

第六章 等离子体的平衡与稳定性

主要内容

- 6.0 引言
- 6.1 磁流体方程
- 6.2 磁流体的平衡
- 6.3 径向压强平衡
- 6.4 环向力平衡
- 6.5 磁流体不稳定性的物理图像
- 6.6 表面载流等离子体柱的稳定性

主要内容

- 6.0 引言
- 6.1 磁流体方程
- 6.2 磁流体的平衡
- 6.3 径向压强平衡
- 6.4 环向力平衡
- 6.5 磁流体不稳定性的物理图像
- 6.6 表面载流等离子体柱的稳定性

6.0 引言

- 自洽性起关键作用的首要问题是等离子体的宏观平衡和稳定性：如何利用磁场的作用来维持等离子体的稳定的宏观平衡，进而使得聚变反应能够在连续稳态运行模式下进行？
- 宏观平衡和稳定性分析是基于单流体模型即磁流体力学模型来进行的。磁流体力学模型是对双流体模型的简化，由只考虑宏观行为的特征时间和特征空间尺度而导出。具体来说，特征标长 L 取等离子体半径（ $L \sim a$ ），而特征时间 τ 是指离子以热速度穿过等离子体的渡越时间（ $\tau \sim a/v_{Ti}$ ）。由此得到特征速度 $u \sim L/\tau \sim v_{Ti}$ ，它是等离子体能够达到的最快的宏观速度——离子声速。
- 内容：从双流体模型出发导出磁流体力学模型，同时通过单粒子导心理论来推导磁流体力学模型。目的：直观上导出的磁流体力学模型和单粒子导心运动模型的确是自洽的。

6.0 引言

- 从磁流体力学层面考虑，可以将磁流体力学电子动量方程转化到单流体的欧姆定律，它可以将电场和电流联系在一起。实际上，欧姆定律有三种表达式，相应地，磁流体力学模型也有三种表达形式。保留项数最多的形式被称为“广义”欧姆定律。其次是“电阻性”欧姆定律。略去电阻项后为“理想化”欧姆定律，它相当于说等离子体具有理想导电性。对于所有三种欧姆定律形式，力平衡关系式都是一样的。
- 磁流体力学平衡方程的形式化及其分析：磁流体力学平衡的过程涉及两种不同性质的力。第一种是热气体膨胀产生的径向扩张力。事实表明，环向（即长程方向上）磁场和极向（即短程方向上）磁场都能够平衡径向扩张力。第二种是由于环形几何产生的环向力。这个力将驱使等离子体“环”向更大的大半径方向膨胀。在此情形下，只有极向磁场才能抵消环向扩张力。事实表明，保持环向力平衡的磁场的关键特征就是磁场线连续地缠绕圆环，即所谓“旋转变换”。可以通过一些简单的磁场位形计算旋转变换。一般来说，轴对称环形聚变装置通过环向等离子体电流来产生旋转变换。但也可以在没有环向电流的情形下产生，如仿星器的磁场位形，内在三维的。
- 结论：存在多种不同的磁场几何，它们都能提供维持等离子体环向平衡所必需的力。然后检验这些平衡位形的磁流体力学稳定性，从而确定哪一种最具有实现稳定的高比压聚变堆的吸引力。

主要内容

- 6.0 引言
- 6.1 磁流体方程
- 6.2 磁流体的平衡
- 6.3 径向压强平衡
- 6.4 环向力平衡
- 6.5 磁流体不稳定性物理图像
- 6.6 表面载流等离子体柱的稳定性

6.1 磁流体方程

- 从双流体模型推导磁流体力学模型的过程比较简单：
 - 首先，需要明确相关的标长和时间尺度，以便为与双流体模型中各项的大小进行比较打下基础；
 - 其次，由于磁流体力学只关注宏观尺度行为，因此凡涉及电子质量的小量、等离子体的非相对论速度，以及和德拜长度尺度有关的量将被明显简化掉；
 - 最后，双流体模型到磁流体力学模型的转换是通过引入单流体变量和忽略一些小量取得的，过程中只关心与磁流体力学相关的特征长度和时间尺度。

6.1 磁流体方程——与磁流体力学有关的基本标长

- 描述磁流体力学的特征长度、特征时间和特征速度分别由 $L \sim a$, $\tau \sim a/v_{Ti}$ 和 $u_i \sim v_{Ti}$ 给出。在做进一步处理时需要将双流体模型中的未知量以及其它自然显现的长度、时间和速度等尺度与磁流体力学的尺度进行比较, 由此决定其去留:
 - 首先考虑电场。就宏观速度而言, 一般认为垂直方向的感应电场比较大, 意味着流体速度主要是 $E \times B$ 漂移速度。为了和假定的磁流体力学特征速度 v_{Ti} 相一致, 必有 $E_{\perp} \sim v_{Ti} B$ 。因为电子和离子都以相同的 $E \times B$ 漂移速度移动, 故 $u_e \sim u_i \sim E_{\perp}/B \sim v_{Ti}$ 。 E_{\parallel} 的尺度较复杂。
 - 其次, 注意到电子和离子具有相同的 $E \times B$ 漂移速度, 因此电流密度 $J = e(n_i u_i - n_e u_e)$ 将只保留首项, 意味着 $|J|/en v_{Ti} \ll 1$, 不等式迅速得到量化。此外, 与磁压强相比, 假定等离子体压强是有限的, 即 $\beta \equiv p/(B^2/2\mu_0) \sim 1$ 。
 - 最后, 为了满足聚变等离子体的定义, 另外两个不等式也必须满足: 小的离子回旋半径 $r_{Li} \ll a$ 和低碰撞频率 $\bar{\nu}_{ei} \ll v_{Ti}/a$ 。目前的实验和聚变堆都能很好地满足这两个条件。

6.1 磁流体方程_____与磁流体力学有关的基本标长

- 定义磁流体力学的所有不等式归纳和总结如下：

$$\left. \begin{array}{l} \text{长度: } a \gg r_{Li} \gg [r_{Le} \sim \lambda_{De}] \\ \text{频率: } \bar{v}_{ei} \ll v_{Ti}/a \ll \omega_{ci} \ll [\omega_{ce} \sim \omega_{pe}] \\ \text{速度: } v_{Ti} \sim v_{\alpha} \ll v_{Te} \ll [c] \end{array} \right\}$$

这里，注意到阿尔文速度 $v_a^2 \equiv B^2 / \mu_0 n_i m_i \approx 2v_{Ti}^2 / \beta$ 。此外，上式中黑体符号表示磁流体力学的特征尺度。方括号内的项表示，和磁流体力学尺度相比，这些项充分满足不等式。不等式的等级在后文推导过程中将详细讨论。

- 这些简单的定标关系可以用来比较双流体模型中各个项，从而决定哪些项保留，哪些项可忽略。

6.1 磁流体方程——“明显的”简化

- 对双流体模型的“明显”简化源于上式的方括号中那些充分满足不等式的项：
 - 第一个简化：相关的特征时间尺度 $\tau \sim a/v_{Ti}$ ，相应的磁流体学频率 $\omega \sim 1/\tau \sim v_{Ti}/a$ ，与电子的固有频率相比，它是一个非常低的频率，即 $\omega \ll \omega_{ce} \sim \omega_{pe}$ 。事实上，这两种频率之间相差几个数量级，意味着电子动量方程中的电子惯性项可以被忽略，因为比起磁流体学特征时间，电子响应时间要快得多。形式上，令 $m_e \rightarrow 0$ 来得到恰当的数学上的极限值。
 - 第二个简化：与等离子体宏观流动的非相对论性尺度有关。因为 v_{Ti} 要比光速 c 小几个数量级，因此可以忽略掉麦克斯韦方程组中的位移电流项。类似地，磁流体力学的特征标长很容易满足不等式 $a \gg \lambda_{De}$ 。
 - 第三个简化：泊松方程中的电场梯度项被忽略，进而得到等离子体准中性条件： $n_e \approx n_i$ （不要误以为准中性假设即意味着 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，不对！其实应为 $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \ll en_e$ ）。这些简化使麦克斯韦方程从严格的相对论性洛伦兹不变量形式简化为自洽的低频下的伽利略不变量形式。形式上说，取极限 $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ ，就可以从数学上得到低频条件下的麦克斯韦方程组。

6.1 磁流体方程——“明显的”简化

- 在上述简化的基础上，双流体模型简化为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) &= 0 \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) &= 0 \\ 0 &= -en_e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e - m_e n_e \bar{v}_{ei}(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \\ m_i n_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_i &= en_i(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i - m_e n_e \bar{v}_{ei}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \\ \frac{3}{2} n_e \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \right) T_e + p_e \nabla \cdot \mathbf{u}_e + \nabla \cdot \mathbf{q}_e &= S_e \\ \frac{3}{2} n_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i \cdot \nabla \right) T_i + p_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i + \nabla \cdot \mathbf{q}_i &= S_i \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) \\ n_i - n_e &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

6.1 磁流体方程——单流体变量

- 将单流体变量引入到双流体模型，其单流体变量为质量密度 ρ ，宏观速度 v 和压强 p ，定义为：

- 首先，因为离子质量远大于电子质量，因此单流体的质量密度近似为离子质量密度：

$$\rho \equiv m_i n$$

- 其中 $n_e = n_i \equiv n$ 是因为满足准中性条件。

- 第二，离子和电子的流体速度均近似等于 $E \times B$ 漂移速度。由 $m_i \gg m_e$ ，可知流体的动量由离子携带：

$$v \equiv u_i$$

- 第三，电子流体速度是通过电流密度 J 来定义的： $J = e(n_i u_i - n_e u_e)$ ，或者说

$$u_e \equiv v - J/en$$

- 最后，单流体模型中的压强就是电子和离子压强的简单的和：

$$p \equiv p_e + p_i$$

- 以上的式子提供了单流体变量和双流体变量之间的必要联系。

6.1 磁流体方程——质量守恒方程

- 两个质量守恒方程中所包含的信息通过下述方法得到：

- 首先，用离子质量 m_i 乘以离子守恒方程并引入单流体变量，得到：

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- 式中， $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ 是随着离子流体一起运动的普通对流导数。

- 第二个关系式通过用电子电量 e 乘以两个守恒方程然后化简方程来得到。利用电中性条件，得到：

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- 这是一个冗余关系，因为通过对安培定律的低频形式求散度也能得到： $\nabla \cdot$

$(\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}) = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ 。因此，式 $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 是从质量守恒方程中能得到的唯一独立的信息。

6.1 磁流体方程——动量守恒方程

- 两个动量守恒方程简化如下：

- 首先，将两个方程叠加并引入单流体变量，得到如下方程：

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

- 需要注意的是，电场项由于电中性关系被舍去，碰撞项则由于弹性库仑碰撞中电子和离子的总动量守恒而被舍去。
- 这个方程是磁流体力学模型中最重要方程，因为它描述了等离子体的基本力平衡关系。物理解释如下：等号左边表示惯性力，对决定等离子体的动力学行为很重要；等号右边的 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ 项表示用来约束等离子体的磁场力， ∇p 项表示引起等离子体热核向外膨胀的压强梯度力。在没有流动的稳态情形下，惯性力为零，平衡由磁场力和压强梯度力相等来实现。根据定标关系，只有电流密度 \mathbf{J} 满足 $J \sim p/aB$ 时，这两个力才能平衡。¹⁴这意味着如前所述， $J/env_{Ti} \sim r_{Li}/a \ll 1$ 。

6.1 磁流体方程——动量守恒方程

- 通过将电子动量方程简单改写为欧姆定律的形式并引入单流体变量，可以从动量方程中获得另外一些信息，通过简单计算得到：

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{en} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) + \eta \mathbf{J}$$

- 上式就是所谓的“广义”欧姆定律。公式左边表示随等离子体一起运动的参考系中的电场，右边的 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ 和 ∇p_e 项分别表示霍尔效应项和电子逆磁项。这两项在其有重要作用的情形下保留，但在磁流体力学范围内忽略。事实上，对其大小课做简单估计： $JB/envB \sim p/aenvB \sim r_{Li}/a \ll 1$ ，故可以被忽略。最后一项描述等离子体的电阻性，也是小量，因为磁流体力学的定标关系意味着 $\eta J/vB \sim (v_{ei}a/v_{Ti_i})(r_{Le}^2 a^2) \ll 1$ 。故在此基础上，电阻项也可以忽略。讨论的最终结果就是上式可简化为“理想”欧姆定律：

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

- 注意：在随等离子体一起运动的参考系中，电场为零。换句话说，等离子体行为类似于理想导体。

6.1 磁流体方程——动量守恒方程

- 最后，需要指出的是，尽管电阻项很小，但在有些时候，欧姆定律还需要保留这一项。这是因为：
 - ①电阻项是动量方程中唯一表征耗散效应的项（也就是说，霍尔效应项和电子逆磁项都是非耗散的）；
 - ②“理想”磁流体力学定标关系仅适用于垂直方向，这是因为 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的平行分量为零，欧姆定律方程左边唯一可用作比对的项是 E_{\parallel} ，而这一项也没定标。
- 因此，如果假设 $E_{\parallel} \sim J_{\parallel}$ ，那么这两项就需要保留，而且电阻项的贡献出于自洽上的考虑需作如下改动： $\eta \mathbf{J} \rightarrow \eta J_{\parallel}$ 。实际上，从数学表示的简明性考虑，通常整个 $\eta \mathbf{J}$ 都被保留。由此给出平行于磁场方向的正确表达式，同时也带来了垂直方向上近乎可以忽略的小的不自洽性。保留电阻项即可得到“电阻性”欧姆定律：

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}$$

6.1 磁流体方程——动量守恒方程

- 最后还有一点需要提及的是电阻率 η 的值。有关等离子体动理学模型的更精确计算表明，电阻性欧姆定律的实际表达式是 $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta_{\parallel} \mathbf{J}_{\parallel} + \eta_{\perp} \mathbf{J}_{\perp}$ ，即电阻率是各向异性的，这是因为正确的分布函数要比简单位移了的麦克斯韦分布复杂得多。动理学理论显示，上式中从简单位移了的麦克斯韦分布导出的 η 值实际上相当于垂直方向的电阻率，即 $\eta_{\perp} = \eta$ 。然而，正确建构平行方向上欧姆定律模型需要的却是 η_{\parallel} 。平行电阻率的更准确的值要比 η 小一个差不多1/2的因子： $\eta_{\parallel} = 0.51\eta$ 。就目前而言，各向异性是不重要的。因此，出于简单性考虑，通常假设电阻是各向同性的，即 $\eta \rightarrow \eta_{\parallel}$ ，因为耗散影响主要是在平行方向，故电阻性欧姆定律表达式为：

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta_{\parallel} \mathbf{J}$$

- 从经典输运理论出发，有

$$\eta_{\parallel} = (0.51) \frac{\sqrt{2}}{12\pi^{3/2}} \frac{e^2 m_e^{1/2}}{\epsilon_0^2 T_e^{3/2}} \ln \Lambda = 3.3 \times 10^{-8} \left(\frac{1}{T_k^{3/2}} \right) (\Omega \cdot \text{m})$$

6.1 磁流体方程——动量守恒方程

- 电阻性主要从两个方面影响到等离子体行为：
 - 首先，与理想磁流体力学情形相比，电阻性允许可能出现的不稳定性范围更宽。但这些不稳定性具有更慢的增长率，通常并不导致等离子体的宏观损失，而是增强了的输运损失。
 - 其次，即使不存在电阻性不稳定性，电阻项依然是动量方程中唯一的耗散项。这种耗散导致粒子扩散和磁场扩散这两种主要的输运损失。同样，与磁流体力学的特征时间尺度相比，这些现象的时间尺度更慢。因此，电阻性磁流体力学要和等离子体输运结合起来讨论。
- 双流体动量方程转化为单流体动量方程和欧姆定律，其中欧姆定律可以是理想的或者电阻性的。这里不考虑涉及广义欧姆定律的问题。

6.1 磁流体方程——能量守恒方程

- 在磁流体力学范围内，能量方程可以大大简化。包括热传导在内的所有源项和汇项都被忽略。等离子体的加热和冷却一般要比理想磁流体具有更慢的时间尺度，例如零维热传导项（它的贡献总是最大），其形式为 $\nabla \cdot \mathbf{q} \rightarrow 3nT/\tau_E$ ，式中 τ_E 是能量约束时间。由于就目前的大装置或反应堆来看， τ_E 的取值范围是 $0.1 \sim 1\text{s}$ ，所以很明显，这个时间要比磁流体力学特征时间长很多： $\tau_E \gg a/v_{Ti} \sim 1\mu\text{s}$ 。

- 基于上述理由，并引入单流体变量，将离子能量方程简化为：

$$\frac{3}{2}n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) T_i + p_i \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- 利用质量守恒关系消去 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ 项，上式化简为熟悉的绝热形式：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_i}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

- 其中 $\gamma=5/3$ 。

6.1 磁流体方程——能量守恒方程

- 接下来，由于磁流体力学的定标关系给出 $u_e = v - J/en \approx v$ ，因此电子满足相同形式的能量方程：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_e}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

- 将两个能量方程叠加，并利用定义 $p = p_i + p_e$ ，我们得到单流体能量方程表达式：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

- 注意，在磁流体力学中没有必要区分 p_i 和 p_e ，因为上式仅仅包含二者的和。

6.1 磁流体方程

磁流体力学方程总结

- 现将以上推导的单流体方程集合在一起，由此构成封闭的磁流体力学模型方程组，归纳如下：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{质量:} & \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \text{动量:} & \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \\ \text{欧姆定律:} & \begin{array}{ll} \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} & (\text{理想磁流体力学}) \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta_{\parallel} \mathbf{J} & (\text{电阻性磁流体力学}) \end{array} \\ \text{能量:} & \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right) = 0 \\ \text{麦氏方程组:} & \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{B} = 0 \end{array} \end{array} \right\}$$

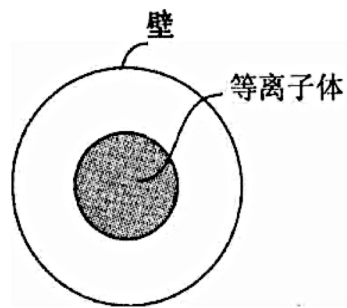
- 这就是用来分析聚变等离子体的宏观平衡和稳定性的基本模型。

主要内容

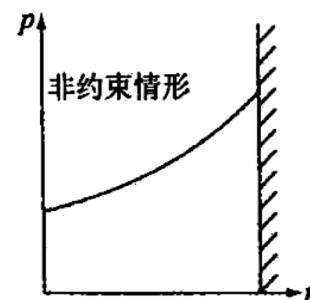
- 6.0 引言
- 6.1 磁流体方程
- 6.2 磁流体的平衡
- 6.3 径向压强平衡
- 6.4 环向力平衡
- 6.5 磁流体不稳定性物理图像
- 6.6 表面载流等离子体柱的稳定性

6.2 磁流体的平衡

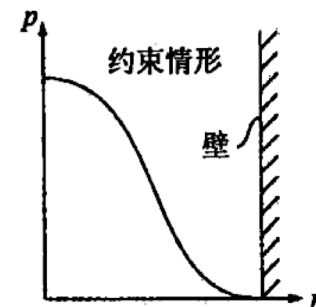
- 磁流体力学模型的第一个重要应用与平衡计算有关。如何通过外加磁场和内部感应磁场共同作用提供一个平衡力，使得等离子体维持在真空室内的预想位置？这里给出一个关于产生力平衡基本问题的简明的定性描述。
- 首先感兴趣的平衡是约束平衡，具体地说，是考虑右图(a)所示的真空室中的聚变等离子体的平衡。这里磁场的作用是将等离子体与真空室第一壁隔离，这样才能维持热等离子体和相对冷的壁。虽然物理目标明确，但磁流体力学方程可以有多种数学解，只需要那些与约束平衡有关的解。右图(b) ~ (d)给出了磁流体方程几组可能的数学解，其中只有一组显示的是好的约束，压强总是正的，且壁上压强为零。



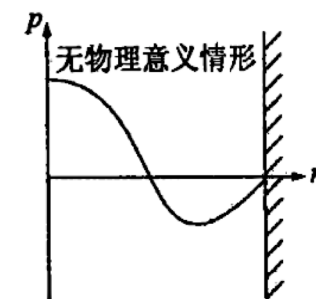
(a) 受约束的等离子体与壁隔离



(c) 非约束情形下的压强分布，
因为压强 $p(r)$ 在壁上不为零



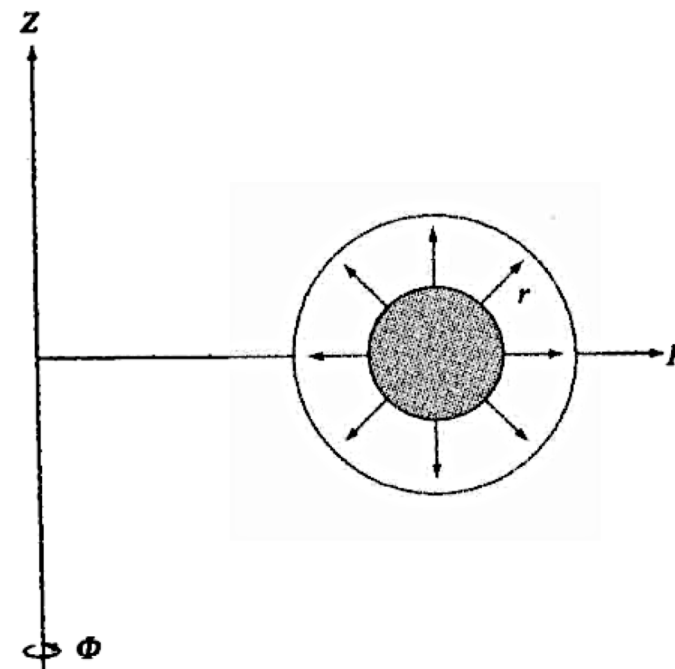
(b) 相应的约束情形下压强的分布



(d) 无物理意义的压强分布，
因为在等离子体内部区域 $p(r) < 0$

6.2 磁流体的平衡

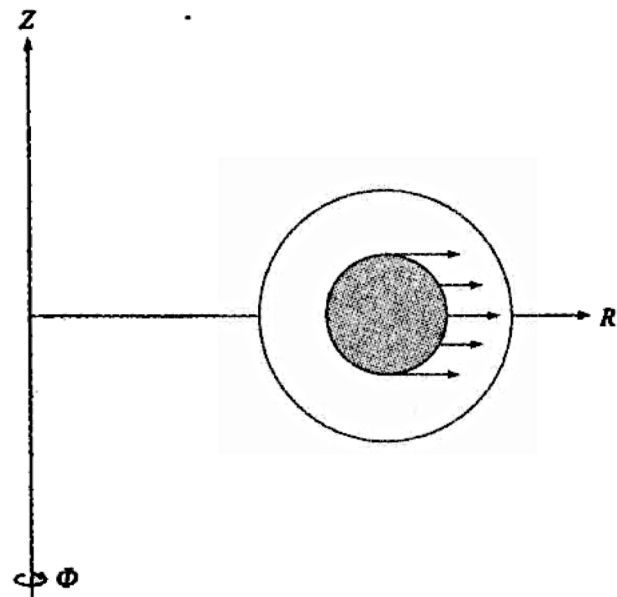
- 定性来看，环形结构中的磁流体力学平衡可分为两类：径向压强平衡和环向力平衡。径向压强平衡如右图所示。等离子体是一团芯部炽热的气体，具有沿小半径方向向外膨胀的趋势。为了平衡这种径向扩张力，就必须有磁场和电流。下面会看到，有两种最基本的磁场形态（“ θ 箍缩”和“Z箍缩”以及二者的综合）可以产生平衡所需的径向压强。需要指出的是，径向压强平衡问题对于环形位形和没有环效应的直线形位形都很重要。



在直线形和环形位形中沿小半径方向的向外的压强扩张力

6.2 磁流体的平衡

- 第二类平衡问题是环向力平衡。正如其名称所暗示的，它完全是由环形几何产生的，如右图所示。由于环效应，环向（即以 R 为半径绕 Z 轴的圆周方向）磁场和极向（即沿小圆截面圆周方向）磁场都不可避免地会产生将等离子体沿大半径 R 方向向外推的力。一些用来平衡沿环向向外的力的方法，以避免等离子体撞向第一壁，包括：在等离子体周围放置理想导体壁，外加“垂直场”和利用“环向螺旋”场。
- 将简化理想磁流体力学模型以便应用于平衡问题的讨论：从描述磁流体力学平衡的一些基本特征开始，在一维圆柱模型下研究径向力平衡问题，接下来再研究环向力平衡问题，并导出一个简单的近似关系式。这个关系式将给出携带环向电流的二维轴对称环面取得环向平衡的条件。最后，通过简单讨论给出在三维环向螺旋位形下实现环向力平衡的条件。这些结果将为讨论MHD稳定性奠定基础。



环形效应产生的沿大半径方向向外的力

6.2 磁流体的平衡

磁流体力学平衡模型

- 定量分析的第一步是简化磁流体力学模型以便用于处理平衡问题。这里的简化基于两个基本假设，它们定义了有关的磁流体力学平衡：①平衡等离子体中的所有物理量均与时间无关（ $\partial/\partial t = 0$ ）；②假定等离子体是静态的（ $v = 0$ ）。稳恒流体（ $v \neq 0$ ）静态平衡是可能的，但是在目前和以后的实验中不占主流，不是讨论的重点。
- 简化过程如下：基于上述假设，磁流体力学中质量和能量守恒很容易满足。理想欧姆定律要求 $E = 0$ ，反过来这也意味着法拉第定律自动满足。至于电阻性欧姆定律，仍然要保留一个小的电场，它产生一种时间尺度比磁流体力学时间尺度要慢的输运，但就眼下来说可以忽略该项。余下的非平庸方程相当于欧姆定律，确定了磁流体力学平衡模型：

$$\left. \begin{aligned} J \times B &= \nabla p \\ \nabla \times B &= \mu_0 J \\ \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- 这些方程描述了与聚变相关的所有磁场位形的平衡性质。

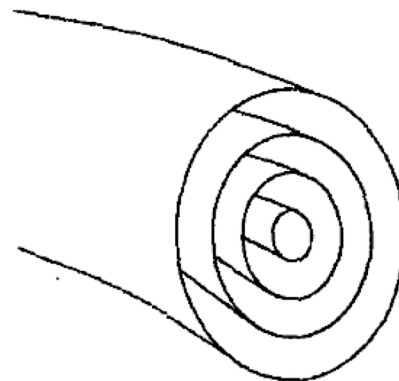
6.2 磁流体的平衡

磁通量面

- 在进行径向压强平衡与环向力平衡的定量讨论之前，可以先导出一些关于磁流体力学平衡的一般性质。第一个特性与磁通量面的概念有关。为了理解磁通量面概念，先来考虑已经取得等离子体约束平衡的等压面，如右图所示。由定义可知，矢量 ∇p 垂直于 p 的等压面。现在，用 \mathbf{B} 点乘磁流体力学动量方程的两边，可得：

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$$

- 上式表明，磁场线（即 \mathbf{B} 的平行线）必须在等压面上，即不存在垂直于等压面的 \mathbf{B} 分量。
- 因此，这些等压面也称为磁通量面。在约束完好的等离子体中，等压面与磁面重合，形成一系列封闭的巢状环向曲面。



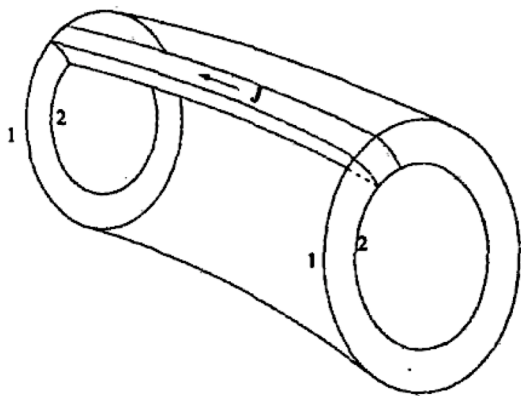
环向约束平衡下的等压面

6.2 磁流体的平衡 电流面

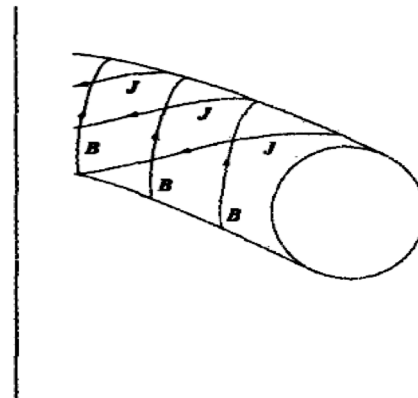
- 用 J 点乘磁流体力学动量方程的两边，很容易得到磁流体力学平衡的另一个一般性质：

$$J \cdot \nabla p = 0$$

- 即电流线也在等压面上。 J 没有垂直于等压面的分量，如左下图所示，这意味着电流在磁面之间流动而不穿过它们。需要注意的是，尽管 B 和 J 都在磁面上，但这并不意味着 B 和 J 平行。如右下图所示，一般来说， B 和 J 间的夹角是任意的，当然物理上也存在两者平行或者垂直这样的特殊情况。



电流在磁面1和2的两个不同环向位置之间流动而不穿过磁面



磁面显示，一般情形下 B 线和 J 线之间的夹角不是平行的

6.2 磁流体的平衡

磁压强和磁张力

- 最后一个一般性质与磁压强和磁张力有关。磁场以这两种形式来维持等离子体的受力平衡。有关的关系式可以通过安培定律消去动量方程中的 \mathbf{J} 并利用矢量恒等式 $\nabla(B^2/2) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ 得到。经过简单计算得到：

$$\nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B^2}{\mu_0} \boldsymbol{\kappa} = 0$$

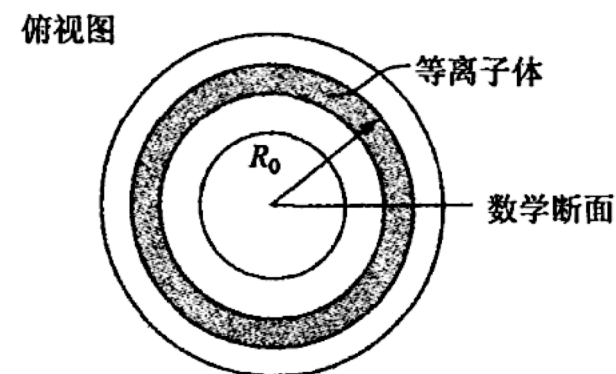
- 其中， $\nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla)$ 是梯度算符的垂直分量； $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$ 是曲率矢量。
- 上式描述了垂直于磁场方向的压力平衡。各项解释如下：显然 p 表示等离子体压强；通过类比， $B^2/2\mu_0$ 表示磁压强；最后一项 $(B^2/\mu_0)\boldsymbol{\kappa}$ 表示磁场线弯曲产生的张力。我们可以把磁场线想象成绕在木柱上张紧的橡皮圈来形象地描述这个力，在讨论径向压强平衡和环向力平衡时描述的磁压强和磁张力就是这样的范例。
- 总之，约束完好的聚变等离子体的等压面是一组闭合的嵌套环面。磁场线和电流密度线都在这些面上。等离子体平衡是在磁压强和磁张力两种机制共同作用下来维持的。

主要内容

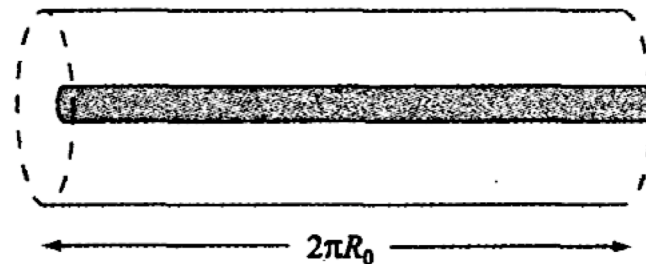
- 6.0 引言
- 6.1 磁流体方程
- 6.2 磁流体的平衡
- 6.3 径向压强平衡
- 6.4 环向力平衡
- 6.5 磁流体不稳定性物理图像
- 6.6 表面载流等离子体柱的稳定性

6.3 径向压强平衡

- 这里主要研究径向压强平衡问题。通过下述几何变换，分析得以大大简化。对于环形结构，可以从数学上将其沿极向剖开，然后将圆环取直，这样环形位形就等效为一直圆柱，如右图所示。很明显，直圆柱中不存在环向力平衡问题。而且，如果等离子体截面是一个圆，则问题简化为所有物理量仅与小半径 r 有关的一维问题。
- 利用这个模型，可以研究以下几种简单位形： θ 箍缩、 Z 箍缩和螺旋箍缩。这些位形展示了如何利用磁压强和磁张力来实现径向压强平衡。并且，通过分析给出等离子体比压 β 的准确定义。



(a) 环形结构俯视图，图中标出了数学断面



(b) 等效直圆柱

6.3 径向压强平衡 θ 箍缩

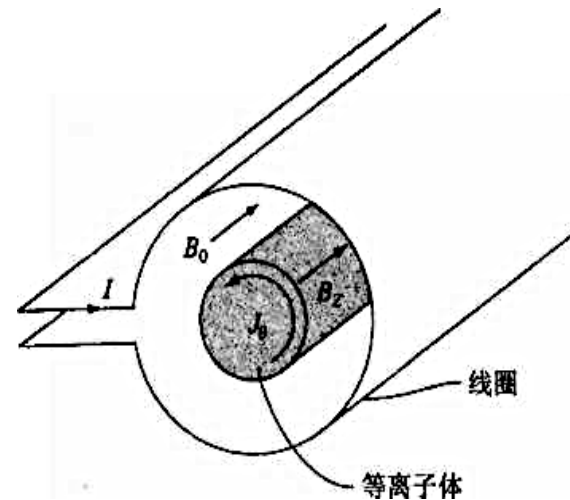
- 右图是 θ 箍缩的几何结构、磁场分量以及线圈中电流的示意图。电流在线圈内产生外部“环向”磁场 B_0 。外加磁场在等离子体中感应出“极向”电流，其方向旨在于抵消外加磁场。非平庸变量有： $p = p(r)$ ， $\mathbf{B} = B_z(r)\mathbf{e}_z$ 和 $\mathbf{J} = J_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$ （因为电流密度沿 θ 方向，故名 θ 箍缩）。
- 问题：在理想磁流体力学方程约束下，这种几何位形能否实现约束平衡？
 - 首先，由于对称性， $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 自动满足。其次，安培定律简化为： $\mu_0 J_\theta = -\frac{dB_z}{dr}$ ；
 - 将 J_θ 代入动量方程（ $p' = J_\theta B_z$ ），可以得到 p 和 B_z 之间的一个简单关系：

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = 0$$

- 对方程积分可得：

$$p(r) + \frac{B_z^2(r)}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

- 式中常量 $B_0^2/2\mu_0$ 是外加磁压强。



θ 箍缩示意图

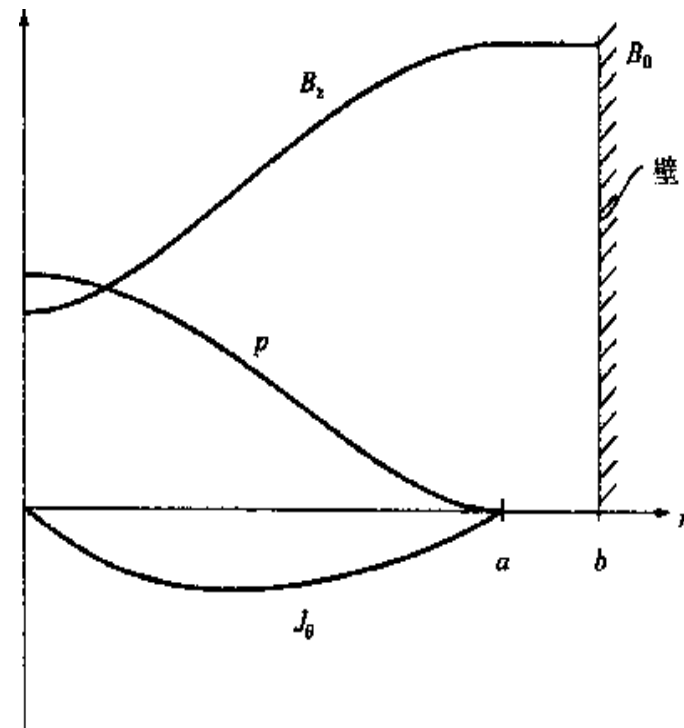
6.3 径向压强平衡 θ 箍缩

- 上式即 θ 箍缩的径向压强基本平衡关系式。它表明，在任意半径 r 处，局部等离子体压强与内部磁压强之和与外加磁压强相平衡。从 θ 箍缩的受力平衡关系式可知， θ 箍缩的压强平衡关系容许很宽范围的约束平衡，其中压强分布呈中间高向两边单调递减至零的特点。典型例证如右图所示。需要指出的是，由于 $B_z(0)$ 是任意的，因此，比压 β 的峰值

$$\beta_0 \equiv 2\mu_0 p(0) / [2\mu_0 p(0) + B_z^2(0)]$$

的变化范围是 $0 < \beta_0 < 1$ 。

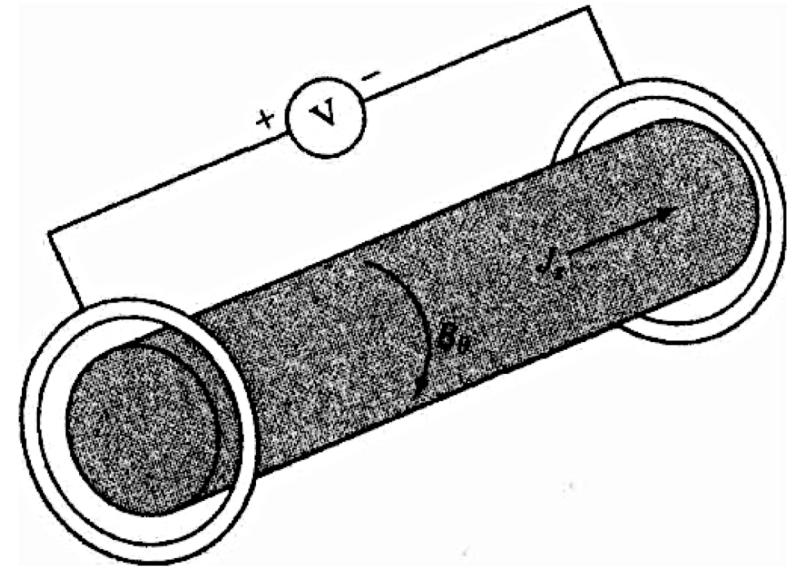
- 由此可知， θ 箍缩位形能够实现径向压强平衡，约束机制由磁压强提供。



典型的 θ 箍缩参数分布

6.3 径向压强平衡 Z箍缩

- Z箍缩是对 θ 箍缩的一种互补位形，其几何结构如右图所示。两个理想电极驱动沿Z方向的“环向”电流，电流感应出沿 θ 方向的“极向”磁场（因为电流密度沿Z方向，故名Z箍缩）。因此，该位形涉及的非平庸变量是： $p = p(r)$ ， $\mathbf{B} = B_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$ 和 $\mathbf{J} = J_z(r)\mathbf{e}_z$ 。
- 现在的目标是弄清楚这种几何结构能否维持约束平衡。



Z箍缩示意图

6.3 径向压强平衡 Z箍缩

- 分析也很简单。由于对称性， $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 自动满足。安培定律简化为含 J_z 的关系式：

$$\mu_0 J_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta)$$

- 将此式代入动量方程（ $p' = -J_z B_\theta$ ）可得压力平衡关系式：

$$\frac{dp}{dr} + \frac{B_\theta}{\mu_0 r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = 0$$

- 对 $r B_\theta$ 求导后可得更直观的形式。经过简单计算，改写后的 Z 箍缩压强平衡关系式可写成：

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = 0$$

6.3 径向压强平衡 z 箍缩

- 上述各项从左至右依次为等离子体压强、磁压强和磁张力。一般来说箍缩平衡方程并不能像 θ 箍缩平衡方程那样进行简单积分。即使这样，通过下述的一个例子可以轻易地阐明这种约束平衡。假设一种物理上合理的电流密度分布为 $J_z(r)$ 在轴上最大，并在 $r = a$ 处单调递减至零：

$$J_z(r) = \begin{cases} \frac{2I}{\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & 0 < r < a \\ 0 & a < r < b \end{cases}$$

- 上式中， $J_z(r)$ 前面的系数由等离子体中的总电流 $I = \int J_z dS$ 确定。对安培定律积分，很容易得到 $B_\theta(r)$ 的表达式：

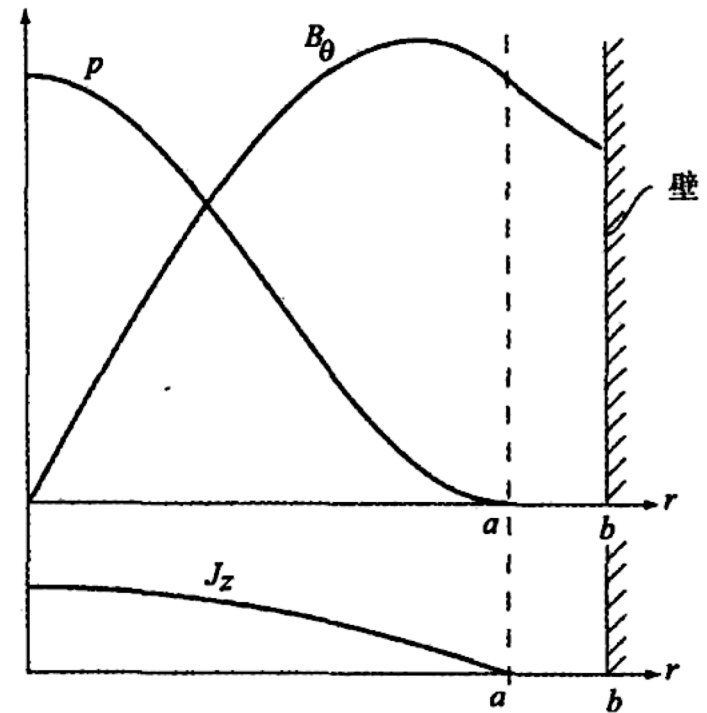
$$B_\theta(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{\pi a} \left(\frac{r}{a} - \frac{r^3}{2a^3}\right) & 0 < r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & a < r < b \end{cases}$$

6.3 径向压强平衡 Z箍缩

- 最终，通过对压强平衡关系式积分可得出压强分布。简单计算后得到：

$$p(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I^2}{12\pi^2 a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 \left(5 - 2\frac{r^2}{a^2}\right) & 0 < r < a \\ 0 & a < r < b \end{cases}$$

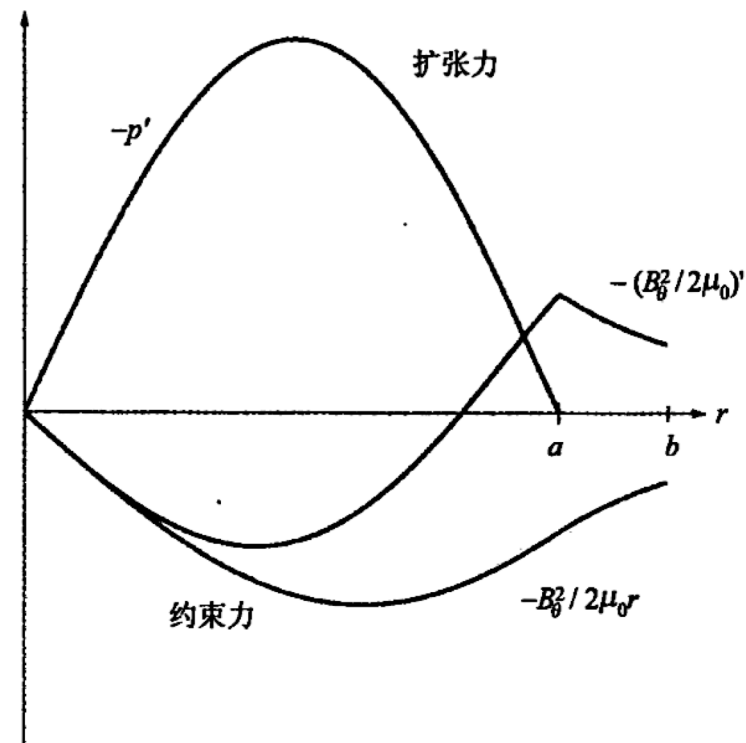
- 这些量的分布如右图所示。很明显，一种压强分布对应于一种约束平衡。如果在Z箍缩中将比压 β 的峰值定义为 $\beta_0 \equiv 2\mu_0 p(0) / [2\mu_0 p(0) + B_\theta^2(0)]$ ，由于 $B_\theta(0) = 0$ ，因此所有分布的零点比压为1，即 $\beta_0 = 1$ 。尽管高比压 β_0 可能较好，但就此而言 θ 箍缩比Z箍缩更加灵活。



典型的Z箍缩分布

6.3 径向压强平衡 Z箍缩

- 最后，不妨将Z箍缩平衡方程中三个力沿径向的分布绘制在一张图上，如右图所示。需要指出的是，力为负表示方向向内，对应于约束力。
- 由图可知，等离子体外边界附近，仅有磁张力产生约束力，而粒子压强和磁压强均产生方向向外的扩张力。由此可知箍缩位形能够实现径向压强平衡。等离子体平衡通过磁张力得以维持。



Z箍缩的径向力（在等离子体外侧区域，仅磁张力起约束作用）

6.3 径向压强平衡 螺旋箍缩

- 螺旋箍缩是 θ 箍缩和 z 箍缩的任意组合。在这种位形中，磁场线如螺旋线般缠绕在磁面上，因此得名螺旋箍缩。每一种与聚变相关的磁场位形都对应于螺旋箍缩的一种径向压强平衡方程。
- 螺旋箍缩的分析也很简单。其非平庸变量是 p ， $\mathbf{B} = B_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + B_z(r)\mathbf{e}_z$ 和 $\mathbf{J} = J_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + J_z(r)\mathbf{e}_z$ 。和前面一样， $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 自动满足。包含总电流密度的安培定律为：

$$\mu_0 \mathbf{J} = -\frac{dB_z}{dr} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) \mathbf{e}_z$$

- 将此式代入动量方程（ $p' = J_\theta B_z - J_z B_\theta$ ），可得通用的螺旋箍缩压强平衡关系式：

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = 0$$

6.3 径向压强平衡

螺旋箍缩

- 一般来说，在磁流体力学中，可以任意规定两个函数，比如 $B_\theta(r)$ 和 $B_z(r)$ ，然后来确定第三个函数，在此情形下就是 $p(r)$ 。由于两个函数的选择是任意的，所以螺旋箍缩能够描述的平衡位形有很多。这两个自由函数有明确的物理意义，因为实验上可以对环向磁场线圈和极向场线圈中的电流进行独立设定。一旦磁流体力学稳定性已知，就可以为各种位形提供完整的磁流体力学图像。

6.3 径向压强平衡

螺旋箍缩中比压的一般定义

- 这里导出通用的径向压强平衡关系，并用它来定义等离子体比压“ β ”。这一关系非常有用，因为它只与压强和磁场的积分平均值有关，对二者的具体分布细节不敏感。对压强平衡方程做如下的积分平均即可得到这一关系：

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a r^2 dr \left[\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \right] = 0$$

- 式中， a 是等离子体半径位置，在此处，等离子体压强和电流密度变为零。
- 对此式中各项进行分部积分并化简。于是压强项简化为：

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a r^2 \frac{dp}{dr} dr = -\frac{2}{a^2} \int_0^a p r dr \equiv -\langle p \rangle$$

6.3 径向压强平衡

螺旋箍缩中比压的一般定义

- 很明显，这个压强项表示压强平均值。“环向”场项可以改写为：

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) dr = \frac{B_{za}^2}{2\mu_0} - \frac{2}{a^2} \int_0^a \left(\frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) r dr \equiv -\frac{1}{2\mu_0} (B_{za}^2 - \langle B_z^2 \rangle)$$

- 式中， $B_{za}^2/2\mu_0$ 是外加环向磁压强； $\langle B_z^2/2\mu_0 \rangle$ 是内部环向磁压强的平均值。如果 $\langle B_z^2/2\mu_0 \rangle < B_{za}^2/2\mu_0$ ，此时环向磁场是逆磁的，有助于约束等离子体， θ 箍缩就是这种情况。另一方面，如果 $\langle B_z^2/2\mu_0 \rangle > B_{za}^2/2\mu_0$ ，此时环向磁场是顺磁的，和压强一样提供径向扩张力。这种情况下，为了平衡这两个扩张力，需要增加极向磁张力。最后，“极向”场的贡献化简如下：

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a r^2 dr \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \right] = \frac{1}{a^2} \int_0^a dr \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = \frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0}$$

- 和环向等离子体电流 I 有关的关系式：

$$B_{\theta a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

6.3 径向压强平衡

螺旋箍缩中比压的一般定义

- 综上可得总的径向压强平衡关系式为：

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2u} (B_{za}^2 - \langle B_z^2 \rangle + B_{\theta a}^2)$$

- 提醒一下，比压 β 是衡量等离子体约束效率的参数，其定义如下：

$$\beta = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{za}^2 + B_{\theta a}^2}$$

- 在文献中经常出现环向比压 β_t 和极向比压 β_p 概念，它们的定义分别为：

$$\left. \begin{aligned} \beta_t &= \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{za}^2} \\ \beta_p &= \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{\theta a}^2} \end{aligned} \right\}$$

6.3 径向压强平衡

螺旋箍缩中比压的一般定义

- 三者之间的关系为：

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_t} + \frac{1}{\beta_p}$$

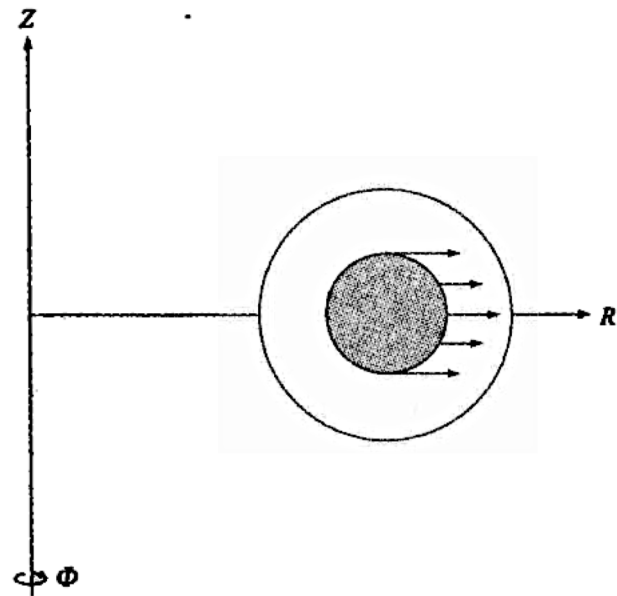
- 由上式可知，总比压 β 由环向比压 β_t 和极向比压 β_p 中较小的那个决定。由定义可知， $\beta \leq 1$ 。然而， β_t 或者 β_p 最多有一个能超过1。在比较不同磁约束位形时，这些概念很重要，并且很容易将它们推广到非圆截面环形位形中。
- 介绍了利用环向磁场、极向磁场或者二者的结合来实现磁约束位形中的径向压强平衡。而且，除了明显有 $\beta \leq 1$ 之外，比压 β 的值没有上限。

主要内容

- 6.0 引言
- 6.1 磁流体方程
- 6.2 磁流体的平衡
- 6.3 径向压强平衡
- **6.4 环向力平衡**
- 6.5 磁流体不稳定性物理图像
- 6.6 表面载流等离子体柱的稳定性

6.4 环向力平衡概述

- 为了避免终端损失，聚变等离子体必须约束在环形结构中。在这种情况下，将直圆柱结构弯成环状结构将产生三个新的沿大半径方向（即 R 方向）向外的环向力，如右图所示。这些力和受其影响的位形分别如下：
 - 环力（ Z 箍缩）；
 - 车胎力（ Z 箍缩， θ 箍缩）；
 - $1/R$ 力（ θ 箍缩）。
- 如果要维持等离子体环向力平衡，需要外加的力来平衡这些沿径向 R 向外的力。分析显示， Z 箍缩自身能提供所需的平衡力，也就是说， Z 箍缩具有很好的环向平衡性，因此可以很方便地弯成环状结构。但是，纯粹 Z 箍缩的磁流体力学稳定性很差。



环形效应产生的沿大半径方向向外的力

6.4 环向力平衡

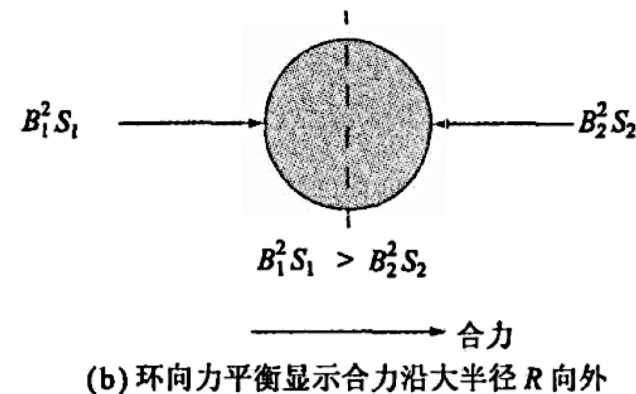
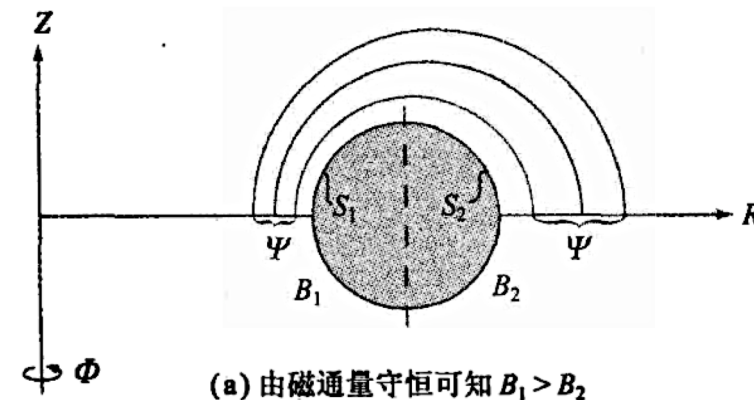
概述

- 但纯粹 θ 箍缩则刚好相反。在 θ 箍缩中很难添加一个沿径向向内的回复力。也就是说，纯粹 θ 箍缩的环向平衡性很差，很难弯成环状结构。但另一方面，直线型 θ 箍缩具有良好的磁流体力学稳定性。 θ 箍缩和Z箍缩之间的这种截然不同的特性使得人们考虑开发出具有环向磁场和极向磁场优化组合的位形（即螺旋箍缩）来研究聚变磁流体力学的平衡，这些位形能在环向高比压平衡的条件下稳定约束等离子体。
- 下面定性描述这三种环向力，并尽可能给出相应的对抗力的方法。通过简单计算来对环向力平衡中各项进行半定量评估。讨论主要就二维轴对称平衡进行。

6.4 环向力平衡

环力

- 环力 (hoop force) 类似于圆环导线中电流产生的向外扩张力。这里电流对应于等离子体中的环向电流。由于涉及环向电流，因此这里的环力是由弯成环状的Z箍缩产生的。
- 环力的来源可以参考右图 (a)。图中显示的是环形Z箍缩，其中的等离子体被分成两半。内侧部分和外侧部分的曲面面积分别为 S_1 和 S_2 。显然， $S_1 < S_2$ ，因为内侧曲面的大半径的平均值比外侧的要小。

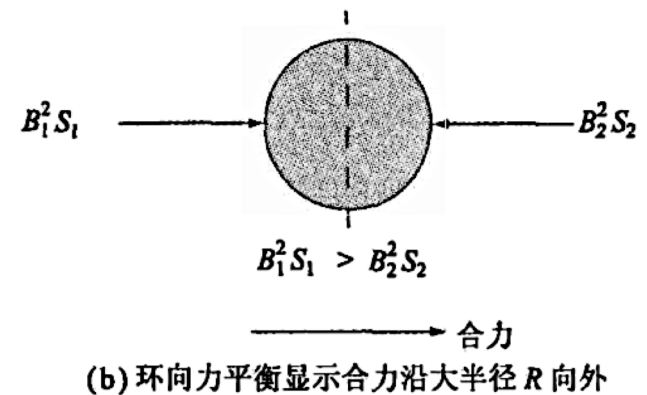
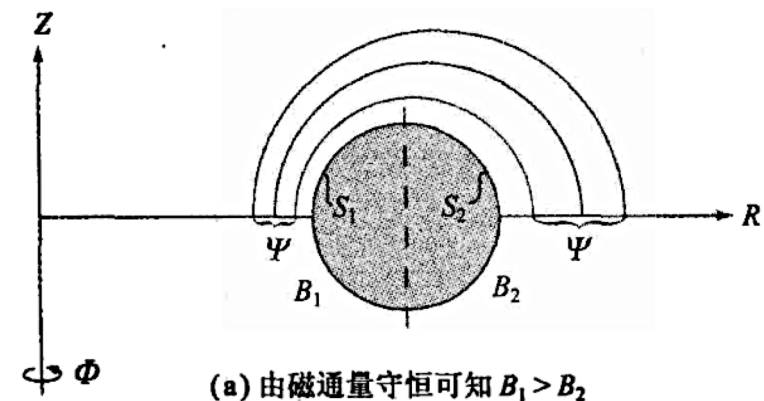


环力定性分析

6.4 环向力平衡

环力

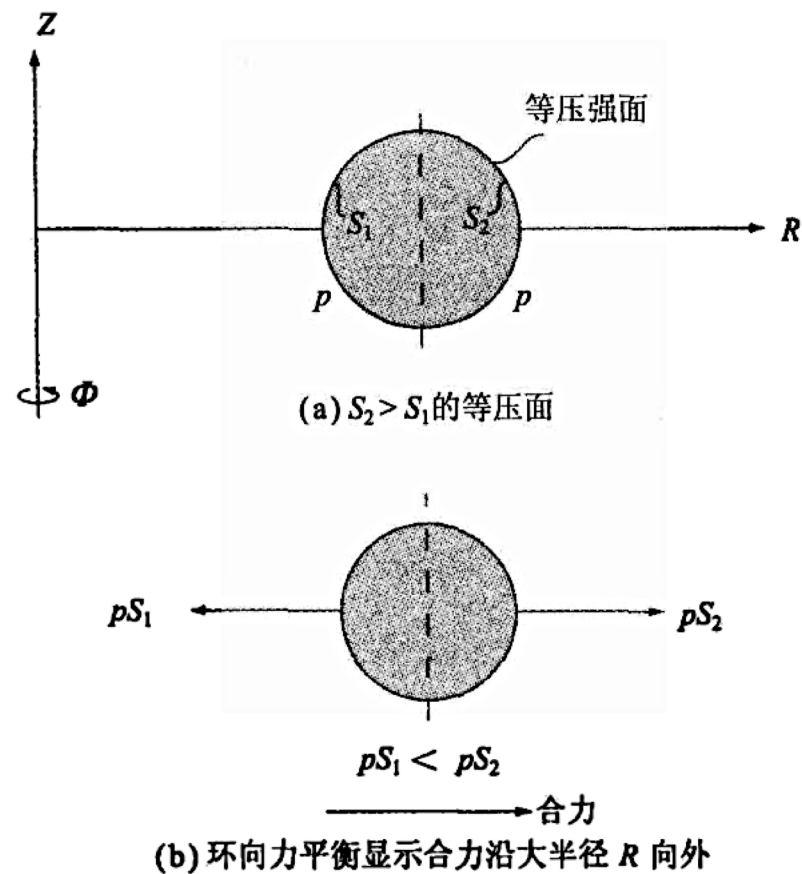
- 如图所示，环向电流感应出极向磁场。由磁通量守恒可知，处于环面外侧的给定的极向磁通量 Ψ 在转到环面内侧时将被挤压在较小的截面内。这意味着内侧磁场的磁感应强度要比外侧磁场的大： $B_1 > B_2$ 。磁场线在环面的内侧更紧密。
- 如右图 (b) 所示，现在分析每一半等离子体所受的磁张力。作用在内侧曲面的磁张力是： $F_1 = (B_1^2/2\mu_0)S_1$ ，方向沿大半径 R 向外；类似地，作用在外侧曲面的磁张力是： $F_2 = (B_2^2/2\mu_0)S_2$ ，方向沿大半径 R 向内。
- B 的二次方关系决定了等离子体的受力大小。由此可知， $F_1 > F_2$ 。环向电流产生一个沿大半径 R 向外的合力，这就是所谓的环力。



环力定性分析

6.4 环向力平衡 车胎力

- 顾名思义，车胎力类似于下述情形：充气车胎内的气压在胎的外侧产生的压力要比内侧的大。联系到等离子体气体压强，可知 Z 箍缩和 θ 箍缩中均可产生这种车胎力。
- 这种力的来源可参考右图（a）来理解。图中显示等压面被分成两部分。压强对内半部分表面 S_1 的作用力是 $F_1 = pS_1$ ，方向沿大半径 R 向内；压强作用在外半部分表面 S_2 的力是 $F_2 = pS_2$ ，方向沿大半径 R 向外。
- 合力示意图如右图（b）所示。很明显， $F_2 > F_1$ 。在等压面上，力的大小由表面积大小决定。所以，车胎力的合力方向沿大半径 R 向外。

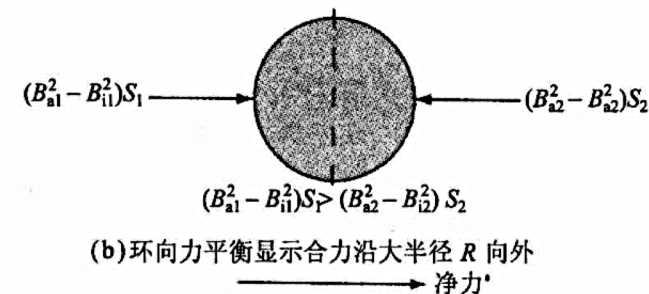
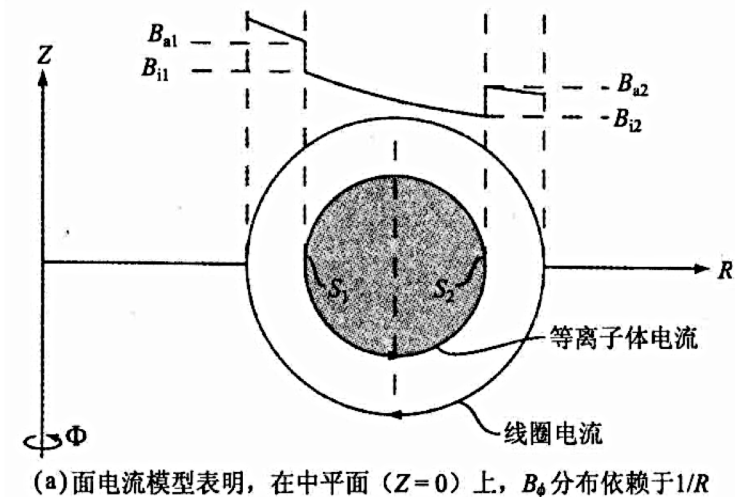


车胎力定性分析

6.4 环向力平衡 I/R 力

- 顾名思义，“ $1/R$ ”力的出现是由于环形位形而产生的环向磁场的 $1/R$ 依赖关系。由于仅涉及环向磁场，因此这种力只存在于 θ 箍缩中而不是 Z 箍缩中。
- 演示 $1/R$ 力的简单模型如右图 (a) 所示。图中环形 θ 箍缩由围绕环面的一组电流为 I_c 的线圈产生。为简单起见，假设等离子体电流 I_p 以面电流形式存在。也就是说，所有的电流都在等离子体表面无限薄的层间流动。所需磁场 B_a 具有 $1/R$ 依赖关系，它由对沿线圈和等离子体之间的任意闭合环路运用积分的安培定律给出：

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R B_{\phi a} = \mu_0 I_c \left\{ \begin{array}{l} B_{\phi a} = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi R} \end{array} \right.$$



$1/R$ 力定性分析

6.4 环向力平衡 I/R 力

- 等离子体电流的作用通常是抗磁性的，即它在等离子体内部感应出的磁场部分抵消了外加磁场。在面电流模型中，通过安培定律可知，等离子体内部净的环向磁场 $B_{\phi i}$ 也具有 $1/R$ 依赖关系：

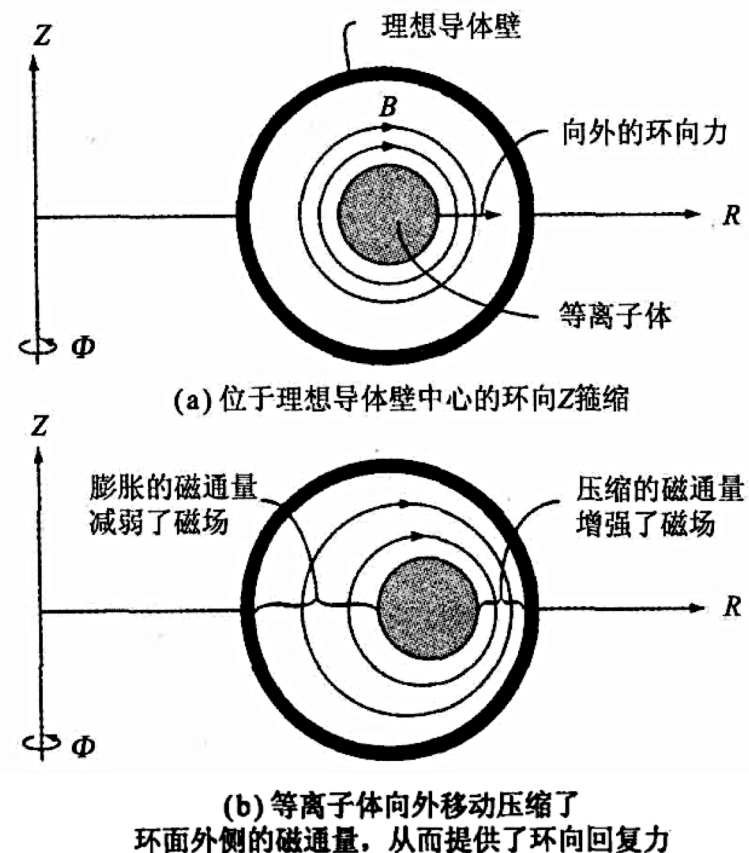
$$\left. \begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= 2\pi R B_{\phi i} = \mu_0 (I_c - I_p) \\ B_{\phi i} &= \frac{\mu_0 (I_c - I_p)}{2\pi R} \end{aligned} \right\}$$

- $1/R$ 力可按如下方式来理解：将等离子体分成上图 (b) 所示的两半，作用在等离子体内侧半边上的力等价于净压强与面积的乘积： $F_1 = \left[(B_{\phi a}^2 - B_{\phi i}^2)_{R=R_1} / 2\mu_0 \right] S_1$ 。类似地，等离子体外侧的受力为： $F_2 = \left[(B_{\phi a}^2 - B_{\phi i}^2)_{R=R_2} / 2\mu_0 \right] S_2$ 。考虑到 B 力的二次方关系以及 B 的 $1/R$ 效应， R_1 处的磁场要比 R_2 处的大，因此 $F_1 > F_2$ 。合力沿大半径 R 向外。需要指出的是，这个结果由于抗磁性 ($B_{\phi a}^2 > B_{\phi i}^2$) 而得到的。相反，在顺磁性 ($B_{\phi a}^2 < B_{\phi i}^2$) 情形下，环向力沿大半径 R 向内。如前所述，这个力自身不能达到环向力平衡，因为它阻碍了径向压强平衡的建立。

6.4 环向力平衡

理想导体壁提供的回复力

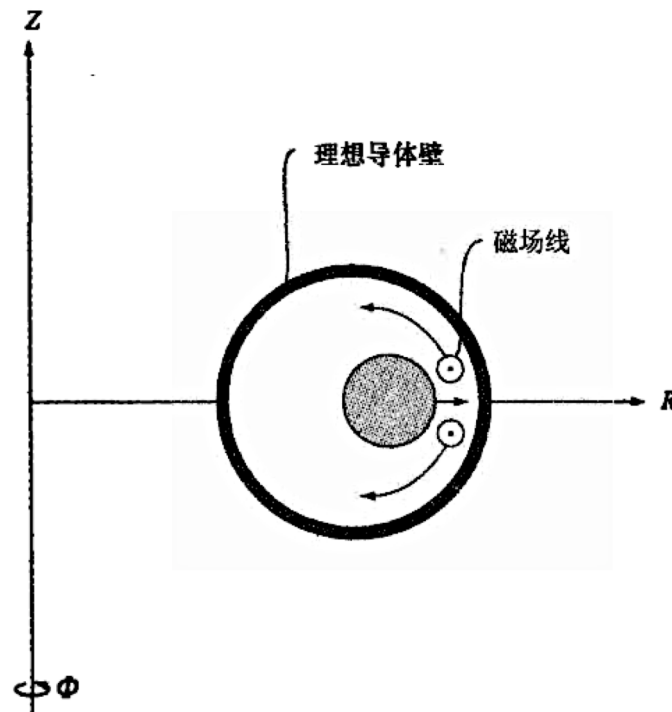
- 所有的环向等离子体都承受着沿大半径 R 向外的环向力。为了实现环向力平衡，需要一个沿大半径 R 向内的回复力。一般来说，对于存在环向电流（即 Z 箍缩和螺旋箍缩）的位形，可以通过两种方法产生回复力：理想导体壁和外加垂直场。但是，这些方法对 θ 箍缩都无效。
- 理想导体壁产生回复力的机理：考虑位于理想导体壁中心的环向等离子体，如右图（a）所示。等离子体由于受到指向外的几种环向力的合力，很自然地会沿大半径 R 方向向外运动。与此同时，导体壁会相应的感应出涡流。这样位于等离子体和导体壁之间的极向磁通量就会被压缩，如右图（b）所示。磁通的压缩意味着等离子体外侧的极向磁场增强。随着等离子体继续向外运动，它最终将会达到这样一个平衡点，在这一点处，等离子体外侧的磁张力大到足以抵消向外的环力、车胎力和 $1/R$ 力。由此在该点处环向力平衡得以实现。



6.4 环向力平衡

理想导体壁提供的回复力

- 原理上可行，但是利用理想导体壁达到环向力平衡却不太实际。这是因为在实际情况中，聚变等离子体自身的高温，以及聚变反应释放的大量中子都不允许第一壁采用超导材料。如果第一壁的电导率有限，事实也肯定如此，那么随着等离子体向外移动，极向磁通量最终也将通过壁扩散开来。等离子体和壁之间不可能无限制地容纳不断增加的磁通量。
- 最后需要指出的是，即使是理想导体壁，这种机理也对 θ 箍缩无效。这是因为在 θ 箍缩中不存在极向磁场，如右图所示。这种位形仅存在环向磁场，且等离子体在向外移动的同时，也推开了移动路径上的磁场线。

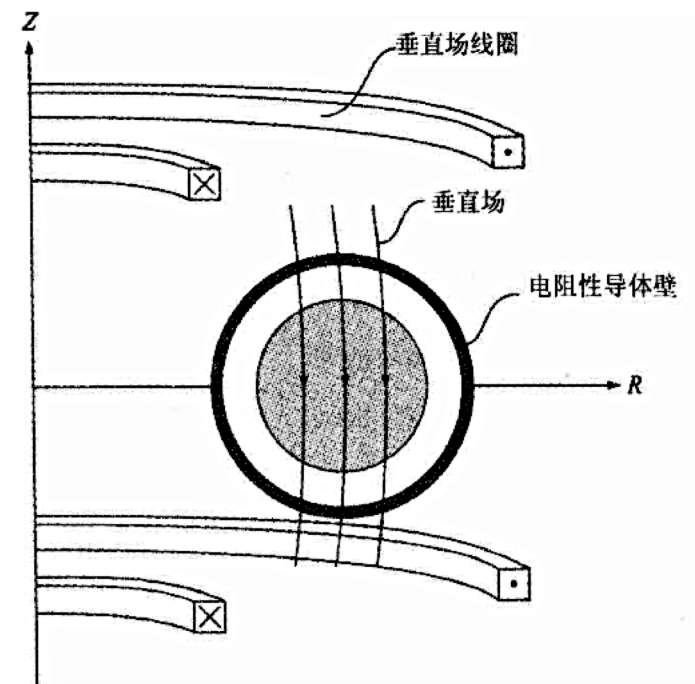


在环向 θ 箍缩中，等离子体向外移动的同时也推开了移动路径上的磁场线，等离子体和导体壁之间不存在捕获的磁通量。

6.4 环向力平衡

垂直场提供的回复力

- 对于存在环向电流的位形，产生回复力更实际的方法是通过外加垂直场，如右图所示。
- 只要正确选择垂直场的大小和符号，它就能提供一个向内的回复力来实现环向力平衡。

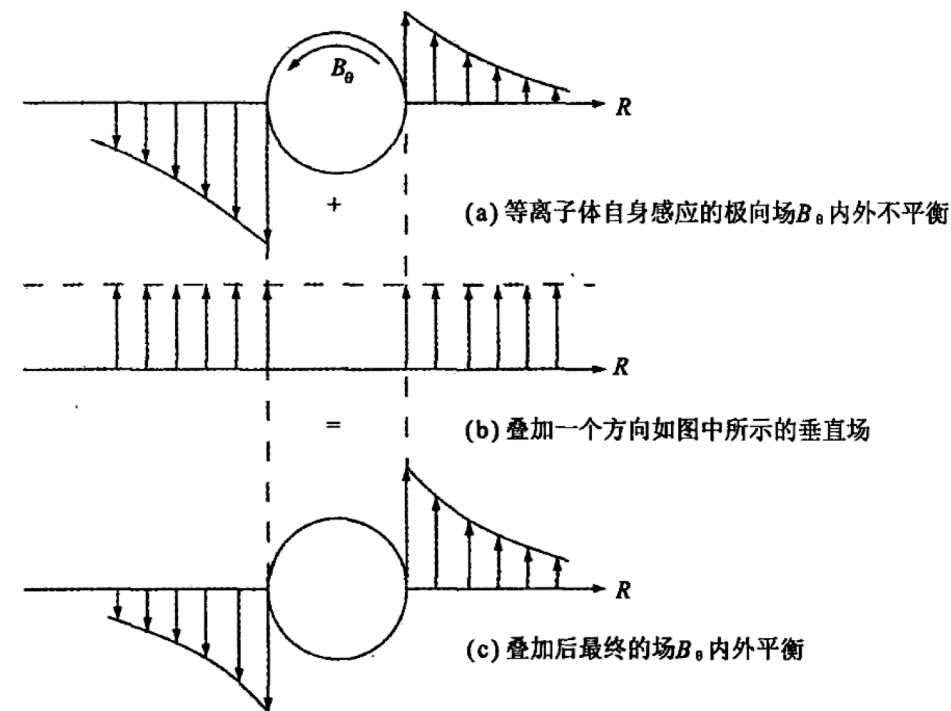


利用外加垂直场实现Z箍缩或者螺旋箍缩中的环向力平衡

6.4 环向力平衡

垂直场提供的回复力

- 右图有助于理解它的机理。右图 (a) 显示的是在 $Z = 0$ 的中平面上等离子体自身的极向磁场的大小和方向。由于 $1/R$ 效应，环外侧的极向磁场较小。现在叠加一个方向如右图 (b) 中所示的单一的垂直场。注意到外加垂直场与环外侧场同向而与内侧场反向。适当调整垂直场大小，使得环内侧和外侧最终的极向场平衡，如右图 (c) 所示。这样的话，环向力平衡也相应实现。



垂直场提供回复力的物理图像

6.4 环向力平衡

垂直场提供的回复力

- 在Z箍缩和螺旋箍缩中利用外加垂直场实现环向力平衡已经应用于很多实验。能实际应用的一个主要原因是垂直场线圈可以放置于第一壁外。第一壁能阻止射线对线圈的损伤。外加线圈也需要第一壁具有有限的电导率，只有这样，垂直场才能穿过第一壁而作用于等离子体。如果第一壁是理想导体，由于磁场无法作用于等离子体，外加线圈也无法发挥功用。
- 最后，需要指出的是，外加线圈对 θ 箍缩也无效。这是因为 θ 箍缩中的电流和垂直场都沿极向，磁场力 $\mathbf{J}_\theta \times \mathbf{B}_v$ 没有 \mathbf{e}_R 分量，也就无法平衡环向力。

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

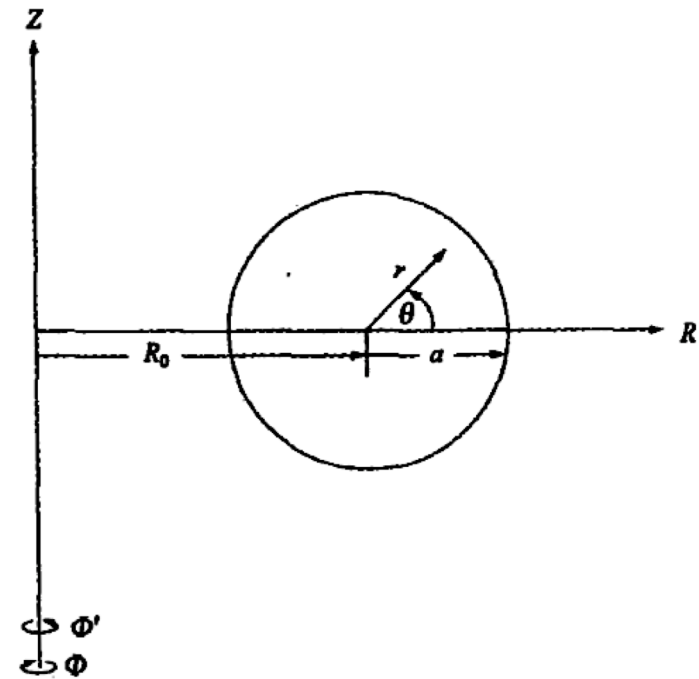
- 在前面定性分析的基础上，这里将通过简单计算定量分析各力对环向力平衡的贡献。主要目的是评估环向力平衡所必需的垂直场的大小，并证明在 θ 箍缩中无法实现环向平衡。
- 计算所依据的基本思想是利用一般的磁流体力学平衡关系来估计作用在等离子体上的净的 \mathbf{e}_R 力。通过假定等离子体具有圆截面和大的环径比 ($R_0/a \gg 1$)，可将计算简化。采用能提供对环效应适当精确描述的简单磁场模型，则分析可进一步简化。

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

■ 1. 模型

- 基本模型由这样一种环形等离子体组成，其等压面是一组逐层嵌套的准同轴的圆： $p = p(r)$ 。几何结构如右图所示。现在考虑磁场。在直圆柱情形下，作用在等离子体上的磁场的形式为： $\mathbf{B} = B_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + B_z(r)\mathbf{e}_z$ 。在环面情形下，磁场需要进行环效应修正。前文指出，由于环效应，环向场随 $1/R$ 变化。综合考虑到径向压强平衡和环向力平衡特征，环向场的好的近似为 $B_\phi \approx B_\phi(r)(R_0/R)$ 。



用以计算环向力平衡的环形几何结构

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

- 由于极向磁场也沿大半径方向递减，所以对极向场也可采用类似的假定： $B_\theta = B_\theta(r)(R_0/R)$ 。环形结构中的极向场形式实际上相当复杂（例如，它包括 B_r 分量以及双极逆磁分量）。然而，上述简化抓住了物理本质，而且对最终结果造成的误差很小。整个极向场还必须包含外加垂直场（ $\mathbf{B}_V = B_V \mathbf{e}_z$ ，且 B_V 为常量）的贡献。这个场用来维持等离子体环向力平衡。

- 综上所述，用以决定环向力平衡的压强和磁场的简化形式如下：

$$\left. \begin{aligned} p &= p(r) \\ \mathbf{B} &= \frac{R_0}{R} B_\phi(r) \mathbf{e}_\phi + \frac{R_0}{R} B_\theta(r) \mathbf{e}_\theta + B_v \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\}$$

- 将磁场表达式代入一般的磁流体力平衡方程。提取 \mathbf{e}_R 分量并对其进行整个等离子体-真空室体积上的空间积分，以确定环向力平衡的条件。对全空间积分比仅对等离子体体积积分更有益，因为这样可以免去进行准确计算等离子体表面极向场的麻烦。这个场比模型中的表达式要复杂得多。具体来说，对于环向力平衡，需要计算：

$$\int \mathbf{e}_R \cdot [\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p] d\mathbf{r} = 0$$

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

- 为了估计被积函数，引入“准柱形”坐标系 (r, θ) 代替 (R, Z) :

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 + r \cos \theta \\ Z &= r \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

- 经过简单计算，得到：

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \frac{R_0}{R} \frac{\partial B_\phi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_0}{R} r B_\theta \right) \mathbf{e}_\phi$$

- 和

$$\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\cos \theta \left[\frac{R_0^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\phi^2}{2\mu_0} \right) + \frac{R_0}{R} \frac{B_\theta}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_0}{R} r B_\theta \right) \right] - \frac{B_V}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_0}{R} r B_\theta \right)$$

- 这个简易模型可用来计算环向力平衡中各部分的贡献。

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

■ 2. 车胎力 F_p

- 车胎力源于式 $\int \mathbf{e}_R \cdot [\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p] d\mathbf{r} = 0$ 中的压强项，表达式如下：

$$F_p = -\int (\mathbf{e}_R \cdot \nabla p) d\mathbf{r} = -2\pi \int \left(\frac{\partial p}{\partial r} \cos\theta \right) R r dr d\theta$$

- 式中利用了轴对称环中的关系式： $d\mathbf{r} = 2\pi R r dr d\theta$ 。接下来，利用 $R = R_0 + r \cos\theta$ ，并注意到 θ 积分时，含 R_0 项积分为零。对剩余项简单积分可得车胎力表达式：

$$F_p = -2\pi^2 \int_0^a r^2 \frac{\partial p}{\partial r} dr = 2\pi^2 a^2 \langle p \rangle$$

- 由上式可知，车胎力恒为正，这意味着力的方向沿大半径 R 向外。

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

■ 3. $1/R$ 力 F_{B_ϕ}

- $1/R$ 力源于环向磁场。由环向力平衡方程中 B_ϕ 项得到 $1/R$ 力表达式如下：

$$F_{B_\phi} = -\frac{\pi R_0^2}{\mu_0} \int \left(\frac{\partial B_\phi^2}{\partial r} \right) \frac{\cos \theta}{R} r dr d\theta$$

- 假设 $r/R_0 \ll 1$ ，然后按大环径比展开，得到上述积分。具体展开式为：

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{R_0} \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right)$$

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

- 通过积分得到 $1/R$ 力表达式如下：

$$F_{B_\phi} = \frac{\pi^2}{\mu_0} \int_0^a r^2 \frac{\partial B_\phi^2}{\partial r} dr = 2\pi^2 a^2 \left(\frac{B_{\phi a}^2}{2\mu_0} - \frac{\langle B_\phi^2 \rangle}{2\mu_0} \right)$$

- 其中， $B_{\phi a}$ 为 $R = R_0$ 处（此处没有等离子体）的外加环向场。与定量分析的结论一致，当环向场是逆磁的，即 $B_{\phi a}^2 > \langle B_\phi^2 \rangle$ 时， $1/R$ 力方向沿大半径 R 向外（即是正的）；当环向场是顺磁性时， $1/R$ 力方向沿大半径 R 向内。

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

■ 4. 环力 F_I

- 环力是由环向力平衡方程中与极向场 B_θ 平方相关项引起的。表达式为：

$$F_I = -\frac{2\pi R_0}{\mu_0} \int B_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_0}{R} r B_\theta \right) \cos\theta dr d\theta$$

- 和前面的力一样，先按大环径比展开，再对 θ 积分。经过简单计算可得：

$$F_I = \frac{2\pi^2}{\mu_0} \int_0^\infty B_\theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_\theta) dr = \frac{\pi^2}{\mu_0} \left(r^2 B_\theta^2 \Big|_\infty + 2 \int_0^\infty r B_\theta^2 dr \right) = \frac{\pi^2 a^2}{\mu_0} \left(B_{\theta a}^2 + \frac{2}{a^2} \int_0^\infty r B_\theta^2 dr \right)$$

- 对于约束在 $r < a$ 内的电流，上式利用了关系式： $r B_\theta|_\infty = \mu_0 I / 2\pi = \alpha B_{\theta a}$ 。对 r 的积分稍微复杂些。这是因为虽然假定等离子体电流密度在 $r = a$ 为零，但是对于 $r > a$ 部分，仍然存在正比于 I/r 的真空极向磁场。这将使 $r \rightarrow \infty$ 时积分出现对数发散。实际上，这个积分是有限的，因为环电流周围真空区域储存的磁场能是有限的。因此，为了得到正确⁵的积分结果，用 $r \rightarrow R_0$ 替代 $r \rightarrow \infty$ 即可。但在这种情况下，按大环径比展开不再适用。

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

- 通过引入与环向等离子体电流相关的宏观电路自感，再利用静磁场理论的已知结果，就可以绕开这个困难。自感的定义为：

$$\frac{1}{2}LI^2 \equiv \int \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r}$$

- 将这个积分拆分为两部分：等离子体所含的内电感和周围真空的外电感。等离子体内电感定义为：

$$\frac{1}{2}L_i I^2 = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} = 4\pi^2 R_0 \int_0^a \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} r dr$$

- 类似地，外电感定义为：

$$\frac{1}{2}L_e I^2 = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} d\mathbf{r} = 4\pi^2 R_0 \int_a^\infty \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} r dr$$

- 在聚变研究中，我们更经常使用的是单位长度上无量纲的归一化电感而不是实际电感本身。前者的定义 $l \equiv (L/2\pi R_0)/(\mu_0/4\pi) = 2L/\mu_0 R_0$ 。

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

- 将上述定义代入 F_I 的表达式，最终得到：

$$F_I = 2\pi^2 a^2 (l_i + l_e + 1) \frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0}$$

- 对于典型等离子体， $l_i \leq 1/2$ ，具体数值取决于等离子体中电流密度的实际分布。 l_e 的值需要经过经典静磁学的冗长计算方可确定。不过结果已知，为 $l_e = 2\ln(8R_0/a) - 4 \sim 2.4$ 。
- 在大环径比极限情形下，环力可以精确地计算出来。尽管计算过程也很复杂。但大环径比极限下的精确结果也仅是对上文中的简单的值略加微调。更精确的关系式：

$$F_I = \frac{I^2}{2} \frac{\partial}{\partial R_0} (L_i + L_e) = 2\pi^2 a^2 \left(\frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial R_0} [R_0(l_i + l_e)] = 2\pi^2 a^2 (l_i + l_e + 2) \frac{B_{\theta a}^2}{2\mu_0}$$

- 最后，需要注意的是， $F_I > 0$ 意味着环力方向沿大半径 R 向外。

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

■ 5. 垂直场力 F_v

- 最后计算由垂直场引起的力。相关表达式为：

$$F_v = -\frac{2\pi R_0 B_v}{\mu_0} \int R \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r B_\theta}{R} \right) dr d\theta$$

- 引入大环径比展开，并对 θ 积分，此式的主要贡献项可简化为：

$$F_v = -\frac{4\pi^2 R_0 B_v}{\mu_0} (r B_\theta) \Big|_{r \rightarrow \infty}$$

- 因为当 $r \rightarrow \infty$ 时， $B_\theta \sim I/r$ ，于是表达式改写为：

$$F_v = -2\pi^2 a^2 \left(\frac{2R_0 B_v B_{\theta a}}{\alpha \mu_0} \right) = -B_v I (2\pi R_0)$$

- 第二种表达式表示的是：长为 $2\pi R_0$ 、载流 I 的“直导线”在均匀磁场 B_v 中受到的力，即长度乘以电流⁶⁸乘以磁场。注意，如果电流和磁场都取正的，则垂直场产生的力是负的（即方向向内）。

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

■ 6. 环向力平衡所需的垂直场

- 通过合并各种力，可以很方便地计算出环向力平衡所需的垂直场：

$$\frac{B_v}{B_{\theta a}} = \frac{1}{4} \frac{a}{R_0} \left[\frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_{\theta a}^2} + \frac{B_{\phi a}^2 - \langle B_{\phi}^2 \rangle}{B_{\theta a}^2} + l_i + l_e + 2 \right]$$

- 此式提供了一种物理直观理解。这个相对简单的公式最先是由沙夫拉诺夫推导出来的，它为早期托卡马克实验中的垂直场电路设计提供了非常有用的指导。从那以后，人们已开发了包含有限环效应和非圆接截面效应的数值代码。这些代码已成为电流实验设计的基础。但是，简易模型所描述的力仍被用来表示对环向力平衡的基本贡献。
- 从聚变堆的平衡 β 极限方面来看，按照上式，似乎不存在此类极限。因为随着压强的增加，只需相应增加垂直场即可维持平衡。但事实证明，对于确定的位形，这个结论是错误的。主要是与稳定性考虑所设定的额外平衡限定条件有关。

6.4 环向力平衡

环向力平衡的解析推导

- 7. 为什么 θ 箍缩无法在环形条件下实现
- 可以直接证明环形 θ 箍缩平衡是不存在的。证据来自于对 $B_{\theta a} = 0$ 的情形下（相当于纯 θ 箍缩）要求同时满足径向压强平衡和环向力平衡条件的检验。这些关系式可简化为：

$$\left. \begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} (B_{\phi a}^2 - \langle B_{\phi}^2 \rangle) \text{ 径向压强平衡} \\ \langle p \rangle &= -\frac{1}{2\mu_n} (B_{\phi a}^2 - \langle B_{\phi}^2 \rangle) \text{ 环向力平衡} \end{aligned} \right\}$$

- 很明显，唯一可能的结果就是 $\langle p \rangle = 0$ 。

6.4 环向力平衡

环向力平衡的单粒子图像

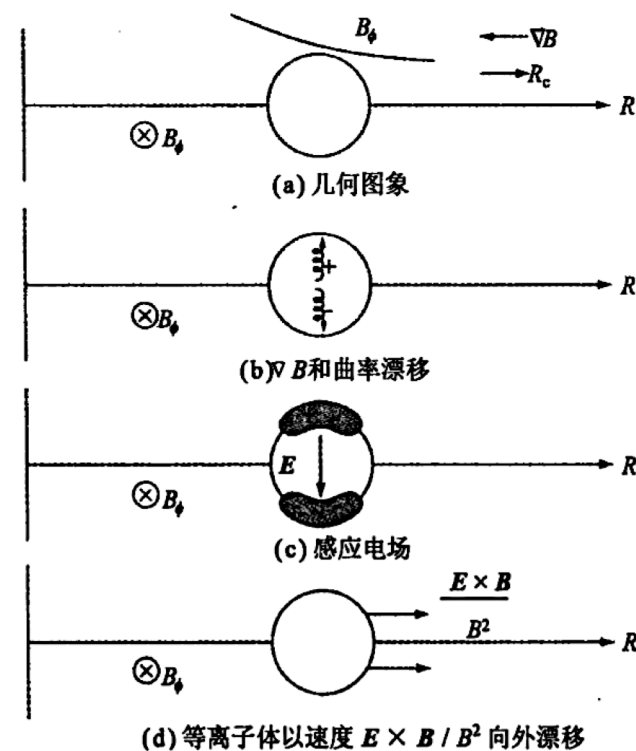
- 前面的讨论说明了如何利用单流体磁流体力学模型来计算Z箍缩或者螺旋箍缩中的环向力平衡，以及为什么在 θ 箍缩中无法实现这个平衡等问题。本节通过环向力平衡的单粒子导心图像来进一步展现其中的物理直观。特别地，这种处理将说明出现在 θ 箍缩中的困难，以及如果通过增加环向电流来解决这些困难。

1. 环向 θ 箍缩

- 首先考虑单纯的环向 θ 箍缩。为了简单起见，假定所研究的等离子体是低 β 等离子体，在此情形下，磁场近似为 $\mathbf{B} = B_0(R_0/R)\mathbf{e}_\phi$ 。几何图像如右图 (a) 所示。根据导心运动，并注意到环向场的 $1/R$ 依赖性产生如下的曲率漂移和 ∇B 漂移：

$$\mathbf{v}_g = \mp \frac{1}{\omega_c} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B} = \frac{q}{m R_0 B_0} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \mathbf{e}_z$$

- 这使得离子垂直向上漂移而电子垂直向下漂移，如右图 (b) 所示。

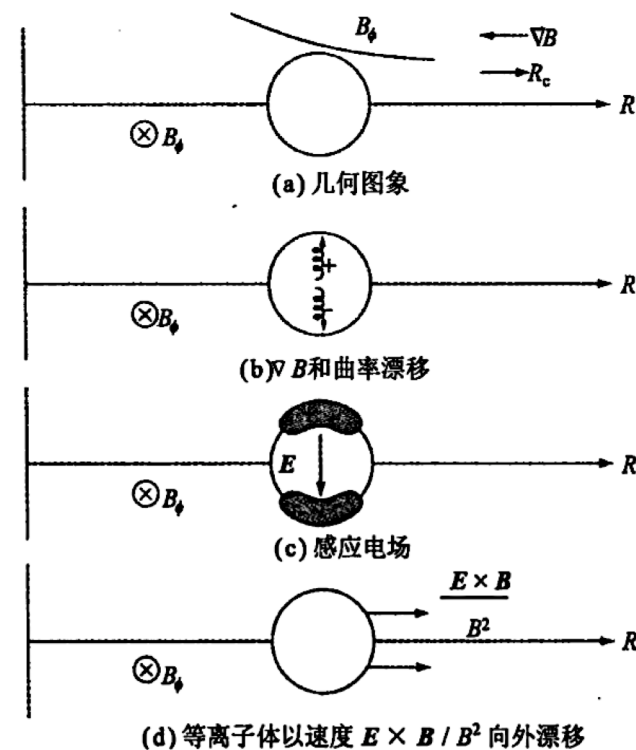


θ 箍缩无法实现环向力平衡

6.4 环向力平衡

环向力平衡的单粒子图像

- 导心的这些漂移导致正电荷在等离子体上部积累而负电荷在等离子体下部积累。电荷分离反过来产生一个穿越等离子体柱方向的垂直向下的电场，如右图（c）所示。此时等离子体中的每一个带电粒子都将受到外加环向场和导心感生的电场共同作用。由于 E 和 B 相互垂直，因此电子和离子都会发生 $E \times B$ 漂移。这种漂移对所有粒子都是一样的，且方向沿大半径 R 向外，如右图（d）所示。结果，整个等离子体像单流体一样沿着大半径 R 向第一壁移动。因此，在单纯的环向 θ 箍缩中无法实现环向力平衡。



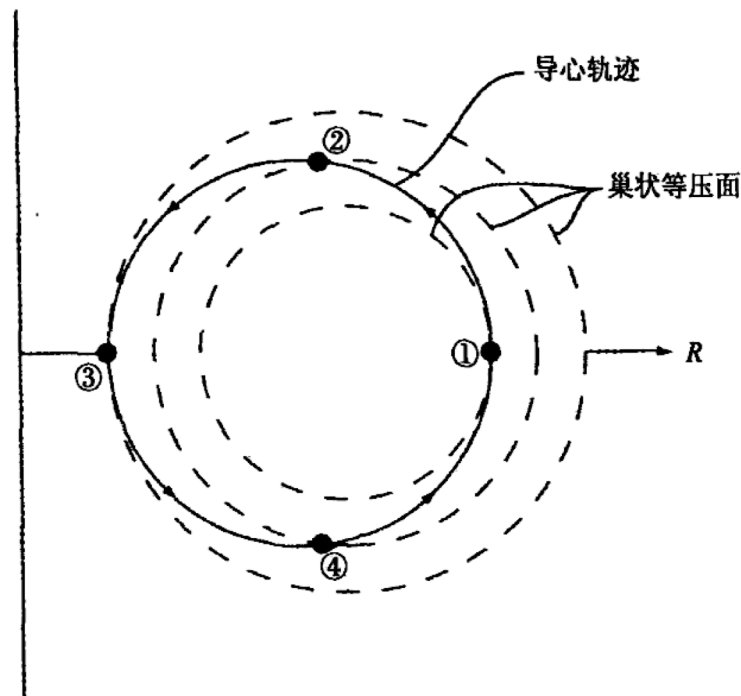
θ 箍缩无法实现环向力平衡

6.4 环向力平衡

环向力平衡的单粒子图像

■ 2. Z箍缩和螺旋箍缩

- 在轴对称环形系统中， θ 箍缩中遇到的困难可以通过外加一个垂直场来克服，例如，在Z箍缩和螺旋箍缩中的情形就是这样。对于一般的螺旋箍缩情形， B_ϕ 和 B_θ 的结合产生所谓旋转变换的磁场性质。正是这一性质避免了纯粹 θ 箍缩中出现的电荷在等离子体上下端累积的情况。
- 旋转变换性质：在约束平衡中，环向场和极向场的结合使得磁场线缠绕在等离子体周围。等离子体极向截面如右图所示，磁场线沿环向每转过一周就会落到圆周的不同极向位置上。经过沿环向的多次转动后，磁场线在极向上的落点就会形成磁通面的形状（即右图中虚线所示）。现在，若记磁场线在第 j 次到第 $j+1$ 次环向转动过程中在极向上的夹角为 $\Delta\theta_j$ ，将旋转变换角 ι 定义为无穷多次环向转动后这些极向夹角 $\Delta\theta_j$ 的平均值： $\iota = \langle \Delta\theta \rangle$ 。



通过旋转变换平均掉垂直漂移

6.4 环向力平衡

环向力平衡的单粒子图像

- 旋转变换的作用是：当粒子沿磁场线以速度 v 自由运动时，旋转变换平均掉了垂直 ∇B 漂移和曲率漂移。不再出现电荷累积，因此也就不再发生径向向外的 $E \times B$ 漂移。即使粒子仍会有垂直 ∇B 漂移和曲率漂移，但这个平均过程依然有效。看上去有些荒谬的结论是：总向上漂移的粒子却逃不出等离子体。
- 平均效应的物理机制：图中显示了三个巢状等压面。假设带电粒子从最内磁面点1位置出发。由于它有 v_{\parallel} 的初速度，因此将沿着环面运动。如果没有垂直漂移，它将被约束在这个磁面上。然而，如果粒子存在垂直向上的漂移，其导心将偏离该磁面，并在极向运动 $\pi/2$ 后到达位于中间磁面的点2位置处。粒子沿极向再转过 $\pi/2$ 时，将运动到偏离原始磁面更远的外磁面的点3位置处。漂移过程在极向转过第三个 $\pi/2$ 时继续存在，但此时向上漂移却使得粒子回到中间磁面上，到达点4位置处。最后，在极向转过第四个 $\pi/2$ 时，粒子导心的向上漂移使得粒子回到最初的出发点。这一过程不断重复使得在等离子体上部或者下部都没有电荷累积。
- 结论：尽管带电粒子总是向上漂移，但旋转变换的存在却使得粒子在前半个周期内漂离等离子体中心，在后半周期内漂向等离子体中心。

6.4 环向力平衡

旋转变换角的计算

- 旋转变换是用于约束聚变等离子体的磁场位形的重要基本特征。两种情况下如何计算旋转变换角：一种是长为 $2\pi R_0$ 的直圆柱，另一种是轴对称环面。

- **1. 直圆柱中的旋转变换**

- 为了估计旋转变换角，需要计算缠绕在等离子体磁面上的磁场线的轨迹。在直圆柱情形下，描述平行于已知磁场线的几何线坐标的方程是：

$$\left. \begin{aligned} dr/dz &= B_r/B_z & r(z=0) &= r_0 \\ d\theta/dz &= B_\theta/rB_z & \theta(z=0) &= \theta_0 \end{aligned} \right\}$$

- 在直线螺旋箍缩中， $B_r = 0$ ， $B_\theta = B_\theta(r)$ 和 $B_z = B_z(r)$ 。由于轴对称，轨迹方程经过简单积分可得：

$$\left. \begin{aligned} r(z) &= r_0 \\ \theta(z) &= \theta_0 + \left[\frac{B_\theta(r_0)}{r_0 B_z(r_0)} \right] z \end{aligned} \right\}$$

- 从上式看出，磁场线沿着螺旋轨迹环绕于磁面上。

6.4 环向力平衡

旋转变换角的计算

- 旋转变换角的定义是绕环向旋转一周时极向角度变化 $\Delta\theta$ 的平均值。对于直圆柱，由于对称性，很容易进行这种平均处理。任意给定磁场线绕环向一周引起的角度 $\Delta\theta$ 的变化和任意其他磁场线绕环向旋转一周引起的角度 $\Delta\theta$ 的变化完全相同。因此，等价于周长为 $2\pi R_0$ 的环面的直圆柱的旋转变换角为 $\iota(r_0) \equiv \Delta\theta = \theta(z + 2\pi R_0) - \theta(z)$ ，或写成（去掉下标0）：

$$\iota(r) = 2\pi \frac{R_0 B_\theta(r)}{r B_z(r)}$$

- $\iota(r)$ 分布是区分不同磁约束聚变位形的关键特征之一。
- 还应当指出，对于大多数轴对称环形位形下的聚变研究来说，通常引入所谓的安全因子 $q(r)$ 来代替 $\iota(r)$ 。二者呈如下的反比关系：

$$q(r) \equiv \frac{2\pi}{\iota(r)} = \frac{r B_z(r)}{R_0 B_\theta(r)}$$

- 使用“安全”一词与磁流体力学稳定性有关，高 $q(r)$ 的位形趋于更稳定（即更安全）。安全因子的影响将在讨论磁流体力学稳定性时研究。

6.4 环向力平衡

旋转变换角的计算

■ 2. 轴对称环面上的旋转变换

- 对轴对称环面的旋转变换的估计和直圆柱中的概念类似，但有两点微小差别：第一，在环面上，磁场是 r 和 θ 的函数，这增加了磁场线轨迹推导的技术难度；第二，计算 l 的平均过程不再像直圆柱情形下的那样简单，原因是绕环向一周引起的角度 $\Delta\theta$ 的变化对磁场线的极向初始位置的依赖关系不同。例如，始于环面外侧（ $\theta_0 = 0$ ）的磁场线绕环向一周引起的角度 $\Delta\theta$ 的变化不同于始于环面内侧（ $\theta_0 = \pi$ ）的磁场线绕环向一周引起的角度 $\Delta\theta$ 的变化。虽然困难。也必须用数值求解的积分形式，但采用基于环向力平衡方程的简单模型，可以得到解析解。

- 推导由环面上磁场线的轨迹方程开始：

$$\left. \begin{aligned} dr/d\phi &= RB_r(r, \theta)/B_\phi(r, \theta) & r(\phi = 0) &= r_0 \\ d\theta/d\phi &= RB_\theta(r, \theta)/rB_\phi(r, \theta) & \theta(\phi = 0) &= \theta_0 \end{aligned} \right\}$$

- 式中， $R = R_0 + r\cos\theta$ 。假定磁场各分量 $B_r(r, \theta)$ 、 $B_\theta(r, \theta)$ 和 $B_\phi(r, \theta)$ 已分别从磁流体力学平衡条件下独立解得（一般都是数值解）。在这个假定基础上，上式变成耦合的非线性常微分方程组，⁷⁷原则上很容易得到其数值解。但即便如此，事实上也没有必要解这些方程。

6.4 环向力平衡

旋转变换角的计算

- 对估计旋转变换来说，只需要知道磁面的形状，通常它是非圆的。有很多方法可以用来确定磁面的形状。最直接的方法是将上述两方程相除：

$$dr/d\theta = rB_r(r, \theta)/B_\theta(r, \theta) \quad r(\theta_0) = r_0$$

- 这也是一个很容易数值求解的方程。此后，假定此式的解为 $r = r(\theta; r_0, \theta_0)$ 。
- 下一步是计算 $\Delta\theta$ 并取其对环向转动次数的平均。最有效的做法是计算磁场线沿极向转动一周 ($\delta\theta = 2\pi$) 时环向转过的角度大小 ($\delta\phi = 2\pi$)。由于轴对称性，磁场线的这种运动形式无限重复，因此简单利用比例关系就可以确定 ι 。由前面式子积分易得角 $\delta\phi$ ：

$$\delta\phi = \int_0^{2\pi} \frac{rB_\phi}{RB_\theta} d\theta$$

- 注意：此式是对磁面的积分，也就是说，被积函数 $I(r, \theta) = I(r(\theta), \theta)$ 。看清 $\delta\phi = \delta\phi(r_0)$ 也同样重要。由于对称性以及沿极向积分一周，因此它不是 θ_0 的函数。这样，通常令 $\theta_0 = 0$ 不会带来任何损失。

6.4 环向力平衡

旋转变换角的计算

- 通过采用简单比例关系，旋转变换现在表示成：

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\phi} = \frac{2\pi}{\delta\phi} = \frac{\langle\Delta\theta\rangle}{2\pi}$$

- 式中， $\langle\Delta\theta\rangle$ 是环向旋转一周 $\Delta\phi = 2\pi$ 时极向平均旋转角： $\langle\Delta\theta\rangle \equiv \iota$ 。 ι 和 q 的表达式分别为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\iota(r_0)}{2\pi} &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r B_\phi}{R B_\theta} d\theta \right]^{-1} \\ q(r_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r B_\phi}{R B_\theta} d\theta \end{aligned} \right\}$$

- 此式中， r_0 可以作为识别计算磁面上旋转变换的标签。具体来说，它对应于小截面上 $\theta_0 = 0$ 的中平面外侧的磁面半径。

6.4 环向力平衡

旋转变换角的计算

- 一般来说，旋转变换角必须通过数值计算来得到，可以利用基于环向力平衡方程的简单模型场来演示这一过程。由于模型场有 $B_r = 0$ ，这意味着磁面方程的解就是 $r = r_0$ 。磁面是圆的。于是安全因子可以表示为：

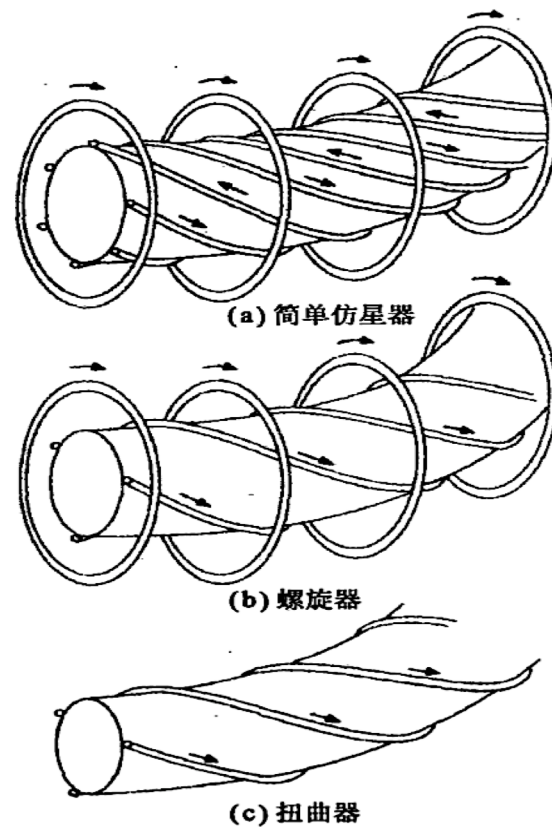
$$q(r_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{r_0 B_\phi(r_0)}{B_\theta(r_0)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R_0 + r_0 \cos\theta} = \frac{r_0 B_\phi(r_0)}{R_0 B_\theta(r_0)} \frac{1}{(1 - r_0^2/R_0^2)^{1/2}}$$

- 这个表达形式类似于直圆柱中的表达式，但对环形效应进行了小的修正。在讨论聚变位形时，当压强增加时，对于 $q(r_0)$ 必须做很大的环向修正。在这种情况下，简单模型场不再能准确表达出其中的物理平衡。

6.4 环向力平衡

没有环向电流位形的环向力平衡

- 到目前为止，分析主要集中于轴对称的环形位形。参量均不随环向角 ϕ 变化。这些位形需要环向电流和外加垂直场来维持环向力平衡。从聚变堆的观点来看，引入环向电流增加了设计的复杂性。由于稳态的环向直流电流无法由变压器提供，因此需要采用某种无感应电流驱动来提供。通常这会涉及复杂的物理过程和大量昂贵的辅助电流驱动设备。
- 显然，希望能够找到某种无需环向直流电流来维持环向力平衡的环形磁位形。这类装置确实存在，这就是“仿星器”。世界上作为聚变项目进行研究的仿星器有几种不同类型，它们都有一个共同特征，就是所有的仿星器都是三维环状螺旋结构，因此需要通过外加螺旋磁场来实现环向力平衡所需的旋转变换。右图展示了三种仿星器的简单示意图。尽管原理上等离子体可以携带净直流电流，但是对于仿星器平衡这不是必需的。

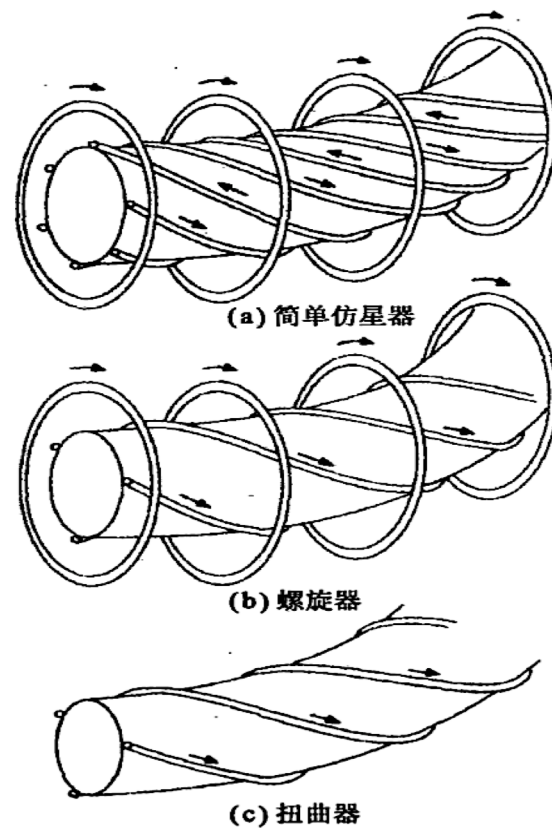


三种仿星器示意图

6.4 环向力平衡

没有环向电流位形的环向力平衡

- 可以预料，三维位形的分析一般需要大规模分析手段，已超出了这里需要讨论的范围。然而，通过某些简单的螺旋位形的旋转变换计算，可对其特点略知一二。
- 环向净电流为零的螺旋位形能够通过外部来产生旋转变换，尽管乍一看来，由于螺旋对称性，这种变换平均值可能为零。
- 计算的关键问题是将对磁面形状的螺旋调整效应包括进来。正如前文指出的，由于对称性，螺旋场中对旋转变换的主要贡献项在整个螺旋周期内平均确实为零。然而，考虑到磁面螺旋修正的更仔细的高阶计算显示，这种平均是不完全的，仍然存在一个小的净旋转变换，并最终导致环向力平衡。



三种仿星器示意图

6.4 环向力平衡

没有环向电流位形的环向力平衡

■ 1. 模型磁场

- 旋转变换的存在不依赖于环形效应或者有限压强。即使在有真空磁场的直螺旋系统中也能产生旋转变换。因此模型磁场由两部分组成：均匀的轴向（即环向）磁场 $B_z = B_0 = \text{常数}$ ，另加真空螺旋场 \mathbf{B}_h 。由于对真空场有 $\nabla \times \mathbf{B}_h = 0$ ，因此可以用势函数来替代： $\mathbf{B}_h = \nabla V$ ，且 V 满足 $\nabla^2 V = 0$ 。假定螺旋场具有螺旋波长 λ_h 和单螺旋多极性 l 。这意味着 $V(r, \theta, z) = V(r) \sin(l\theta - hz)$ ，式中 $\lambda_h = 2\pi/h$ 。拉普拉斯方程的解为：

$$V(r) = \hat{C} I_l(hr) \approx Cr^l$$

- 当 $ha \ll 1$ 时，修正的贝塞尔函数近似有效。常数 C 可通过假定等离子体边界处极向螺旋场的幅度为 B_h 来确定。由此可得： $V(r) = (aB_h/l)(r/a)^l$ 。因此模型场可以写成：

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{B}_h$$

- 式中，

$$\mathbf{B}_h = \nabla V = B_h \left(\frac{r}{a}\right)^{l-1} \left[\mathbf{e}_r \sin\zeta + \mathbf{e}_\theta \cos\zeta - \mathbf{e}_z ha \left(\frac{r}{a}\right) \cos\zeta \right]$$

- 式中： $\zeta = l\theta - hz$ 。注意，对于等价的环面，有 $\zeta = l\theta - N\phi$ ，且 $z = R_0\phi$ 。因此， $N = hR_0$ 等于环方向螺旋周期的数目。为了简化旋转变换角的计算，假定 $N \ll 1$ ，即环向上有很多螺旋周期。

6.4 环向力平衡

没有环向电流位形的环向力平衡

- 先计算每个螺旋周期的旋转变换角，然后乘以 N ，得到整个变换角。假定螺旋场比起环向场要小得多，即 $B_h \ll B_0$ ，由此分析可以大大简化。在此假设条件下将描述磁场线的轨迹坐标展开：

$$\left. \begin{aligned} r(z) &= r_0 + r_1(z) + r_2(z) + \cdots \\ \theta(z) &= \theta_0 + \theta_1(z) + \theta_2(z) + \cdots \end{aligned} \right\}$$

- 为方便起见，在此将轨迹方程复述如下：

$$\left. \begin{aligned} dr/dz &= B_r/B_z & r(z=0) &= r_0 \\ d\theta/dz &= B_\theta/rB_z & \theta(z=0) &= \theta_0 \end{aligned} \right\}$$

- 解这个轨迹方程到包含二阶项即可确定旋转变换角。

6.4 环向力平衡

没有环向电流位形的环向力平衡

■ 2. 一阶解

- 一阶非平凡的轨迹方程组以一阶形式出现：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_1}{dz} &= \frac{B_{hr}(r_0, \theta_0, z)}{B_0} & r_1(z=0) &= 0 \\ \frac{d\theta_1}{dz} &= \frac{B_{h\theta}(r_0, \theta_0, z)}{r_0 B_0} & \theta_1(z=0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- 这个方程很容易积分，得到

$$\left. \begin{aligned} r_1(z) &= \frac{B_h}{hB_0} \left(\frac{r_0}{\alpha}\right)^{l-1} (\cos\zeta - \cos\zeta_0) \\ \theta_1(z) &= -\frac{B_h}{hr_0 B_0} \left(\frac{r_0}{\alpha}\right)^{l-1} (\sin\zeta - \sin\zeta_0) \end{aligned} \right\}$$

- 式中， $\zeta = l\theta_0 - hz$ ； $\zeta_0 = l\theta$ 。物理上，这个解相当于对磁面的小的螺旋修正。注意到 θ_1 是 z 的周期函数。特别地， $\theta_1(2\pi/h) - \theta_1(0) = 0$ 。也就是说，由螺旋场造成对 θ 的一阶非零贡献项的平均值为零，即对旋转变换没有贡献。

6.4 环向力平衡

没有环向电流位形的环向力平衡

■ 3. 二阶解

- 通过简单的泰勒展开可以得到轨迹的二阶方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_2}{dz} &= \frac{1}{B_0} \left(\frac{\partial B_{hr}}{\partial r_0} r_1 + \frac{\partial B_{hr}}{\partial \theta_0} \theta_1 - \frac{B_{hr} B_{hz}}{B_0} \right) \\ \frac{d\theta_2}{dz} &= \frac{1}{r_0 B_0} \left(\frac{\partial B_{h\theta}}{\partial r_0} r_1 + \frac{\partial B_{h\theta}}{\partial \theta_0} \theta_1 - B_{\theta 1} \frac{r_1}{r_0} - \frac{B_{h\theta} B_{hz}}{B_0} \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r_2(0) &= 0 \\ \theta_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

- 事实上，要得到单个螺旋周期的旋转变换角，并不需要得到这些方程的完全解。因为单个螺旋周期的变换角定义为 $\delta\iota = \theta(2\pi/h) - \theta(0) = \theta_2(2\pi/h) - \theta_2(0)$ ，所需条件即为

$$\delta\iota = \int_0^{2\pi/h} \frac{d\theta_2}{dz} dz = \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{dz} d\zeta$$

6.4 环向力平衡

没有环向电流位形的环向力平衡

- 利用一阶方程的解，经过简单而稍显枯燥的计算后发现， $d\theta_2/dz$ 对 ζ 平均的非零结果部分为：

$$\frac{d\theta_2}{dz} = \frac{1}{ha^2} \frac{B_h^2}{B_0^2} \left(\frac{r_0}{a}\right)^{2l-4} [(l-2+h^2r_0^2)\cos^2\zeta + l\sin^2\zeta]$$

- 于是进一步得到：

$$\delta\iota(r_0) = \frac{\pi}{h^2a^2} \frac{B_h^2}{B_0^2} [2(l-1) + h^2r_0^2] \left(\frac{r_0}{a}\right)^{l-2} \approx 2\pi \frac{l-1}{h^2a^2} \frac{B_h^2}{B_0^2} \left(\frac{r_0}{a}\right)^{l-2}$$

- 这里用了假定 $h^2r_0^2 \ll 1$ 。
- 最终，整个变换角等于单个螺旋周期上的变换角乘以周期数： $\iota = N\delta\iota$ 。所要得到的关系式形式为：

$$\iota(r_0) = 2\pi \frac{l-1}{N} \left(\frac{R_0B_h}{aB_0}\right)^2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^{2l-4}$$

6.4 环向力平衡

没有环向电流位形的环向力平衡

- 注意，对于 $l = 2$ 的仿星器，变换角的空间分布是均匀的。事实上，当考虑到 $h^2 r_0^2$ 修正时，变换角随半径增加得较慢。对于 $l \geq 3$ ，变换角在轴上为零，并随半径单调增加。对于 $l = 1$ ，变换角似乎为零，但更仔细的计算显示，存在幅度减弱 $h^2 r_0^2$ 倍的有限变换角。
- 主要结论是，单纯环向场与附加的螺旋场的组合产生外部旋转变换。这种旋转变换能够提供环向力平衡，而无需净的环向直流电流。这正是为什么尽管仿星器技术上非常复杂，但仍受到聚变界青睐的主要原因之一。

6.1-6.4 总结

- 聚变等离子体的宏观平衡由磁流体力学模型描述。一般来说，感兴趣的环形位形平衡可用一系列巢状、具有类圆截面的环向等压面来描述。磁场线和电流密度线都在这些等压面上。
- 要实现环向平衡，需要解决两个性质不同的问题。第一个问题涉及径向压强平衡，这是由于等离子体热的芯部趋向于沿小半径 r 向外扩张。 θ 箍缩、 Z 箍缩和二者结合的螺旋箍缩都能在径向压强平衡的条件下约束高比压等离子体。
- 第二个问题与环向力平衡有关。这是因为环效应导致一个使等离子体沿大半径 R 方向向外扩张的力。单纯 θ 箍缩无法抵消这个力，因此无法实现环向平衡。在 Z 箍缩或者螺旋箍缩中，由于存在净的环向直流电流，它们产生的旋转变换平均掉了垂直 ∇B 漂移和曲率漂移，从而能够实现环向平衡。从流体观点看，平衡这个力需要理想导体壁或者外加垂直场。一旦达到平衡，压强面和磁面就会形成闭合曲面，并可以通过旋转变换来抵消垂直漂移。
- 最后，三维仿星器位形也可以实现环向力平衡。仿星器磁场位形是由单纯的环向场叠加螺旋场而实现的。螺旋场产生外部生成的旋转变换，并由此最终实现环向力平衡。虽然这种几何结构比二维轴对称系统复杂得多，但是仿星器不需要净的直流电流，这从聚变堆方面来看具有明显优势。

主要内容

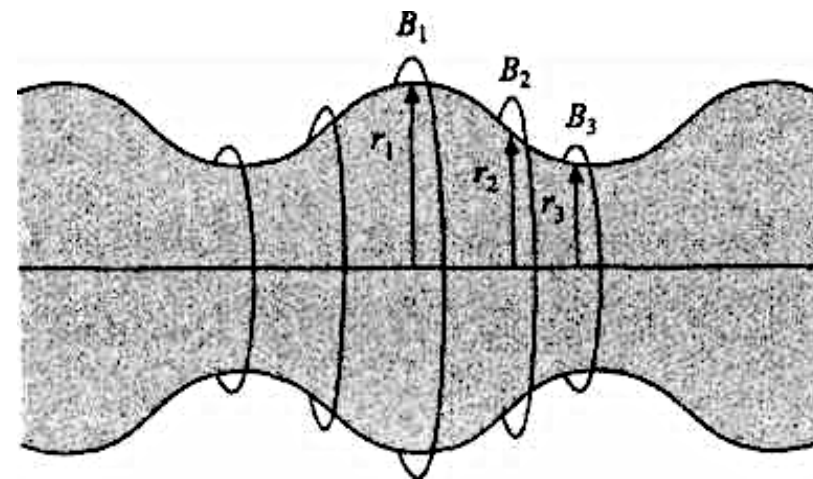
- 6.0 引言
- 6.1 磁流体方程
- 6.2 磁流体的平衡
- 6.3 径向压强平衡
- 6.4 环向力平衡
- 6.5 磁流体不稳定性物理图像
- 6.6 表面载流等离子体柱的稳定性

6.5 磁流体不稳定性的物理图像

- 几种简单的物理图像来说明理想磁流体力学模型是如何在等离子体中被激发的。
- 这些模式包括Z箍缩中的交换模，串级磁镜中的气球模和螺旋箍缩中的扭曲模。
- 所有聚变磁约束位形设计的基本出发点就是要避免出现这些基本的不稳定性。

6.5 磁流体不稳定性的物理图像__交换模

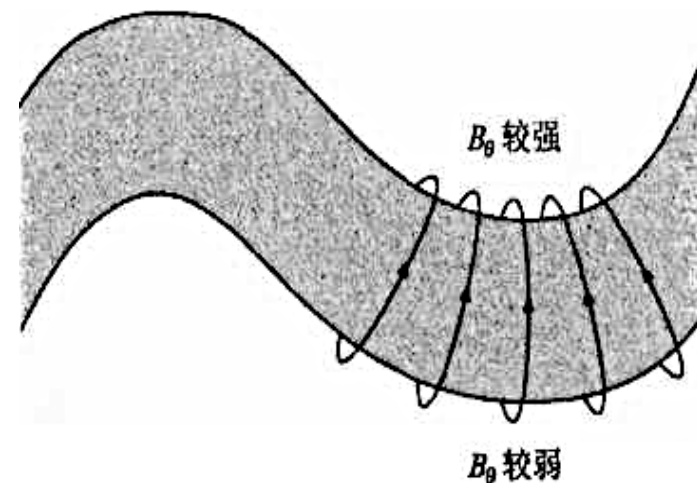
- 第一种要考虑的不稳定性是压强驱动交换模。在仅有垂直电流的单纯Z箍缩中，这种不稳定性最容易理解。假设等离子体柱对称的初始表面扰动如右图所示。由于流过柱截面的总电流必须在整个柱体上保持恒定，故柱面外3个指定位置上的磁场（ $B_\theta \sim 1/r$ ）及其相应的半径分别满足关系 $B_{\theta 1} < B_{\theta 2} < B_{\theta 3}$ 和 $r_1 > r_2 > r_3$ ，而作用在等离子体表面上的磁场张力为 $F_T = (B_\theta^2 / \mu_0)(2\pi r L_z) \sim 1/r$ ，从而有 $F_{T1} < F_{T2} < F_{T3}$ 。就是说，在整个柱上，受力方向均指向扰动增长的方向，譬如在 $r = r_1$ 处，扰动力（即 $F_{T1} - F_{T2}$ ）沿径向向外；而在 $r = r_3$ 处，扰动力（即 $F_{T3} - F_{T2}$ ）沿径向向内。扰动力使初始扰动增大，因此它是一种不稳定性的驱动力。
- “交换不稳定性”的扰动事实上是使等离子体管和磁通管发生交换。



Z箍缩交换不稳定性示意图

6.5 磁流体不稳定性的物理图像——交换模

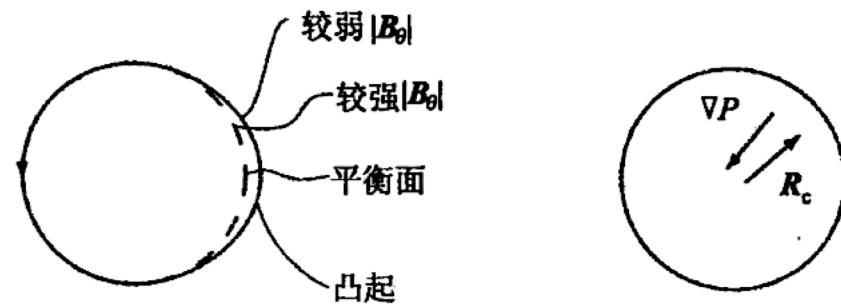
- Z箍缩中由垂直电流驱动的另一不稳定性的物理图像如右图所示。这里，在等离子体表面凹陷的一侧磁场富集，而在凸出的一侧磁场强度减弱。
- 可以看到，表面凹陷得越厉害，磁场张力就越大；表面越凸出的地方，磁场张力就越弱。这里扰动力的方向也是指向使扰动幅度增加的方向，因此导致不稳定性。



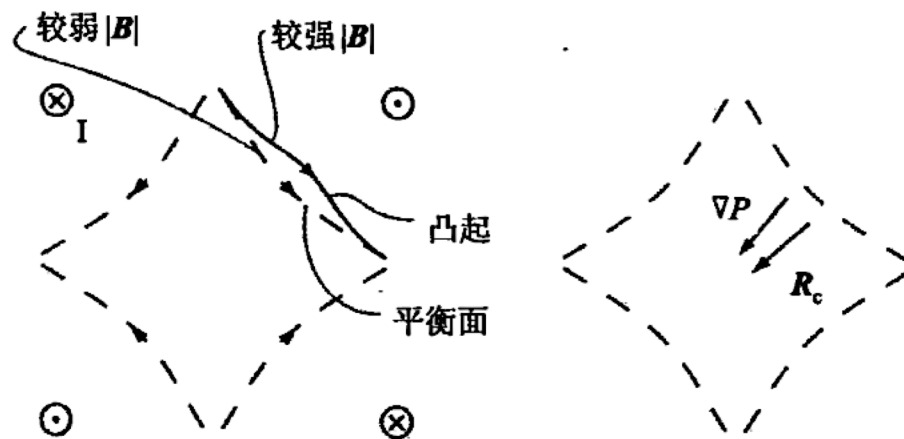
Z箍缩扭曲不稳定性示意图

6.5 磁流体不稳定性的物理图像——交换模

- 如果磁场线凹向等离子体表面，则这种磁场曲率叫坏曲率，如图（a）所示。这是因为曲率半径的方向与扰动方向一致，表面向外凸起使得等离子体处于低场区，而磁场降低又使得凸起进一步增强。
- 与此相反，如果磁场线凸向等离子体表面，如图（b）所示的会切位形，则这种磁场线的曲率是好的。在此情形下，表面向外凸起将使得等离子体处于较强的磁场区。而较强磁场迫使等离子体恢复到平衡位置，因此这种磁场位形是致稳的。还应指出，会切位形处处都是好曲率，但它却不是聚变所需要的位形，因为粒子很容易通过会切终端损失掉。对于交换模如何区分好曲率和坏曲率的单粒子图像将在后面描述。



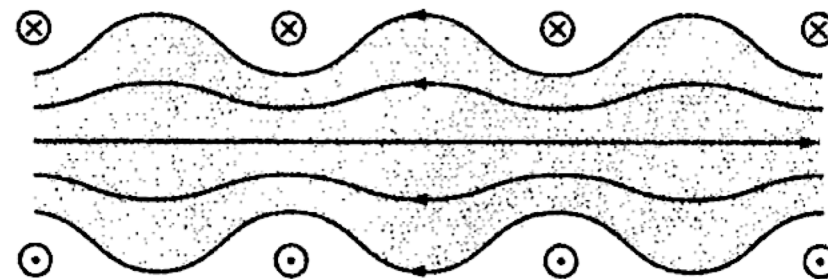
(a) Z箍缩下的坏曲率



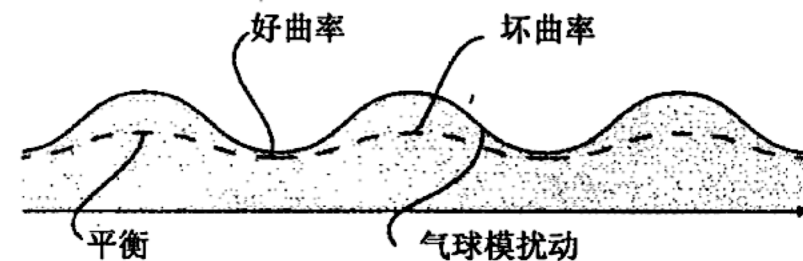
(b) 会切位形下的好曲率

6.5 磁流体不稳定性的物理图像__气球模

- 很多磁场位形既有好曲率区，也有坏曲率区，需要通过适当的平均处理来确定“平均曲率”是好的还是坏的。托卡马克就具有这个特征。
- 说明这点的更简单的例子是图 (a) 所示的串级磁镜。在这种位形下，磁流体力学不稳定性的一个重要特征是等离子体扰动更容易出现在坏曲率区，使得等离子体磁面出现类似气球膨胀的畸变，如图 (b) 所示，这些不稳定性通常被称为“气球”模。
- 气球模之所以重要，是因为它限制了能稳定约束聚变等离子体的最大 β 的极限。气球模通常导致热能的快速损失或是输运损失明显增强，使得等离子体比压 β 无法超过气球模极限。
- 气球不稳定性通常属于等离子体内部不稳定性。



(a) 串接磁镜的平衡

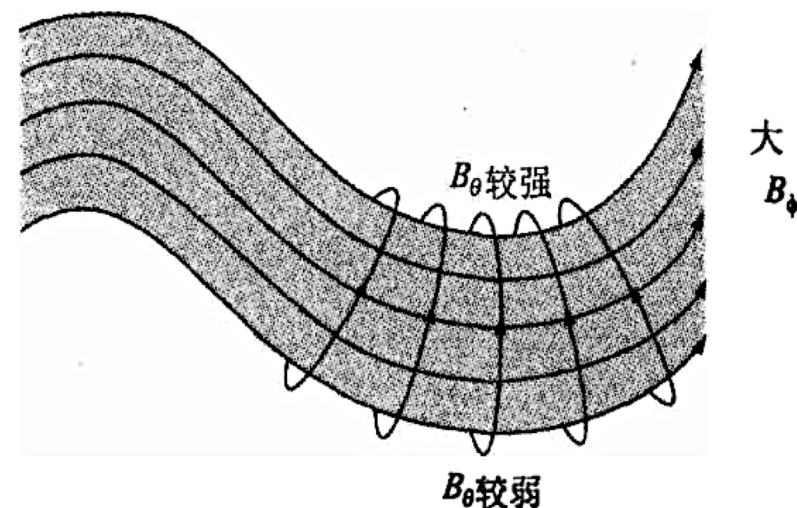


(b) 坏曲率区的气球模扰动

气球模

6.5 磁流体不稳定性的物理图像——电流驱动不稳定性

- 现在考虑右图所示的电流驱动不稳定性。图中显示的是具有内部轴向强磁场的Z箍缩（即螺旋箍缩）。注意，现在主电流流动的轴向相于平行方向。螺旋箍缩下的不稳定性机理类似于单纯Z箍缩的情形。但环向磁场线（其行为类似于橡皮筋）在出现扰动时会变得弯曲。而磁场线弯曲引起的张力总是试图重新伸直自身，这相当于一个致稳的力。但如果环向磁场太小，那么不稳定性仍无法消除。
- 可获得的最大环向磁场通常由磁体工程方面的因素决定，它的最大值设定了磁流体力学稳定性允许的最大环向电流。具体来说就是，如果环向电流大于极限电流，那么环向磁场线弯曲的致稳效应就无法起到稳定不稳定模的作用。
- 概括起来，交换不稳定性、气球不稳定性和扭曲不稳定性的基本驱动机理都可以通过简单的物理模型得到描述。尽量使这些驱动机制最小化是所有聚变磁约束位形设计的基本出发点。

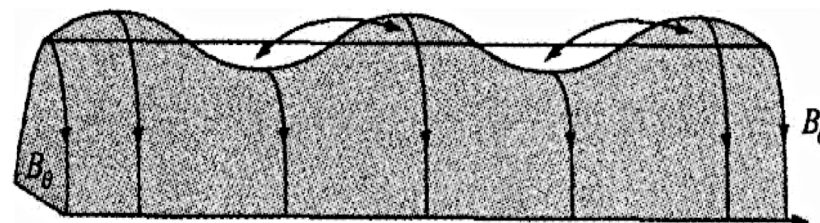


大环向磁场螺旋箍缩中的扭曲不稳定性（注意 $J \approx J_{\parallel} \bar{b}$ ）

6.5 磁流体不稳定性的物理图像_____好曲率和坏曲率的物理图像

- 好曲率和坏曲率的区别也能够通过单粒子约束图像的观点来理解。以下的分析将说明导心的曲率漂移是如何在等离子体表面附近感应出电场，进而产生 $E \times B$ 漂移的。 $E \times B$ 漂移的方向取决于曲率半径矢量的符号，既可以是正的也可以是负的。分析过程如下：
- 考虑右图所示的柱等离子体，其中在等离子体表面已叠加了交换扰动。如果磁场线弯曲，那么就会产生导心曲率漂移：

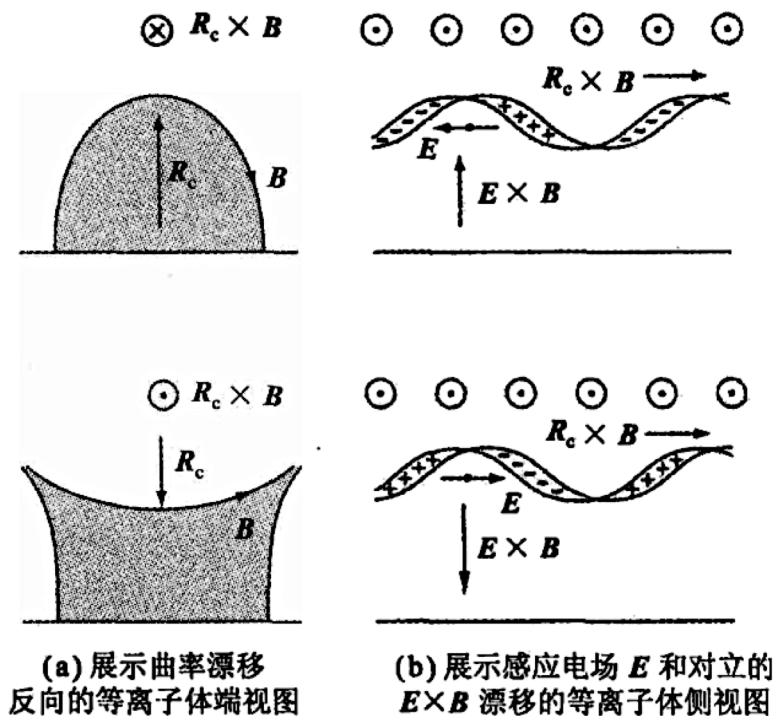
$$V_{\kappa} = \mp \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B}$$



具有交换不稳定性的Z箍缩柱（注意，等离子体和真空磁通已经交换了位置）

6.5 磁流体不稳定性的物理图像_____好曲率和坏曲率的物理图像

- 上式中，正号对应于正电荷。由图（a）的圆柱截面视图可见，曲率漂移方向是指向纸内还是纸外取决于曲率半径矢量的方向。对于正电荷，凹向等离子体的磁场线产生指向纸内的漂移，而凸向等离子体的磁场线产生指向纸外的。
- 因为电子和离子曲率漂移方向相反，所以在沿圆柱轴向上，交换不稳定性导致形成周期性电荷分离，如图（b）所示，电荷分离产生周期电场。电场的峰值出现在凸起的中间部位[即图（b）中电场方向箭头所指的位置]。
- 凸起中的等离子体此刻经历 $E \times B$ 漂移。当磁场线凹向等离子体时， $E \times B$ 漂移的方向将增强扰动，导致不稳定性；反之，当磁场线凸向等离子体时漂移的方向将使等离子体回复到它的平衡位置，导致稳定。
- 上述简单的物理图像为分辨好曲率和坏曲率提供直观理解。



坏曲率(上)和好曲率(下)的
单粒子图像

主要内容

- 6.0 引言
- 6.1 磁流体方程
- 6.2 磁流体的平衡
- 6.3 径向压强平衡
- 6.4 环向力平衡
- 6.5 磁流体不稳定性物理图像
- 6.6 表面载流等离子体柱的稳定性

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性__概述

- 大多数的聚变概念都具有环向磁场和极向磁场。环向磁场的加入明显增加了分析的复杂性，而且，这方面的大多数文献内容也超出了本课程的范围。为了克服这个困难，引入一个极其简单的模型来大大简化分析，同时可以获得所需的关于磁流体力学 β 极限值的信息。这个模型即所谓“表面电流模型”。
- 表面电流模型是一种简单的磁流体力学模型。可以在多种聚变位形中用它来解析计算克服外部气球-扭曲模所需的压强和电流的极限值。由于这些模通常决定了最严格的稳定性极限值，因此这一模型从宏观磁流体力学行为方面给出了进行反应堆可行性估计时所需的准确信息。
- 这一模型所基于的思想是：考虑这样一种特定平衡，其中电流 I 仅由理想化表面电流组成。假设这个电流沿单一表面流动，并将等离子体与真空区域隔开，这使得平衡和稳定性分析得到了极大简化。下面列出利用表面电流模型得出压强和电流极限值的程序步骤。这一处理对一维和二维的等离子体均适用，因此适用于大多数位形。为了最大程度保持简单性，假设等离子体的横截面是圆形的。

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性__概述

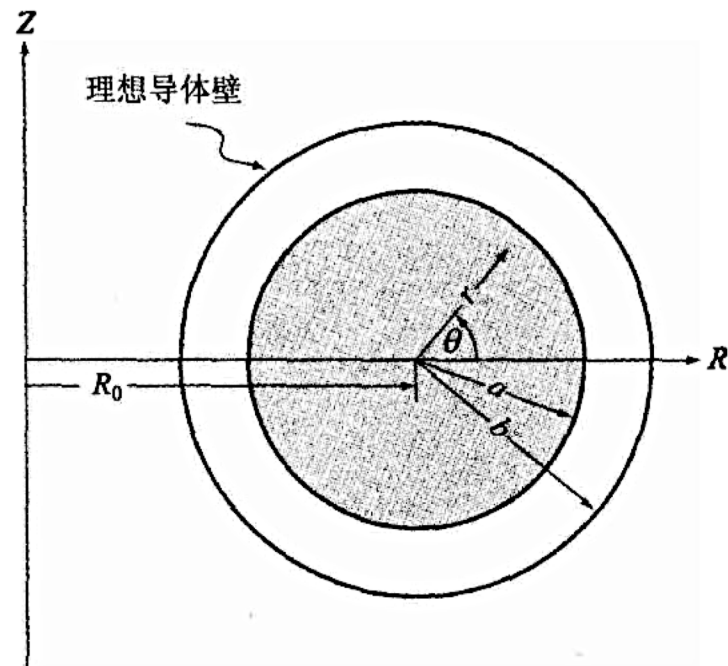
- 得出磁流体力学边缘区稳定性极限值的整个形式化过程最终可归结为四步流程。定性来看，这些步骤为：
 - (1) 计算二维表面电流的平衡；
 - (2) 求出等离子体区域中的扰动磁场；
 - (3) 求出真空区域中的扰动磁场；
 - (4) 通过用外部模式的边界条件对等离子体-真空界面进行匹配，来确定边缘区稳定性的条件。

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——二维表面电流的平衡

- 右图所示的具有圆截面的二维环形等离子体，先要计算等离子体-真空界面两侧的压强和磁场。表面电流模型的一个重要简洁之处是稳定性分析仅仅需要知道紧挨着表面两侧的稳态磁场。
- 第一个量：等离子体压强。假设等离子体中没有电流： $J = 0$ 。因此平衡关系式 $\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p = 0$ 简化为 $\nabla p = 0$ 。这个方程的解很简单：

$$p = \text{常数}$$

- 即等离子体区域内每一点的压强是常数。



表面电流模型的二维几何形态

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——二维表面电流的平衡

- 第二个量：等离子体内的环向磁场 B_ϕ 。由 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 可知 B_ϕ 可以写为：

$$B_\phi(r, \theta) = B_i \frac{R_0}{R} = B_i \frac{R_0}{R_0 + r \cos \theta}$$

- 其中 B_i 是大半径 $R = R_0$ 处的内部环向磁场。
- 在轴对称几何下，由于等离子体中没有环向电流，因此等离子体内的极向磁场也应该为零： $B_p(r, \theta) = 0$ 。这样，就得到了简化后的等离子体内部磁场。
- 现在考虑界面的真空一侧。显然真空中的压强为零： $p = 0$ 。接下来，与等离子体区域类似，真空中的环向磁场也满足条件 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ，所以也可以表示为：

$$\hat{B}_\phi(r, \theta) = B_0 \frac{R_0}{R} = B_0 \frac{R_0}{R_0 + r \cos \theta}$$

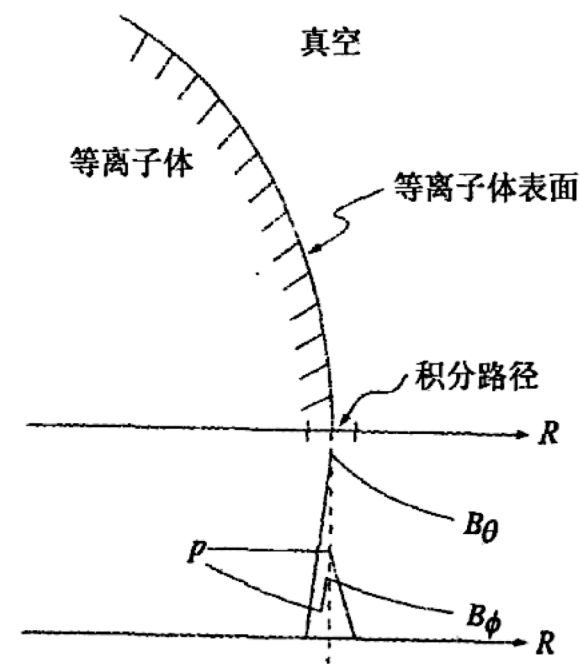
- 其中， B_0 是 $R = R_0$ 处的外加环向磁场。

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——二维表面电流的平衡

- 在表面电流外的区域中极向磁场 $\hat{B}_p(r, \theta)$ 不为零。一般来说，计算真空区域每一处的 $\hat{B}_p(r, \theta)$ 是困难的，但是稳定性分析仅需要知道等离子体表面附近的磁场。利用下面的磁流体力学压强平衡的“跳变条件”，讲究可以得到有关表面极向磁场的有限信息：

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

- 如右图所示，在穿越等离子体-真空界面的无限小的径向距离上对这个方程进行积分。允许磁场和压强的值在界面两侧跳变，那么磁场和压强的法向梯度在界面处变成了 δ 函数。



穿越等离子体-真空分界面的积分

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——二维表面电流的平衡

- 但压强和磁场在界面两侧的等离子体区域和真空区域内都是平滑的，意味着 $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$ 项穿越界面的积分为零。原因：尽管磁场存在跳变，但运算符 $\mathbf{B} \cdot \nabla$ 只与表面导数有关，而由于 \mathbf{B} 就在表面上，也就是说，因为在表面上 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ ，所以不存在法向导数。因此对 $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$ 项的积分仅与无限短距离上的阶跃函数的积分有关，而它的贡献为零。类似地，惯性项穿越界面的积分一定为零。如果不为零，速度 \mathbf{v} 将不得不发生跳变，这意味着加速度无穷大（从 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ 项即可知），这没有物理意义，是不允许出现的。
- 结论：穿越等离子体-真空界面的严格的非线性跳变条件只能由梯度项的法向分量所引起，它可以写为：

$$\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \Big|_{s_p^-}^{s_p^+} = 0$$

- 其中， S_p 是包括平衡和稳定性贡献的精确的等离子体表面： $S_p = a + \xi_r(a, \theta, \phi)$ 。

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性____二维表面电流的平衡

- 将上式应用到平衡态下等离子体-真空界面 $S_p = a$ 上，可以得到所需的平衡态下真空区域中靠近表面的极向磁场的表达式：

$$\hat{B}_\theta^2(a, \theta) = 2\mu_0 p + \frac{B_i^2 - B_0^2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$$

- 其中， $\hat{\mathbf{B}}_p = \hat{B}_\theta \mathbf{e}_\theta$ ； $\varepsilon = a/R_0$ 是等离子体环径比的倒数。根据稳定性分析，上式是仅需的平衡态信息。尽管它看起来简单，但它可以描述多种聚变位形，各种位形之间的区别仅在于参数 p ， B_i ， B_0 和 ε 的不同选择。

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性____等离子体中的扰动磁场

- 线性磁流体力学稳定性分析：待定的本征函数只能简化到在等离子体表面算出的等离子体位移的法向分量，也就是说，本征函数是 $\xi(\theta, \phi) \equiv \xi_r(a, \theta, \phi)$ 。此外，在轴对称系统中可以对 ϕ 做傅里叶分析，然后分别处理每一种傅里叶模式：
$$\xi(\theta, \phi) = \xi(\theta) \exp(-in\phi)$$
- 其中， n 是刻画每一种傅里叶模的环向波数。根据不同的应用，待定的本征值是使系统临界稳定的（即 $\omega^2 = 0$ ）等离子体比压 β 或者是等离子体电流 I 的值。
- 在稳定性分析中，目的是算出等离子体区域和真空区域的扰动磁场，并用 $\xi(\theta, \phi)$ 将它们表示出来。利用式 $(p + B^2/2\mu_0)|_{s_p^-}^{s_p^+} = 0$ 给出的线性化的压强平衡跳变条件，在等离子体-真空界面上对这些解进行匹配，就可以得到本征值。

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——等离子体中的扰动磁场

- 确定等离子体区域内扰动磁场的关键是，在表面电流模型中， ξ 的计算可以简化为求解拉普拉斯方程的问题。对临界稳定性分析来说，线性化的动量方程简化为：

$$B_\phi J_1 \times e_\phi - \nabla p_1 = 0$$

- 由 e_ϕ 分量得出 $(in/R)p_1 = 0$ 或 $p_1 = -\gamma p \nabla \cdot \xi = 0$ 。
- 如果模数 $n \neq 0$ ，那么扰动压强为零，本征函数所描述的流体是不可压缩的。如果 $p_1 = 0$ ，动量方程简化为 $J_1 \times e_\phi = 0$ ，它的解为 $J_1 = \lambda_1(r, \theta) \exp(-in\phi) e_\phi$ 。其中 $\lambda_1(r, \theta)$ 是任意标量函数。注意到 $\nabla \cdot J_1 = 0$ 的条件简化为 $(in/R)\lambda_1 = 0$ 或者 $\lambda_1 = 0$ 。结论是：在表面电流模型中，等离子体内部的扰动电流也必须为零：

$$J_1 = 0$$

- 所以， B_1 作为真空磁场（即 $\nabla \times B_1 = \nabla \cdot B_1 = 0$ ）可以写为：

$$B_1 = \nabla V_1$$

- 其中， V_1 满足：

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性____等离子体中的扰动磁场

- 势函数 V_1 通过边界条件与表面位移相耦合。这要求：①等离子体内部的 V_1 应具有正则性；②表面上扰动磁场的法向分量满足 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1|_a = \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})|_a$ 。

- 最后的这个条件简化为：

$$\left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_a = - \frac{inB_\phi}{R} \xi \Big|_a = - \frac{inB_i}{R_0(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} \xi$$

- 上面两个式子就是计算等离子体区域扰动磁场所需的公式。它们可以在多种条件下得到解。无论什么情形，一旦解出了这些方程，压强平衡匹配条件所需的物理量即为 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1|_a$ ，它可以很容易地用 V_1 表示如下：

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1 \Big|_a = - \frac{inB_\phi}{R} V_1 \Big|_a = - \frac{inB_i}{R_0(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} V_1 \Big|_a$$

- 这样就给出了等离子体区域的稳定性公式。

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——真空区域的扰动磁场

- 真空区域扰动磁场的计算与等离子体区域中的计算非常类似。因为感兴趣的区域是真空，所以可以用势函数立刻写出扰动磁场：

$$\hat{B}_1 = \nabla \hat{V}_1$$

- 其中， \hat{V}_1 满足：

$$\nabla^2 \hat{V}_1 = 0$$

- \hat{V}_1 有两个边界条件。首先假设包围着等离子体的是半径为 b 的圆截面同心理想导体壁。在理想导体壁上，磁场法向分量必定为零，因此第一个边界条件可以写为：

$$\left. \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \right|_b = 0$$

- 注意，特殊极限 $b/a \rightarrow \infty$ 对应于没有导体壁的情形。为简单起见，电阻性导体壁的情形将在后面讨论。

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——真空区域的扰动磁场

- 第二个边界条件将 \hat{V}_1 和表面扰动耦合：在等离子体区域，扰动磁场的法向分量与边界上位移矢量的关系为 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1|_a = \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\xi \times \mathbf{B})|_a$ 。设想将等离子体区稍稍扩展到真空区域，那么真空区域的扰动磁场所对应的边界条件是 $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a = \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\xi \times \hat{\mathbf{B}}_1)|_a$ 。注意，这里用的是真空磁场 $\hat{\mathbf{B}}$ 而不是等离子体区域的磁场 \mathbf{B} 。第二个边界条件简化为：

$$\left. \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \right|_a = \left(-\frac{in\hat{B}_\phi}{R} + \frac{\hat{B}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \xi \Big|_a = \left[-\frac{inB_0}{R_0(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{\hat{B}_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \xi$$

- 前面三个式子描述了真空区域的稳定性问题。最后，与等离子体区域中情形一样，一旦得到了真空区域的解，则压强平衡匹配条件所需的物理量即为 $\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a$ ，可以用 \hat{V}_1 表示成：

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1|_a = \left(-\frac{in\hat{B}_\phi}{R} + \frac{\hat{B}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \hat{V}_1 \Big|_a = \left[-\frac{inB_0}{R_0(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{\hat{B}_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \hat{V}_1 \Big|_a$$

- 这样就完成了真空区域的稳定性分析过程。

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——压强平衡匹配条件

- 等离子体和真空区域的扰动磁场原则上可以通过任意选取的表面位移 $\xi(\theta, \phi)$ 计算出来。但这里还没有足够的信息来确定本征函数和本征值。完成系统分析还需要更多的信息，那就是穿越等离子体-真空界面的压强平衡匹配条件。
- 通过对 $(p + B^2/2\mu_0)|_{S_p^+} = 0$ 给出的准确的压强平衡跳变条件进行线性化，即可得到所需的关系式。 $(p + B^2/2\mu_0)|_{S_p^+} = 0$ 中的表面是指平衡表面加上扰动表面 $S_p = a + \xi(\theta, \phi)$ ，可以直接进行泰勒展开得到：
$$\left[p_1 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1 + \xi \frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right]_{a^-} = \left[\frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 + \xi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \right) \right]_{a^+}$$
- 注意到 $p_1 = 0$ 和 $p = \text{常数}$ ，因此这个表达式可以化简。

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——压强平衡匹配条件

- 另外，在表面上， B_ϕ 的径向导数可以容易地算出：

$$\left. \frac{\partial B_\phi}{\partial r} \right|_a = \left. \frac{\partial}{\partial r} \frac{B_i R_0}{(R_0 + r \cos \theta)} \right|_a = \frac{B_i \cos \theta}{R_0 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$$

- 对于 \hat{B}_ϕ 有类似的表达式。最后，利用 $\nabla \times \hat{\mathbf{B}} = 0$ 的条件并注意到 $\hat{B}_r(a, \theta) = 0$ (对应于 $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}(a, \theta) = 0$)， $\partial \hat{B}_\theta / \partial r|_a$ 可以通过 $\hat{B}_\theta(a, \theta)$ 直接算出：

$$\left. \frac{\partial \hat{B}_\theta}{\partial r} \right|_a = -\frac{\hat{B}_\phi}{a}$$

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——压强平衡匹配条件

- 综合这些结果即得到所需的压强平衡跳变条件的形式：

$$\left[\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1 - \frac{B_i^2 \cos \theta}{R_0(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \xi \right]_{a^-} = \left[\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 - \frac{B_0^2 \cos \theta}{R_0(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \xi - \frac{\hat{B}_\theta^2}{a} \xi \right]_{a^+}$$

- 表面电流稳定性问题的数学形式现在就完成了。显然，此时这个形式在本质上仍然是概念上的，如何确定临界压强和电流的实际途径到目前为止还不清楚。解决这一问题的最佳途径是直接研究各种磁约束聚变位形的稳定性。这些应用展示了表面电流模型在理论预言磁流体力学压强电流稳定性极限值的过程中的实用性。

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——表面电流模型小结

- 为了方便起见，求解表面电流模型的步骤小结如下。
- 平衡：

$$\hat{B}_\theta^2(a, \theta) = 2\mu_0 p + \frac{B_i^2 - B_0^2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$$

- 等离子体内部的扰动磁场：

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 V_1 &= 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_a &= -\frac{in B_i}{R_0(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \xi \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1 \Big|_a &= -\frac{in B_i}{R_0(1 + \cos \theta)^2} V_1 \end{aligned} \right\}$$

6.6 表面载流等离子体柱的稳定性——表面电流模型小结

- 真空区域的扰动磁场：

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \hat{V}_1 &= 0 \\ \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \Big|_b &= 0, \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial r} \Big|_a = \left[-\frac{\ln B_0}{R_0(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{\hat{B}_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \xi \\ \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 \Big|_a &= \left[-\frac{\ln B_0}{R_0(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{\hat{B}_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \hat{V}_1 \Big|_a \end{aligned} \right\}$$

- 压强平衡跳变条件：

$$[\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1]_a = \frac{(B_0^2 - B_i^2) \cos \theta}{R_0(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \xi + \frac{\hat{B}_\theta^2}{a} \xi$$

- 这些是将用于分析各种聚变位形的稳定性极限值所需的方程组。