。对俘获粒子，这个时间间隔远小于积累到 90° 偏转的弹性碰撞时间。原因是俘获粒子的特点是 v_{\parallel} 小，因此这种粒子只需散射很小的角即变成通行粒子。
- 具体来看，我们不妨回到右图，注意到中等俘获粒子的初始倾角 $\theta_i \approx \theta_c + (1/2)(\pi/2 - \theta_c) = \pi/4 + \theta_c/2$ 。产生平均平方步长 $\langle(\Delta r)^2\rangle$ 的库仑碰撞要求 v_{\parallel} 变号。因此，经过典型的散射碰撞，粒子的出射倾角为 $\theta_f = \pi - \theta_c - (1/2)(\pi/2 - \theta_c) = 3\pi/4 - \theta_c/2$ 。倾角的变化为 $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \pi/2 - \theta_c$ 。



速度空间下显示的俘获-非俘获之间的边界，一定数量的俘获粒子经碰撞后其 v_{\parallel} 反号

5.3 香蕉轨道

- 碰撞之间的平均时间间隔称为“有效碰撞时间”，它由众多小角度碰撞积累起来的速度空间里的角扩散确定。这种过程的扩散性质意味着 $\theta - \theta_i$ 方均值可以写成：

$$\langle (\theta - \theta_i)^2 \rangle = D_\theta t$$

- 这里 D_θ 由积累到 90° 的碰撞时间 τ_{90} 确定，此时设 $\theta - \theta_i = \pi/2$ ， $t = \tau_{90}$ 。这里 τ_{90} 是等于 $\bar{\tau}_{ei}$ ，还是等于 $\bar{\tau}_{ii}$ 或 $\bar{\tau}_{ee}$ 取决于所考虑的碰撞性质。简单计算给出 $D_\theta = \pi^2/(4\tau_{90})$ ，且

$$\langle (\theta - \theta_i)^2 \rangle = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{t}{\tau_{90}} \right)$$

- 设 $t = \tau_{\text{eff}}$ ， $\theta = \theta_f$ ，即可求得有效碰撞时间：

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{r}{R_0} \tau_{90} \right) \sim \varepsilon \tau_{90}$$

- 采用了近似 $\theta_c \approx \pi/2 - (2r/R_0)^{1/2}$ 。有效碰撞时间要比完全的 90° 碰撞时间小 ε 倍。

5.3 香蕉轨道

■ 5. 俘获粒子新经典输运系数

- 随机行走模型下俘获粒子新经典输运系数：扩散系数等于 $(\Delta l)^2$ 与 τ_{eff} 的比再乘以俘获粒子比例 f （因为只有这部分粒子与输运有关）。数学上它等价于：

$$D = f \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{\tau_{\text{eff}}}$$

- 先考虑粒子扩散。俘获粒子的双极性仍然保留，这意味着粒子扩散是由电子-离子碰撞引起的。由此得到下述粒子扩散系数：

$$D_{\text{n}}^{(\text{NC})} = 5.2 q^2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^{3/2} \left(\frac{2 m_e T_e}{e^2 B_0^2 \bar{\tau}_e} \right) = 5.2 q^2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^{3/2} D_{\text{n}}^{(\text{CL})}$$

5.3 香蕉轨道

- 由Rosenbluth、Hazeltine和Hinton发展起来的优美、自洽的关于新经典输运的动理学理论给出同样的 $D_n^{(\text{NC})}$ 定标关系，只是修正了数值系数：

$$D_n^{(\text{NC})} = 2.2q^2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^{3/2} D_n^{(\text{CL})}$$

- 可以看到，对于 $q = 3$ ， $R_0 = 5$ 和 $r \approx a/2 = 1$ ，俘获粒子的新经典输运要比经典输运大220倍。

5.3 香蕉轨道

- 类似的分析对热扩散系数也成立，它们也是由同类粒子碰撞引起的，只是每种扩散系数前要乘以因子 $q^2(R_0/r)^{3/2}$ 。Rosenbluth、Hazeltine和Hinton给出的修正了的数值系数为：

$$\left. \begin{aligned} \chi_e^{(\text{NC})} &= 0.89 q^2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^{3/2} & \chi_e^{(\text{CL})} &= 4.3 \times 10^{-3} q^2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^{3/2} \left(\frac{n_{20}}{B_0^2 T_k^{1/2}} \right) (\text{m}^2/\text{s}) \\ \chi_i^{(\text{NC})} &= 0.68 q^2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^{3/2} & \chi_i^{(\text{CL})} &= 0.068 q^2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^{3/2} \left(\frac{n_{20}}{B_0^2 T_k^{1/2}} \right) (\text{m}^2/\text{s}) \end{aligned} \right\}$$

- 卡哇伊看到，对于前述的参数取值情形，新经典离子扩散系数是经典值的68倍。在绝对单位制下，对于简单反应堆设计参数， $\chi_i \approx 0.12 \text{m}^2/\text{s}$ 。⁸⁷

5.3 香蕉轨道

- 俘获粒子新经典输运理论中要考虑的最后一点是有效区域。随机行走模型的基本假设是，俘获粒子在遭遇碰撞前有足够长的时间来完成一个回弹周期。因此“香蕉”区输运有效的条件是 $\nu_{\text{eff}} \ll \omega_B$ ($\nu_{\text{eff}} = \tau_{\text{eff}}^{-1}$)，它与粒子的质量无关，可以写成：

$$\nu_* \equiv \frac{\nu_{\text{eff}}}{\omega_B} \sim \left(\frac{R_0}{r}\right)^{3/2} \left(\frac{qR_0}{v_T \tau_{90}}\right) \sim 0.01 \left(\frac{R_0}{r}\right)^{3/2} \left(\frac{qR_0 n_{20}}{T_k^2}\right) \ll 1$$

- 对于反应堆， $\nu_* \approx 0.01$ ，显然满足低碰撞频率条件。

5.3 香蕉轨道

- 新经典输运理论与托卡马克实验结果的比较：离子热扩散系数略小于典型的实验观察值，后者大约在 $\chi_i \sim 1\text{m}^2/\text{s}$ 量级。但在实验中发现存在着湍流较弱的运行模式，部分等离子体区观测到的离子热扩散系数仍接近于新经典值。然而对于大多数高参数运行情形， χ_i 的值仍是反常的，这是因为等离子体中存在微观不稳定性。离子热传导代表着最快的能量损失途径，它大于电子热传导和粒子扩散带来的损失。但实验测得的 χ_e 和 D_n 只比 χ_i 小一点点，约为后者的三分之一，而不是像理论预期的那样只是后者的 $(m_e/m_i)^{1/2}$ 倍。因此，由于微湍流的缘故，电子热传导和粒子扩散是非常反常的。
- 由此得出结论：新经典理论对于评估能量输运的下限是一个有用的参考，但对于实际托卡马克运行来说则显得过于乐观了。



谢谢！