数值分析期末试卷 2023

LK 伴小太阳

2023 年 5 月 29 日

题目 1: 叙述多项式插值误差插值定理并给出定理的证明

解答:课本 ppt 都有。

题目 1 的注记:正课的最后一节课会给出一些要求背诵的定理，从这题可以看出，除了背过程，还要背定理本身内容

题目 2:

$$f(x) = |x+2|, x \in [-3, 0]$$

构造一次多项式在连续函数范数意义下逼近 f

解答:注意到最大误差仅可能出现在-3,-2,0 这三个点，所以临界情况是这三个点误差相同，列方程就可以解出答案

题目 2 的注记:作业 ppt 课本里面都有影子，但是不明显，需要深入理解平时内容

题目 3: 证明对任意的二阶光滑 f，存在一个 y，使得

$$\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}f(\frac{2}{3}) + \frac{1}{72}f''(y)$$

解答:把 f 在 2/3 进行带二阶余项的泰勒展开就可以证明

题目 3 的注记:这题比较具有技巧，看个人数学分析学的怎么样吧。我反正是花了点时间瞪眼出来的。

题目 4: 考虑积分公式

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{N}(a_0(f(x_0)+f(x_{N-1}))+a_1(f(x_1)+f(x_{N-2}))+\sum_{i=2}^{N-3} f(x_i))$$

其中 $x_i = i/N$

问最多可以如何选择 a_0 和 a_1 使得精度达到多少阶，并且计算出精度最高的时候的 a_0 和 a_1

解答:左边视为 F(1)，其中 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$，然后在 0 处泰勒展开，右边每个 f 在 0 处泰勒展开，对比 $f^{(k)}(0)$ 的系数

题目 4 的注记:ppt 有类似的影子，但是作业课本基本没涉及

题目 5: 考虑空间 $V_h = \{v : v|_{I_j} \in P^k(I_j), 1 \leq j \leq N\}$ 其中 $I_j = (x_{j-1}, x_j), 1 \leq j \leq N, x_j = jh, h = \frac{1}{N}$

$P^k(I_j)$ 是定义在区间 I_j 上次数不超过 k 的多项式，假设函数 $u \in C^{(k+2)}[0,1]$，$u(x)$ 在空间 V_h 的投影 u_h 满足

$$||u-u_h||_2 \leq ||u-v||_2, v \in V_h$$

1. 证明存在依赖于 $u(x)$ 的导数的常数 C，使得 $||u-u_h||_2 \leq Ch^{k+1}$
2. 设 $\phi(x) \in C^{(k+2)}[0,1]$，证明存在依赖于 $u(x)$ 和 $\phi(x)$ 的常数 C，使得
$$|\int_0^1 (u(x)-u_h(x))\phi(x)dx| \leq Ch^{2k+2}$$

解答:第一问考虑带余项的泰勒展开，取前 k+1 项作为 v 即可证明，第二问可以考虑用 $\phi - \phi_h$ 代替 ϕ 来证明，注意我这里的 ϕ_h 就是所谓取带余项泰勒展开的前 $k+1$ 项

题目 5 的注记:这题纯纯泛函题。

题目 6: 考虑单步法

$$y_{n+1} = y_n + ahf(x_n, y_n) + bhf(x_n + rh, y_n + rhf(x_n, y_n))$$

1. 证明上述方法相容当且仅当 $a + b = 1$

2. 证明上述方法的精度不超过 2 阶

3. 选择一组系数是 a, b, r 保证该单步方法是二阶的，并且把这个二阶单步方法写成欧拉向前格式的线性组合形式

4. 用上一问的格式来求解常微分方程组

$$y' = -\lambda y, y(0) = 1$$

   证明 y_n 有界的充要条件是 $h\lambda \leq 2$

5. 考虑常微分方程组

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 400 \\ -10 & -1004 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

   采用第三问的方法求解，h=0.01 是否是合适的步长，说说你选取步长的方法

解答:前三问基本都是泰勒展开证明，记住欧拉格式的定义就可以了，第四问也比较简单，注意不要忘记初值，第五问比较开放，先用 jordan 标准型考虑，然后自适应调整步长就好了

题目 6 的注记:要求理解 ode 那一块的本质