
第三章 聚变功率的产生



主要内容

- 3.0 引言
- 3.1 截面、平均自由程和碰撞频率的概念
- 3.2 反应速率
- 3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度
- 3.4 辐射损失

主要内容

- **3.0 引言**
- **3.1 截面、平均自由程和碰撞频率的概念**
- **3.2 反应速率**
- **3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度**
- **3.4 辐射损失**

3.0 引言

- 每次核聚变反应发生都会释放大量的动能，如何将这种能量可以转化为人类社会可以利用的能源？故聚变能和平利用的吸引力有多大最终还是取决于能否设计出实用的、经济性好的反应堆，它应有良好的功率平衡， $P_{\text{out}} \gg P_{\text{in}}$ 。
- 两种性质不同的聚变概念：磁约束聚变和惯性约束聚变。
- 磁约束聚变堆的设计需要从磁约束聚变系统下的宏观功率平衡开始，这是聚变系统中最重要的部分。
- 功率平衡问题的分析涉及到很多与能量来源和消耗有关的物理现象。有些可能熟悉，如热传导、对流和压缩等；有些可能不是很熟悉，如对库仑相互作用引起的带电粒子的库仑辐射损失等。
- 故先讨论聚变功率的产生和辐射损失问题，它是讨论功率平衡的基础。

3.0 引言

- 计算聚变功率的步骤：
 - 先考察一些微观量：截面、平均自由程和碰撞频率。这些量可以有效地确定了给定的D-T混合燃料触发聚变反应的概率。
 - 然后通过反应速率的概念从微观过渡到宏观。这对计算反应堆宏观体积的 D-T燃料产生的总功率来说是必需的。
 - 接下来计算辐射造成的功率损失。主要的损失为韧致辐射损失，是由带电粒子间的库仑相互作用引起的，这里采用半定量的定标关系。考察并推导获得韧致辐射损失与带有半定量精确定标系数的密度和温度之间的定标关系。
- 有关聚变功率的产生和辐射损失的知识对于确定磁约束聚变堆的总体功率平衡至关重要。

主要内容

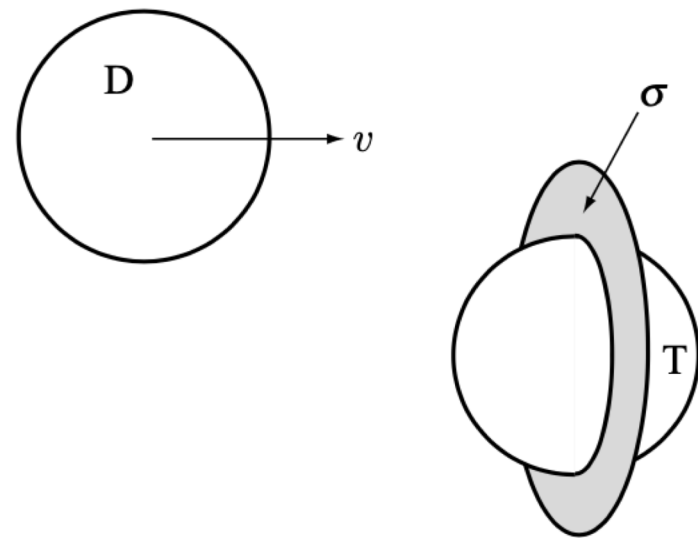
- 3.0 引言
- 3.1 截面、平均自由程和碰撞频率的概念
- 3.2 反应速率
- 3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度
- 3.4 辐射损失

3.1 截面、平均自由程和碰撞频率概念

- 计算D-T聚变反应产能的第一步是考察原子核碰撞的基本微观物理过程。微观概念包括截面、平均自由程和碰撞频率。

■ 1. 截面

- 截面用来定量描述了一对氘氚原子核发生聚变反应的概率：
 - 如图，采用“硬球”模型，将氚核当做靶粒子，将氘核看作入射粒子，即假设氚核静止，氘核以速度 v 向它运动。
 - 靶粒子被球对称的力场包围，与入射粒子运动方向垂直的环形阴影部分就是截面 σ 。
 - 如果入射粒子穿过 σ 区域，那么靶粒子施加在它上面的力将足够强，从而发生核反应，这时的相互作用可以被称为“碰撞”。反之，则不会发生碰撞。



“硬球”碰撞的截面区域 σ

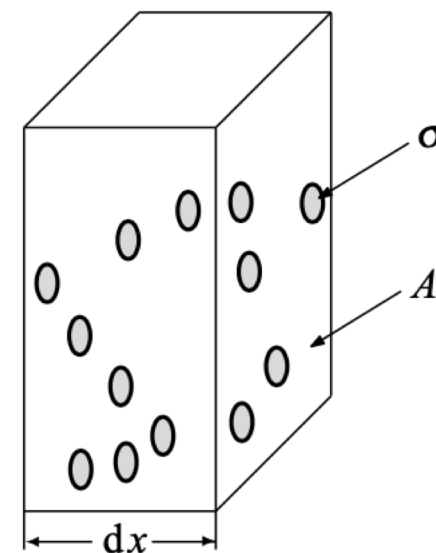
3.1 截面、平均自由程和碰撞频率概念

- 截面的概念很简单，但要确定 σ 的大小、 σ 与 v 的函数关系以及它的几何形状有一定的困难，这取决于粒子间相互作用力的本质。
- 支配聚变反应的短程核力决定了截面大小应在原子核直径的量级，在这之外穿过的入射粒子受到的相互作用极弱，不足以产生聚变。上图给出的发生“碰撞”的清晰界限符合原子核碰撞的合理近似。
- 截面通常是指“硬球”截面，实际的截面远比这复杂，一般来说需要通过实验来确定。目前假设 σ 是一种与 v 和几何形状无关的、可用硬球碰撞来表征的已知常量已足够用了。后面将把这些假设去掉，更接近实际情况。

3.1 截面、平均自由程和碰撞频率概念

■ 2. 平均自由程

- σ 的值与发生聚变碰撞的概率相关。大 σ 意味着靶粒子大，触发碰撞相对容易，抑或概率相对较高；小 σ 则表示靶粒子小，较难发生碰撞，概率较低。
- 截面 σ 与碰撞概率之间是通过“平均自由程”联系起来的。
- “平均自由程”概念：
 - 如右图，考虑一定体积的靶粒子，体积宽度为 dx ，宏观截面面积为 A ，故体积 $V = Adx$ 。假设靶粒子的数密度由 n_1 表示，则体积内总粒子数为 $N_1 = n_1 V = n_1 Adx$ 。



靶粒子的体积（每个靶粒子占据截面积为 σ 的区域）⁹

3.1 截面、平均自由程和碰撞频率概念

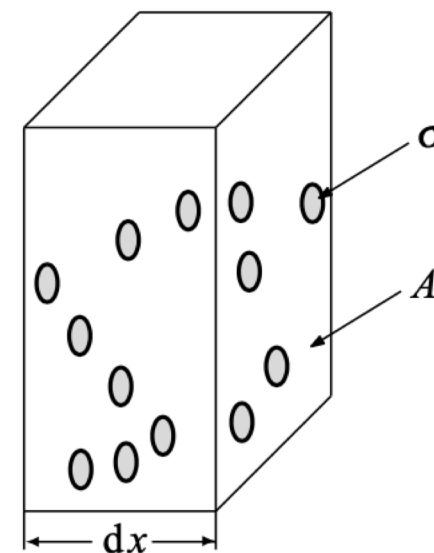
- “平均自由程”概念：
 - 每个靶粒子占据的面积为 σ ，即在 σ 内入射粒子将发生碰撞。假设靶密度足够低，截面足够小，从入射粒子的角度来说，这些截面 σ 不重叠，对于像聚变等离子体来说是一个很好的近似，即原子核有效体积只占据很小的部分。在此近似下，靶粒子占据总面积的比例 dF 为：

$$dF = \frac{\sigma N_1}{A} = \frac{\sigma n_1 A dx}{A} = \sigma n_1 dx$$

- dF 为一个入射粒子穿越 dx 距离过程中发生核碰撞的概率：

$$\frac{dF}{dx} = \sigma n_1$$

- 是单位长度上发生核碰撞的概率。

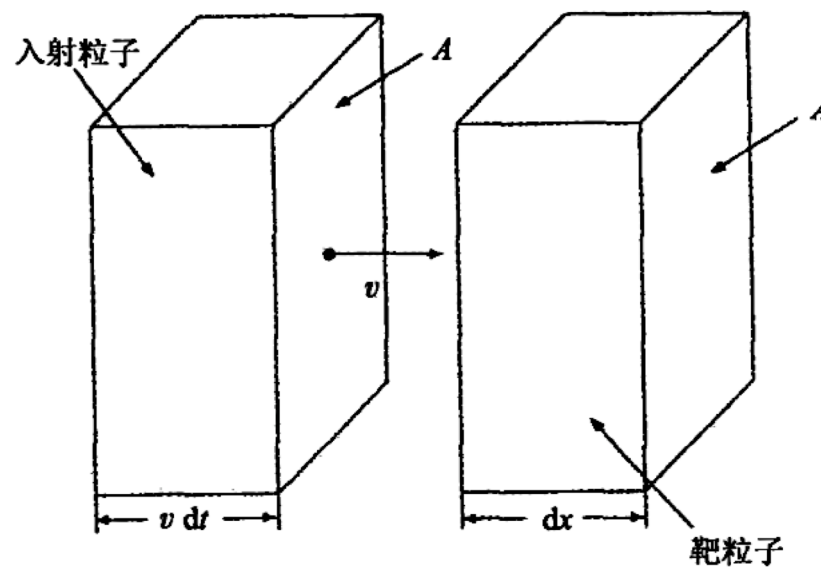


靶粒子的体积（每个靶粒子占据截面积为 σ 的区域）¹⁰

3.1 截面、平均自由程和碰撞频率概念

- “平均自由程”概念：
- 有了碰撞概率，即可计算所谓平均自由程 λ_m 。
- 假设入射粒子不止一个，其数密度为 n_2 ，全都以速度 v 接近靶，如图。入射粒子通量 Γ 定义为单位时间内、单位面积上穿过区域 A 的总粒子数：

$$\Gamma = \frac{N_2}{A dt} = \frac{n_2 A v dt}{A dt} = n_2 v$$



以速度为 v 撞击一定体积静止
靶粒子的入射粒子通量

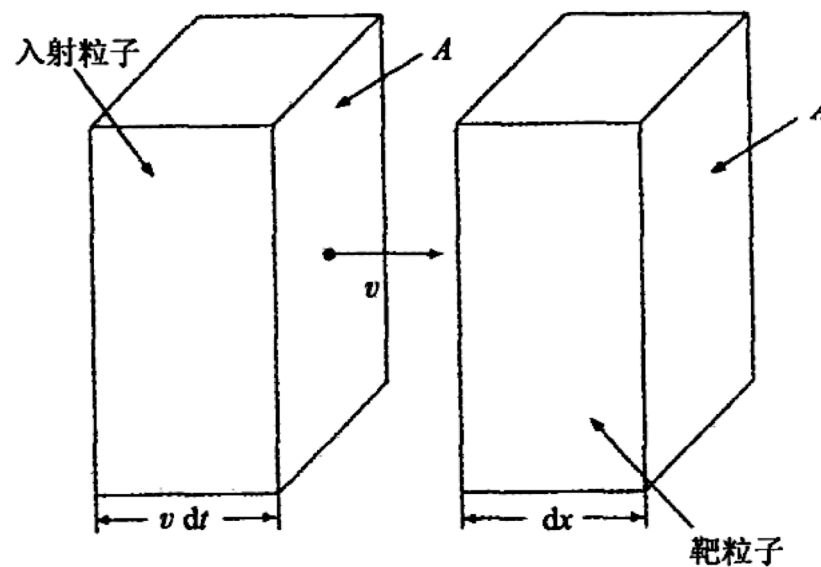
3.1 截面、平均自由程和碰撞频率概念

- “平均自由程”概念：
 - 假设 $d\gamma$ 为入射通量中粒子移动 $dx = vdt$ 距离过程中发生核碰撞的那部分通量，则有

$$d\gamma = dF\Gamma = \sigma n_1 \Gamma dx$$

- 相应地，量 $-d\gamma$ 等于入射粒子总通量里经过 dx 距离后没有发生一次碰撞的粒子通量的减少，即 $-d\gamma = \Gamma(x + dx) - \Gamma(x) = d\Gamma$ 。因此，未发生碰撞的通量变化可以写成：

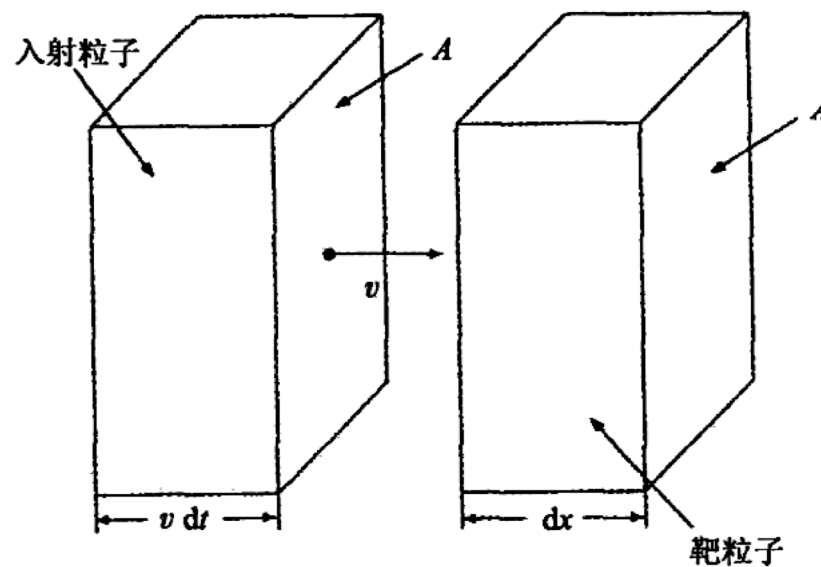
$$d\Gamma = -\sigma n_1 \Gamma dx$$



以速度为 v 撞击一定体积静止
靶粒子的入射粒子通量

3.1 截面、平均自由程和碰撞频率概念

- “平均自由程”概念：
 - 这个常微分方程描述了入射通量的空间演化。假设 σ 和 n_1 近似为常量，那么积分会得到：
$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-x/\lambda_m}$$
 - 其中 $\lambda_m = 1/n_1\sigma$ 被称为平均自由程。
 - 平均自由程概念可以用两种方式来理解：
 - 首先，给出了入射通量未发生碰撞的特征指数衰减长度；
 - 其次，给出了入射粒子在发生碰撞前行进的平均距离。注意， λ_m 与 $n_1\sigma$ 二者成反比。意即高的靶粒子密度和/或大的截面就意味着入射粒子无需行进太远就能够发生碰撞。



以速度为 v 撞击一定体积静止
靶粒子的入射粒子通量

3.1 截面、平均自由程和碰撞频率概念

■ 3. 碰撞频率

- 定义：碰撞频率 ν_m 和它的倒数 τ_m ——平均碰撞时间，通常简称为碰撞时间。
- 典型入射粒子在发生碰撞前行进距离为 λ_m 。如果粒子以速度 v 运动，则碰撞前的相应时间为：

$$\tau_m = \frac{\lambda_m}{v} = \frac{1}{n_1 \sigma v}$$

- 碰撞频率定义为碰撞时间的倒数：

$$\nu_m = \frac{1}{\tau_m} = n_1 \sigma v$$

3.1 截面、平均自由程和碰撞频率概念

- 强调一下，这里的碰撞频率 ν_m 在物理上是平均每秒有 ν_m 个粒子发生核碰撞。对于核相互作用而言，一个入射粒子只能经历一次碰撞，之后该粒子将不再以原来的形式存在。
- 同时还存在许多其它种类的碰撞，特别是带电粒子之间的库仑碰撞。同一粒子可以不断碰撞，但自身的特征并不改变。对于这些多次相互作用， ν_m 并不改变，仍被视为单个粒子每秒发生的平均碰撞数。
- 截面、平均自由程、碰撞时间和碰撞频率的概念在等离子体物理和聚变能的各个方面有着广泛的应用，从计算聚变能产生的角度说，碰撞频率正比于 σv ，它反映了每秒的碰撞数，且能很好地衡量产生所需的D-T反应的难易程度。

主要内容

- 3.0 引言
- 3.1 截面、平均自由程和碰撞频率的概念
- 3.2 反应速率
- 3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度
- 3.4 辐射损失

3.2 反应速率

■ 1. 硬球反应速率

- 截面、平均自由程、碰撞时间和碰撞频率的概念是单个粒子间核碰撞的微观物理，由微观转到宏观，需引入反应速率 R_{12} 的概念，它决定了单位体积、单位时间内的聚变碰撞次数。一旦 R_{12} 的值已知，那么就可以直接计算单位体积产生的聚变功率。
- 继续采用硬球碰撞来模拟：
 - 首先，在 $dt = dx/v$ 时间内，将有 $n_2 A dx$ 个入射粒子通过靶区域，其中发生碰撞的数目由 $dF(n_2 A dx)$ 给出。反应速率是单位体积、单位时间内发生碰撞的粒子数——每立方米每秒的碰撞数：

$$R_{12} = \frac{dF n_2 A dx}{A dx dt} = \sigma n_1 n_2 \frac{dx}{dt} = n_1 n_2 \sigma v$$

3.2 反应速率

- 聚变功率密度的计算：如果每次核碰撞产生能量 E_f ，那么单位体积每秒产生的总能量就是 $E_f R_{12}$ 。这个量等于以瓦特每立方米 (W/m^3) 为单位的聚变功率密度，可以写成：

$$S_f = E_f n_1 n_2 \sigma v (\text{W}/\text{m}^3)$$

- 上式中的能量 E_f 可以对应于总聚变能、 α 粒子能量和中子能量，具体要求取决于能量密度计算的背景，要明确这种区分。
- 上式只是概念上正确，因为它采用的是硬球碰撞模型，太过简化了。

3.2 反应速率

■ 2. 包含各种速度的反应速率

■ A. 分布函数

- 将反应速率概念推广到靶粒子和入射粒子的速度都有随机分布的情形。意味着（1）不是所有靶粒子都静止；（2）不是所有入射粒子都以相同速度 v 运动。通过引入分布函数（ f ）来实现，它除了具有简单的粒子数密度 n 之外，还包含了粒子很多其他信息。
- n 和 f 的区别：
 - 考虑物理空间的立方体元 $d\mathbf{r} = dx dy dz$ ，在时刻 t 总粒子数是 $n(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r}$ ，含所有粒子，不论速度大小。
 - 若再考虑某一特定速度范围内的特定子类粒子的总数目，那么就需考虑运动速度在范围 $v_x \sim v_x + dv_x$ ， $v_y \sim v_y + dv_y$ ， $v_z \sim v_z + dv_z$ 之间的粒子。分布函数是在六维相空间体积 $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ 上定义的，其中 $d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$ 。
 - 因此在给定时刻 t ，六维相空间体积元内的粒子（即那些位于以 \mathbf{r} 为中心的物理体积 $d\mathbf{r}$ 内，速度以 \mathbf{v} 为中心范围在 $d\mathbf{v}$ 内的粒子）数是密度乘以相体积元的结果，即 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ 。

3.2 反应速率

- f 比 n 包含更多的信息， n 可以很容易地由 f 得到。如果对给定的 \mathbf{r} 对所有速度求和（即积分），就可以得到物理体积 $d\mathbf{r}$ 内包含所有粒子速度的粒子总数，再除以体积 $d\mathbf{r}$ 就得到 n ，即单位体积内的粒子数：

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{dx dy dz \int f dv_x dv_y dv_z}{dx dy dz} = \int f d\mathbf{v}$$

- 注意：虽然 $d\mathbf{r}$ 和 $d\mathbf{v}$ 是微分量，是小量，在感兴趣的长度和速度上的变化可以忽略，但仍然包含足够多的粒子数目，仍可以采用统计学解释。

3.2 反应速率

- 类似地，计算以 \mathbf{r} 为中心的体积 $d\mathbf{r}$ 内所有粒子的平均速度 \mathbf{u} ，可以选择某一速度 \mathbf{v} ，并乘以以这个速度 \mathbf{v} 运动的粒子数，然后对所有可能的 \mathbf{v} 值求和（即积分），再除以 $d\mathbf{r}$ 内的总粒子数，即得：

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{d\mathbf{r} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}}{n d\mathbf{r}} = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}$$

- 事实上，任意一个量 W 的平均值都可以按如下公式通过计算分布函数加权平均来得到：

$$\langle W \rangle = \frac{1}{n} \int W f d\mathbf{v}$$

3.2 反应速率

■ B. 反应速率的第一次推广

- 将反应速率 $R_{12} = n_1 n_2 \sigma v$ 推广到包含速度分布的情形：

- 密度 n_1 和 n_2 代换为 $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{v}_1$ 和 $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t) d\mathbf{v}_2$ ；
- “靶”和“入射”粒子的选取是任意的， R_{12} 表达式中的速度 v 应为其相对速度， $v = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ ；
- 截面应为相对速度的函数，原因：两粒子相对速度很小时，库仑排斥力会使轨道强烈偏转以避免它们靠得太近，截面对于核碰撞来说将会非常小。反之，截面增加。故 $\sigma = \sigma(|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|)$ 。
- 结合这些修正，得到反应速率 R_{12} 的推广形式：

$$R_{12} = \int f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) \sigma(|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|) |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle$$

- 这里用了 W 的定义式。对于同种粒子碰撞，有：

$$R_{11} = \frac{1}{2} \int f_1(\mathbf{v}_1) f_1(\mathbf{v}_2) \sigma(|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|) |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} n_1^2 \langle \sigma v \rangle$$

- 出现系数1/2是因为当对两个速度 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 积分时，每次碰撞都累计了两次。

3.2 反应速率

■ C. 反应速率的第二次推广

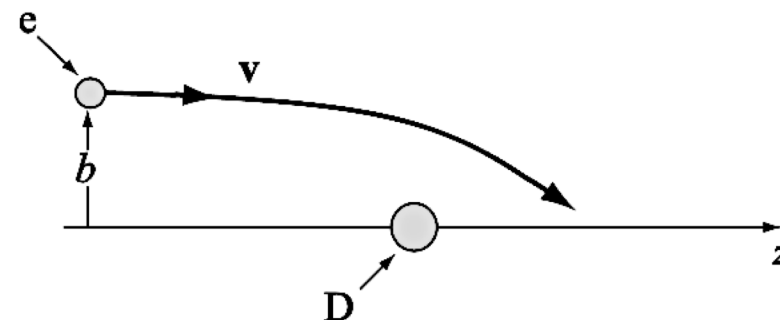
- 计算由短程核碰撞产生的聚变能可以采用推广后的反应速率表达式。若每次碰撞产生相同的能量 E_f ，原式 $S_f = E_f n_1 n_2 \sigma v$ 的推广可以写成：

$$S_f = E_f n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle$$

- 适用的范围为典型的库仑碰撞，即相互作用力的本质是长程力，并且粒子待求的量取决于相对速度和碰撞的几何特征。
- 这种作法在库仑碰撞下有问题吗？

3.2 反应速率

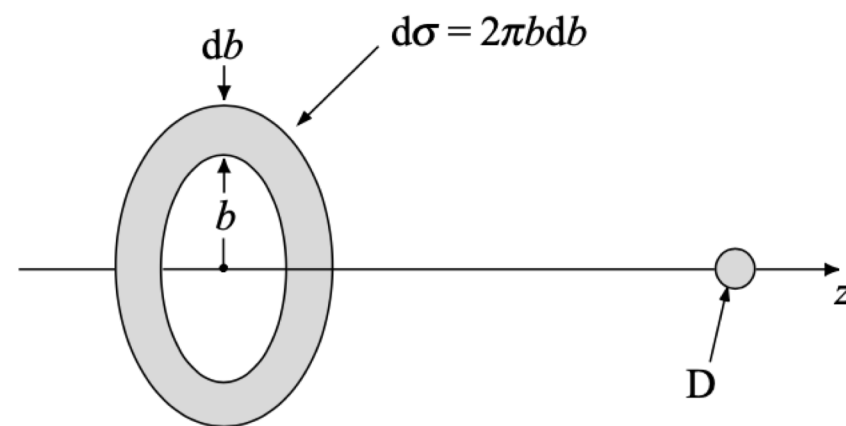
- 右图给出了电子(入射粒子)与氘核(靶粒子)的库仑相互作用, 轨道的几何特征由“碰撞参数 b ”表征。
- 考察它们相互作用前后在 z 方向的动量变化 Δmv_z 。对于库仑碰撞, Δmv_z 的角色可类比于核碰撞的 E_f :
 - 固定 b 值, 电子移动得非常快, 氘核对电子轨道的扰动非常小, 相互作用时间很短。速度较慢的电子, 其轨道偏转得较大。意味着 Δmv_z 是相对速度 v 的函数。
 - 相同速度 v 但 b 值不同的两个电子将有不同的轨道偏转。距离越远, 库仑力越弱, b 值大的电子偏转程度较小。意味着 Δmv_z 也是碰撞参数 b 的函数。
- 因此对于库仑碰撞, 先计算反应速率再对速度积分, 然后乘以动量改变 Δmv_z 的做法是不正确的, 因为 Δmv_z 本身就是速度的函数, 应在积分号下, 成为积分的一部分。



速度为 v , 碰撞参数为 b 的电子
与静止的氘核“碰撞”

3.2 反应速率

- 那么库仑碰撞的问题就转化为碰撞参数 b 以及它与截面的关系。因为库仑力是长程力，截面似乎是无穷大。所有粒子，无论其 b 和 v 如何，都将受到库仑力的作用。困难之处在于如何将“无限大”的截面分割成一系列面积为 $d\sigma = 2\pi b db$ 的截面环微元，如图所示。
- 对 $0 < b < \infty$ 范围内的所有碰撞参数值进行 $d\sigma$ 积分，总面积确实是无穷大，积分无穷？！但 $\Delta m v_z$ 是 b 的函数，且随 b 增大而减小，因此在被积函数中，微元截面带有减函数 b 的权重，当对 b 积分时，总的积分依然是有限的。
- 注意到 $d\sigma$ 与 v 无关，因为对于任何给定 b 值的粒子，不论速度是多少，都将通过一个微元环。



微元截面 ($d\sigma = 2\pi b db$) 的示意图 25

3.2 反应速率

- 将反应速率概念推广应用于长程力场的行为：
 - 用微分截面 $d\sigma = 2\pi b db$ 替代截面 σ ，再对 b 进行积分。
 - 假设用物理量 $W = W(v, b)$ 来刻画碰撞，表示单个粒子在单次碰撞后该物理量的改变量，其中， $v = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ 。这个量可以是单次碰撞引起的 z 方向的动量变化量，也可以是动能或碰撞辐射引起的能量损失的改变量。的相应的宏观改变量记为 w ，它表示单位时间单位体积内该量的改变。广义的反应速率允许在假设 W 和分布函数已知的情形下计算 w 。二者的关系是：

$$w = 2\pi \int W(v, b) f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) v b db d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2$$

- 取 $W = E_f H(b_0 - b)$ ，其中， H 是赫维赛德函数， $b_0^2 = \sigma(v)/\pi$ 。上述表达式即简化为核反应的短程碰撞形式。

主要内容

- 3.0 引言
- 3.1 截面、平均自由程和碰撞频率的概念
- 3.2 反应速率
- 3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度
- 3.4 辐射损失

3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

- 从概念上能够估计反应堆的聚变功率密度的公式为 $S_f = E_f n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle$ ，但实际上要具备分布函数和截面的详细知识，才可进行这个计算。

- **1. 分布函数**

- 库仑截面比D-T聚变截面大得多，意味着库仑碰撞将在远比核聚变碰撞时间尺度短的时间内使粒子分布函数弛豫到热力学平衡分布（**热核聚变**）。热力学平衡是由麦克斯韦分布函数描述的。因此可以假定氘和氚的分布函数为：

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n_j \left(\frac{m_j}{2\pi T_j} \right)^{3/2} e^{-m_j v^2 / 2T_j}$$

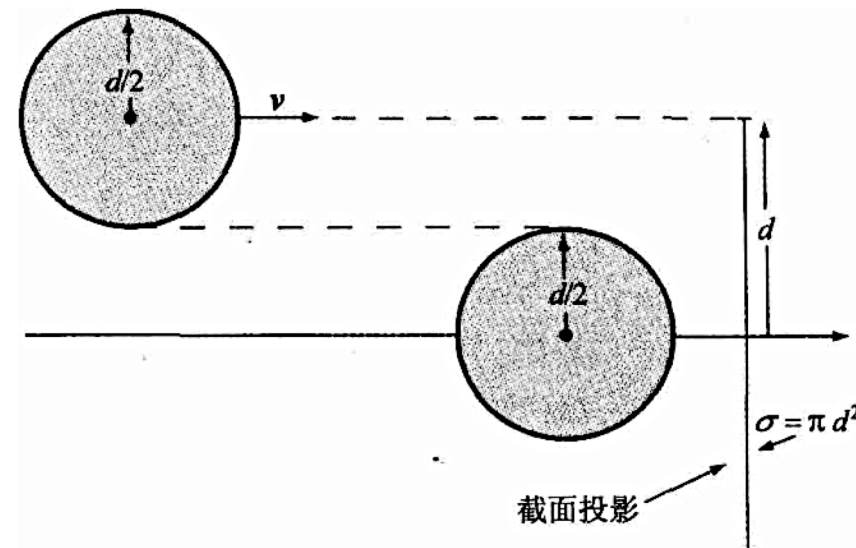
- 其中， j 表示氘或氚； $n(\mathbf{r}, t)$ ， $T(\mathbf{r}, t)$ 分别是数密度和温度； $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ 。这些分布函数将用来计算聚变功率。

3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

■ 2. 聚变截面和能量密度

■ 聚变截面的推导：

- 首先用硬球模型来简单估算；然后用经典物理学来考察 σ 对库仑碰撞速度的依赖关系，结果表明这种估算相当悲观。
- 考虑加入核的量子力学效应来做第三种计算。尽管截面最终要由实验测定，但量子模型是准确的。



硬球模型碰撞截面 ($\sigma = \pi d^2$)

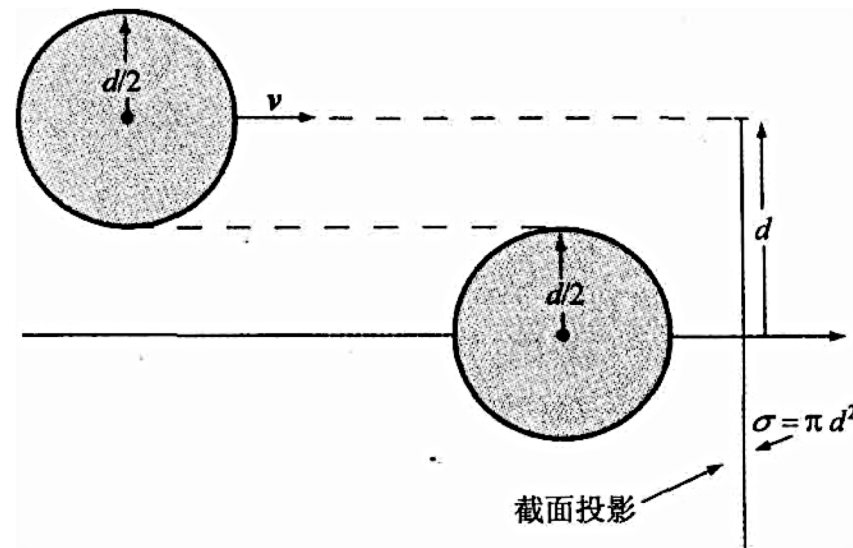
3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

■ A. 硬球截面

- 如图所示，硬球截面假设为每一参与碰撞的粒子的行为像一个撞球。假定粒子直径为原子核直径， $d \approx 5 \times 10^{-15} \text{m}$ 。截面面积 $\sigma = \pi d^2$ 。原子核截面的常用单位为靶恩 (b), $1\text{b} = 10^{-28} \text{m}^2$ 。硬球模型预测的聚变截面为：

$$\sigma = \pi d^2 \approx 0.8 \times 10^{-28} \text{m}^2 \approx 1\text{b}$$

- 是对 σ 的合理估计，但未考虑库仑排斥会使慢粒子不经历核碰撞的事实。



硬球模型碰撞截面 ($\sigma = \pi d^2$)

3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

■ B. 经典截面

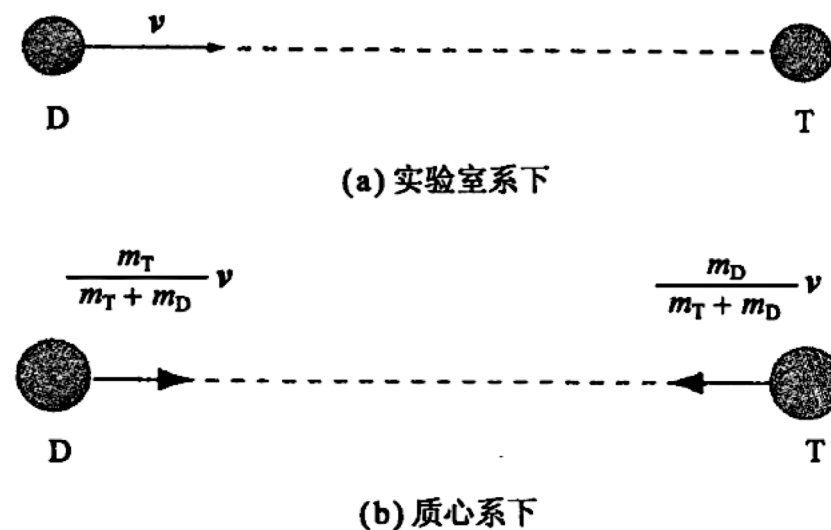
- 经典模型将经典物理学和硬球模型结合起来，通过考虑库仑排斥和核力吸引之间的竞争来确定 σ 对速度依赖关系。
- 右图显示了实验室系和质心系下的硬球碰撞行为。假设氘核以速度 v 朝静止的氚核运动，根据能量守恒，氘与氚在相距很远时初始动能应超过它们相互接触时的库仑势能，否则将在碰撞之前被排斥开。故发生碰撞需满足：

$$\frac{m_D}{2} \left(\frac{m_T}{m_D + m_T} v \right)^2 + \frac{m_T}{2} \left(\frac{m_T}{m_D + m_T} v \right)^2 \geq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

- 上式可以简化为：

$$\frac{1}{2} m_r v^2 \geq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

- 其中 $m_r = m_D m_T / (m_D + m_T)$ 是约化质量。



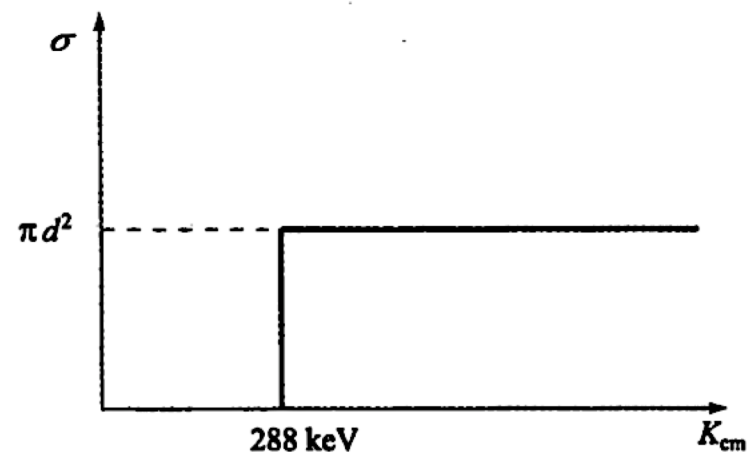
不同参照系下的D-T碰撞图像

3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

- 代入 $d = 5 \times 10^{-15} \text{ m}$ ，并定义质心动能 $K_{\text{cm}} = m_r v^2 / 2$ ，那么发生碰撞的条件简化为：

$$K_{\text{cm}} \geq 288(\text{keV})$$

- 右图给出了 σ 对 v 或对 K_{cm} 依赖关系的经典图像。
- 主要特征是在 288 keV 处有很高的势垒，任何较低能量的粒子都将不会经历核聚变碰撞。
- 与实际情况相比，这个结果甚为悲观。



经典相互作用图像下D-T截面作为能量的函数

3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

■ C. 核的量子力学效应

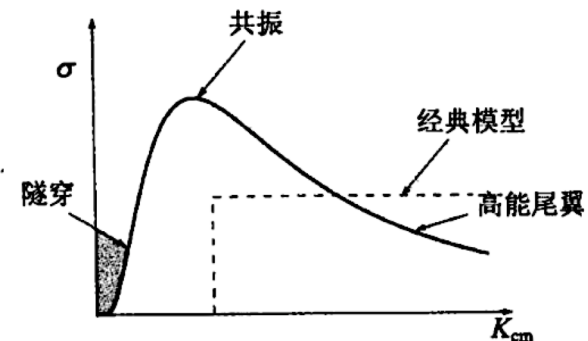
- 正确的聚变碰撞截面必须包含核的量子力学效应，因为核相互作用最强烈的区域是在原子核线度的尺度上。在如此小的尺度上，经典物理学已不再适用，需要考虑量子力学效应。
- 原子核长度尺度上最重要的效应是核既表现出粒子性，又表现出波的特性。
- 在经典硬球模型基础上，波特性和可引入三点量子修正：
 - 第一，在量子力学起作用的地方，隧道效应开始显现。简单例子是声波在吸声材料表面的反射。即便吸声材料对声波完全无损耗，但声波仍可以在材料内部穿透一定深度。虽然幅度呈指数形式衰减，但如果吸声材料足够薄，那么声能将会出现在它的背面，亦即材料被能量“隧穿”了。从截面的角度说，“隧穿”相当于势垒穿透，即使动能低于库仑势垒，也仍然会发生一定的相互作用。 288 keV 并不是很高的截止能量。直观上看，动能越低于截止能量，相互作用的概率也越低。

3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

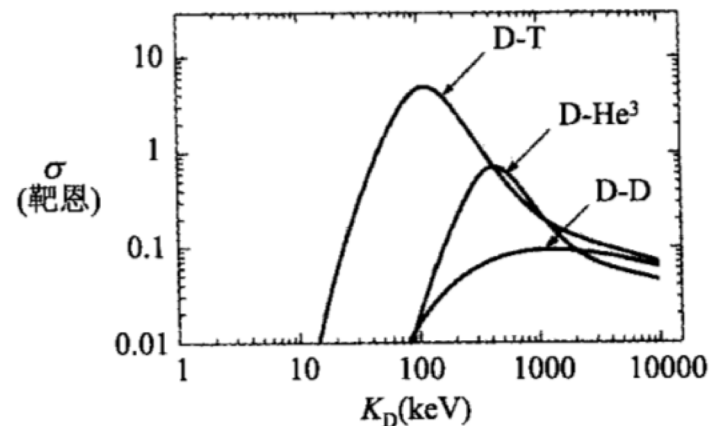
- 在经典硬球模型基础上，波特性可引入三点量子修正：
 - 第二、在原子核的距离上，两个原子核实际上可以相互穿越。原子核的相互作用可以看成两支密切耦合的波的相互作用。粒子（波）的相对速度越大（即 $K_{\text{cm}} \gg 228\text{keV}$ ），那么这种紧密耦合相互作用的时间就越短，从而聚变碰撞的概率也就越低。所以，随着相对速度的增加，聚变截面将很快减小。
 - 第三、在一定几何位形和相对速度的条件下，两个碰撞原子核的结合势能可以产生共振，核反应的概率将增加，因此截面也相应增大。这正是 D-T 相互作用的情形。

3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

- 右上图简要给出这三项波动修正，并与经典图像进行了比较。
- 右下图绘出了实验测定的实际聚变反应截面，实验是让一束单能粒子（氘原子）射向静止的靶。三种主要聚变反应的实验截面对氘原子能量（不是相对论性质的能量）的函数曲线。三条曲线都表现出右上图所示的量子行为。
- D-T截面在 $K_D = m_D v_D^2/2$ 时有一个约为5b（靶恩）的峰。就截面大小来说，与D-D反应或D- ^3He 反应相比，D-T反应更加优越。具体比较表明在 $K_D = 20\text{keV}$ 时， $\sigma_{DT} \approx 100\sigma_{DD}$ 。这个值是聚变反应堆的典型值。
- 作为比较，裂变反应热中子（即 $K_n \approx 0.025\text{keV}$ ）与 ^{235}U 碰撞截面约为600b（靶恩）。因此单就截面而言，裂变远比聚变有优势。



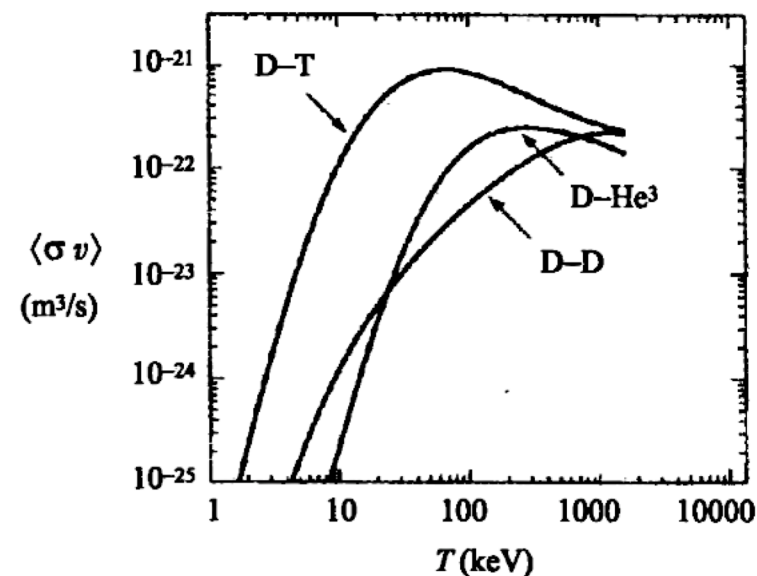
原子核截面的量子力学修正



实验测得的D-T、D- He^3 和D-D反应的截面与氘原子能量 $K_D = m_D v_D^2/2$ 的函数关系

3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

- 假设 $\sigma(v)$ 已知，那么原则上直接由式 $R_{12} = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle$ 就可计算反应速率。
- 右图给出了 $\langle \sigma v \rangle$ 对温度 T 的曲线，是利用等温麦克斯韦分布函数对主要的聚变反应进行数值计算的结果。
- 对于D-T反应，在温度为 70keV 时有峰值 $9 \times 10^{-22} \text{m}^3/\text{s}$ 。
- 有了 $\langle \sigma v \rangle$ ，可以很容易由式 $S_f = E_f n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle$ 计算聚变功率密度。



D-T、D-He³和D-D聚变反应的速度平均截面 ($\langle \sigma v \rangle = R_{ij}/n_i n_j$) 与温度的函数关系 ³⁶

3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

■ D-T反应中氘氚的最佳比例问题：

- 令 $n_1 = n_D$ 、 $n_2 = n_T$ ，电中性条件要求燃料中的总电子数 n_e 必须与所有正电荷的总和相等，即 $n_D + n_T = n_e$ （假设 α 粒子很少）。
- 定义 k 为氘所占的比重，即 $n_D = kn_e$ 、 $n_T = (1 - k)n_e$ ，故 $n_D \cdot n_T = k(1 - k)n_e^2$ 。当 $k = \frac{1}{2}$ 时，有最大值， $n_D \cdot n_T = \frac{1}{4}n_e^2$ 。因此，混合燃料的最佳混合是氘氚各占一半，这样，聚变功率密度的最终表达式：

$$S_f = \frac{1}{4} E_f n_e^2 \langle \sigma v \rangle$$

- 这个表达式给出在聚变系统总体功率平衡中的最主要能量来源。

3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度

■ D. 关于聚变功率产生的一些说明

- 利用低能情形下 σ 的分析模型可以得到 $\langle\sigma v\rangle$ 的解析近似值，精确的 $\langle\sigma v\rangle$ 曲线已经给出，对 $\langle\sigma v\rangle$ 是怎么从头到尾计算出来的过程可以看附录A。
- 两点：
 - 第一，触发聚变反应的所需粒子能量为 $70keV$ 量级，这超出电离势能的1000多倍，结论是燃烧的D-T燃料是完全电离的气体，往后称为等离子体；
 - 第二，库仑碰撞与能量平衡的要求导致最佳反应温度为 $15keV$ 量级，远低于 $\langle\sigma v\rangle$ 曲线的 $70keV$ 的最大值，这说明对于库仑碰撞引起的麦克斯韦分布函数，绝大多数的聚变反应是由位于分布函数末端的粒子发生的。

主要内容

- 3.0 引言
- 3.1 截面、平均自由程和碰撞频率的概念
- 3.2 反应速率
- 3.3 分布函数、聚变截面、聚变功率密度
- 3.4 辐射损失

3.4 辐射损失

■ 1. 辐射损失概况

- 影响聚变反应堆能量平衡的一种重要的能量损失机制是由辐射引起的，在聚变堆功率平衡计算中是不可忽略，也是不可避免的。
- 事实上，辐射损失有这几种类型：由杂质引起的线辐射、由粒子在磁场中运动引起的回旋辐射和库仑碰撞引起的韧致辐射。
- 致韧辐射造成的能量损失最大，可以采用式
$$w = 2\pi \int W(v, b) f_1(v_1) f_2(v_2) v b db dv_1 dv_2$$
来给出它的一般形式。

3.4 辐射损失

- W 是每个粒子每次碰撞引起的微观改变量，这里 W 是指一次库仑碰撞中每个粒子的辐射能量损失。产生的原因是带电粒子在做加速运动时要辐射能量。
- 一个无加速的带电粒子以一定速度直线运动，当它与另一带电粒子接近时，由于受到库仑相互作用，它将改变运动轨道，从直线轨道偏转。运动轨道的改变就相当于做加速运动。在轨道偏离过程中，带电粒子会因辐射而损失一些能量。
- 一旦 W 已知，可以直接代入式 $w = 2\pi \int W(v, b) f_1(v_1) f_2(v_2) v b db dv_1 dv_2$ 得到 w 值，即由于库仑碰撞产生的每立方米秒的辐射能量损失。 $w = S_B$ ， S_B 是韧致辐射功率密度损失，单位是 W/m^3 。
- 事实上，韧致辐射发射的光子在频率上是连续谱，通常在紫外区或软X射线区。它们被再吸收的平均自由程是很大的，这表明一旦一个光子发射出来，它将在聚变堆系统中消失，这意味着这些损失是不可忽略且不可避免的。

3.4 辐射损失

■ 2. 单位粒子每次库仑碰撞的能量损失 W 的计算

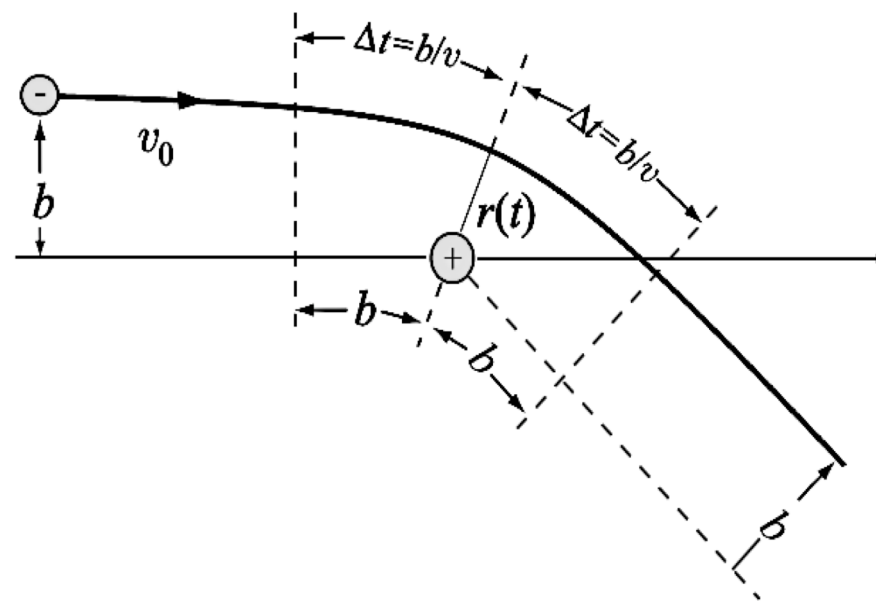
- 在聚变物理学中，库仑碰撞对于理解粒子输运、热输运和辐射损失等现象具有重要作用。韧致辐射由短程、单粒子、大角度偏转碰撞支配；而输运现象则由长程、多粒子、小角度偏转碰撞支配。
- 由此可以通过一系列合理近似来导出辐射损失的简单表达式，给出对密度和温度有半定量定标系数依赖关系的正确定标律。需进一步指出，产生韧致辐射的主要原因是电子和离子碰撞。同种粒子的库仑碰撞结果互抵，不存在辐射损失。
- W 的计算需要两步：
 - 首先，计算库仑碰撞过程中的辐射功率 P ；
 - 其次，近似估计发生辐射的碰撞时间 Δt 。
- $P\Delta t$ 即为 W ，表示每次库仑碰撞引起的辐射损失能量。

3.4 辐射损失

- 从作加速运动带电粒子的辐射能量公式出发，它来自电磁辐射理论，附录B给出了它的推导。
- 非相对论加速电子的辐射功率公式为：

$$P = \frac{\mu_0 e^2 \dot{v}^2}{6\pi c} \quad (\text{W})$$

- 其中 \dot{v} 是加速度。
- 如何把这个方程应用到右图所示的库仑碰撞中。



库仑碰撞的几何关系

3.4 辐射损失

- 库仑碰撞，电子因受到库仑力 F_C 加速：

$$\dot{v} = \frac{F_C}{m_e} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^2(t)}$$

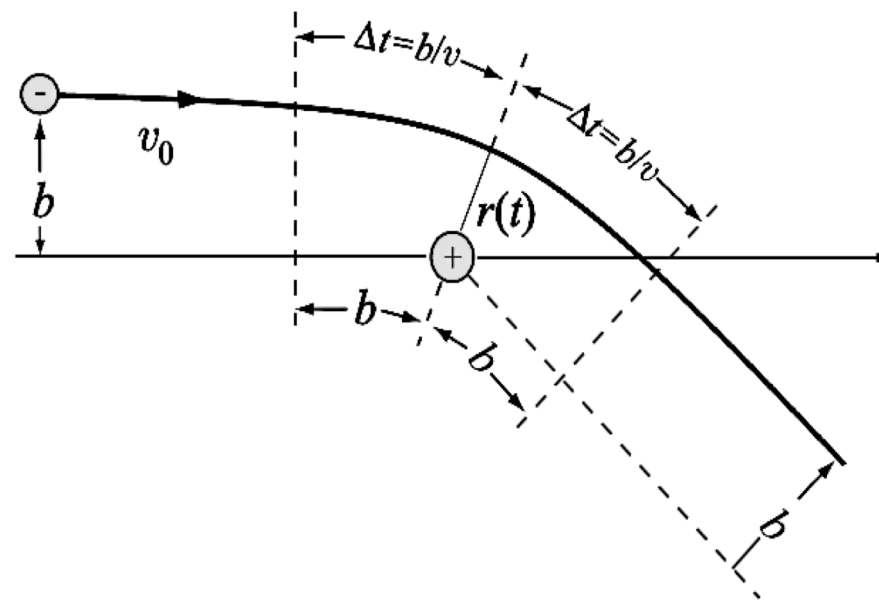
- Z 为离子核电荷数。在库仑相互作用时间内， $r(t)$ 约为碰撞参数 b ， $r(t) \approx b$ ：

$$\dot{v} = \frac{F_C}{m_e} \approx \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e b^2}$$

- 代入 P 的表达式，得到：

$$P = \left(\frac{Z^2 e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \frac{1}{b^4} \quad (\text{W})$$

- 此处 $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$ 。



库仑碰撞的几何关系

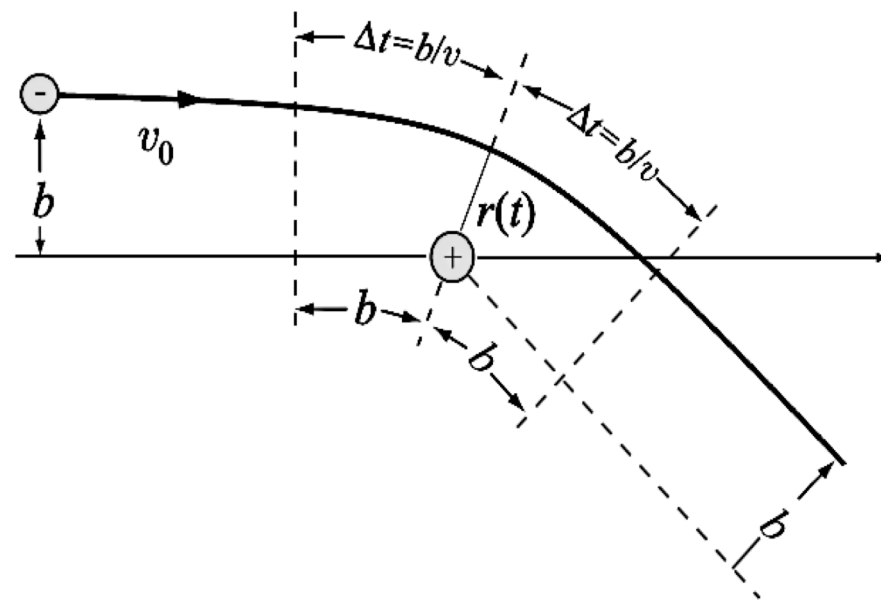
3.4 辐射损失

- 电子实际加速的时间间隔 Δt ：电子在与离子垂直距离约为 b 的时候开始加速，一直加速到它离离子足够远，相互作用力可忽略为止。由对称性可知，离开后的等效距离也是 b ，只是在轨道的另一边。所以当粒子以速度 v 运动时，碰撞时间为：

$$\Delta t \approx \frac{2b}{v} \quad (\text{s})$$

- 由此给出 W 的表达式：

$$W \approx P\Delta t \approx \left(\frac{Z^2 e^6}{48\pi^3 \varepsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \frac{1}{vb^3} \quad (\text{J})$$



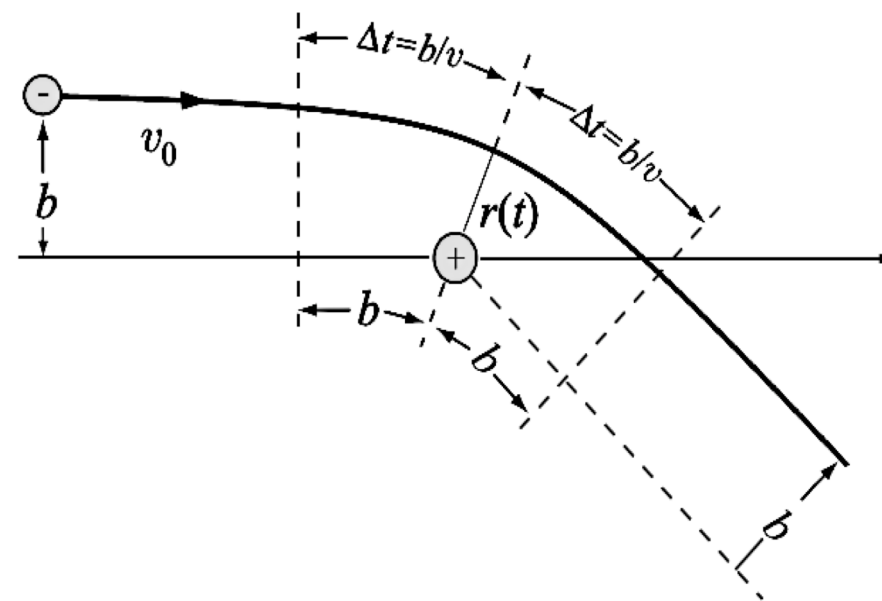
库仑碰撞的几何关系

3.4 辐射损失

- 最后，对电子的辐射能量与其初始动能做一比较。因为强的、大角散射碰撞的特征是电子在 $r \sim b$ 位置的库仑势能与其动能为同一量级，故有：

$$\frac{W}{m_e v^2 / 2} \sim \frac{v^3}{c^3} \ll 1$$

- 也就是说，电子在库仑碰撞过程中辐射的能量只占其初始动能的很小一部分。



库仑碰撞的几何关系

3.4 辐射损失

■ 3. S_B 的计算

- 把 W 的表达式代入 S_B 的方程式并算出积分：

- 考虑到离子质量远大于电子，计算过程可以简化。在相同温度下，①离子运动比电子慢得多；②在一次碰撞过程中离子轨道的扰动可以忽略不计。那么相对速度 $v = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| \approx |\mathbf{v}_e|$ 。这一近似将离子相关项从积分中分离开来，简单对离子速度进行积分，得：

$$\int f_i(\mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_i = n_i$$

- 对于剩下的电子积分，因为相对速度仅取决于 \mathbf{v}_e 。引入球坐标系下的速度变量。由于被积函数不依赖于角变量，因此三维速度积分可退化为一维积分：

$$d\mathbf{v}_e = dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin \theta dv d\theta d\phi = 4\pi v^2 dv$$

- 对 θ 和 ϕ 的积分得到因子 4π 。

3.4 辐射损失

- 把 W 的表达式代入 S_B 的方程式并算出积分：

- 代入电子的麦克斯韦分布函数， S_B 的表达式可以简化为：

$$S_B = 8\pi^2 n_i n_e \left(\frac{Z^2 e^6}{48\pi^3 \varepsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \int \frac{v^2 e^{-m_e v^2 / 2T_e}}{b^2} dv db$$

- 再考虑对碰撞参数 b 的积分。若对所有的 b 积分 ($0 < b < \infty$)，积分发散，原因是小的 b 值对应于强的大角度碰撞。随着 b 越来越小，量子力学效应开始显现，辐射功率 P 公式中隐含的发射频率连续性假设将不再成立，辐射只在分立的量子化频率出现。
- b 值小时，辐射功率接近一个有限常量而非无限。简单作法是把 b 的下限从 $b = 0$ 改成 $b = b_{\min}$ ，它对应于量子力学效应开始显现的转变碰撞参数。转变在 b 小到不确定性原理开始起作用时发生，即 $\Delta x \Delta p \geq h/2\pi$ 。令 $\Delta x \rightarrow b$ ， $\Delta p \rightarrow m_e v$ ，于是有：

$$b_{\min} \approx \frac{h}{2\pi m_e v}$$

3.4 辐射损失

- 把 W 的表达式代入 S_B 的方程式并算出积分：

- b （若1keV的电子速度）远小于原子直径， $b_{min}(1\text{keV}) = 6 \times 10^{-12} \text{m} < 10^{-10} \text{m}$ 。对 b 积分：

$$\int_{b_{min}}^{\infty} \frac{db}{b^2} = \frac{1}{b_{min}} = \frac{2\pi m_e v}{h}$$

- 将此结果代入 S_B 的表达式，得到简单的速度积分，由此很容易得到 S_B 表达式：

$$S_B = \left(\frac{2^{1/2}}{6\pi^{3/2}} \right) \left(\frac{e^6}{\epsilon_0^3 c^3 h m_e^{3/2}} \right) Z^2 n_i n_e T_e^{1/2} \quad (\text{W/m}^3)$$

- 考虑了库仑相互作用和量子力学效应的 S_B 表达式与上式一样，但系数有区别，更精确的为：

$$\frac{2^{1/2}}{6\pi^{3/2}} \rightarrow \frac{2^{1/2}}{3\pi^{5/2}}$$

- 数值上从0.0423 \rightarrow 0.0269。韧致辐射的计算用这一更精确的系数。

3.4 辐射损失

■ 4. 多离子种类效应

- 上式给出了电子与一种离子碰撞的韧致辐射功率。但实际上存在多种离子：氘、氚、 α 粒子和杂质。对各种离子情形进行简单求和即可得到总辐射功率
- 将 S_B 的和写成含所有离子的“有效电荷” Z_{eff} 的形式。 Z_{eff} 的定义由体系的总体电中性条件给出：

$$\sum_j Z_j n_j = n_e$$

- 其中求和是对于所有离子种类进行。利用这个关系，定义 Z_{eff} ：

$$Z_{\text{eff}} = \frac{\sum_j Z_j^2 n_j}{\sum_j Z_j n_j} = \frac{\sum_j Z_j^2 n_j}{n_e}$$

3.4 辐射损失

- 对于纯D-T等离子体， $Z_{\text{eff}} = 1$ 。这样 S_B 表达式最后可以写成：

$$S_B = \left(\frac{2^{1/2}}{3\pi^{5/2}} \right) \left(\frac{e^6}{\epsilon_0^3 c^3 h m_e^{3/2}} \right) Z_{\text{eff}} n_e^2 T_e^{1/2} \quad (\text{W/m}^3)$$

- 实用式子为：

$$\left. \begin{aligned} S_B &= C_B Z_{\text{eff}} n_{20}^2 T_k^{1/2} \quad (\text{W/m}^3) \\ C_B &= 5.35 \times 10^3 \end{aligned} \right\}$$

- 轫致辐射与聚变功率一样，都随密度平方增强，但对温度的依赖关系较弱。

总结

- 描述了聚变反应堆设计的出发点。它包含以下计算：①主要加热源和聚变功率；②重要的能量沉积和韧致辐射。这些贡献项对评估聚变堆的总体功率平衡是至关重要的。
- 聚变功率密度的计算需要引入核物理中的一些微观概念，包括截面、平均自由程和碰撞时间等。D-T反应具有最大的聚变截面，在质心动能 120keV 情形下约为 5b （靶恩），需要很大的动能来克服库仑排斥力。
- 库仑碰撞远比聚变碰撞频繁，它使等离子体很快弛豫到麦克斯韦分布函数。将麦克斯韦分布函数和实验测量的D-T截面结合起来，可以估计作为 T 函数的速度平均截面 $\langle\sigma v\rangle$ 。 $\langle\sigma v\rangle$ 的最大值在 $T = 70\text{keV}$ 时约为 $9\times 10^{-22}\text{m}^3/\text{s}$ 。
- 50%-50% 的D-T等离子体聚变功率密度的表达式：

$$S_f = \frac{1}{4} E_f n^2 \langle\sigma v\rangle \quad (\text{W/m}^3)$$

总结

- 聚变等离子体最主要的辐射损失源自由电子和离子间的库仑相互作用，即轫致辐射损失。起因是电子因轨道偏转而经历加速运动。在这期间，电子由于辐射而损失能量。利用广义的反应速率方程得到辐射功率密度损失的表达式：

$$S_B = \left(\frac{2^{1/2}}{3\pi^{5/2}} \right) \left(\frac{e^6}{\epsilon_0^3 c^3 h m_e^{3/2}} \right) Z_{\text{eff}} n^2 T_e^{1/2} \quad (\text{W/m}^3)$$

- 聚变功率和轫致辐射损失均有 n^2 的定标关系。但是在聚变温度区（ $T > 10\text{keV}$ ），聚变功率随 T 的增加要迅速得多。



谢谢！