编写：jefice

第二章

1.最优性判定、退化解、无穷多最优解、无界解、无可行解

◎1.8 表 1－19 是某求极大化线性规划问题计算得到的单纯形表。表中无人工变量，a_1、a_2、a_3、d、c_1、c_2 为待定常数。试说明这些常数分别取何值时，以下结论成立。

(1)表中解为惟一最优解；

(2)表中解为最优解，但存在无穷多最优解；

(3)该线性规划问题具有无界解；

(4) 存在更优解，进基 x1，离基 x6

基	x1	x2	x3	x4	x5	X6	解
z	c1	c2	0	0	-3	0	0
x3	4	a1	1	0	a2	0	d
x4	-1	-3	0	1	-1	0	2
x6	a3	-5	0	0	-4	1	3

分析 分别根据各种类型的解的概念进行求解。

解 (1)当解为惟一最优解时，必有 $d\geqslant 0, c_1<0, c_2<0$。

(2)当解为最优解，但存在无穷多最优解时，必有 $d\geqslant 0, c_1\leqslant 0, c_2=0$ 或 $d\geqslant 0, c_1=0, c_2\leqslant 0$。

(3)当该问题为无界解时，必有 $d\geqslant 0, c_1\leqslant 0, c_2>0$ 且 $a_1\leqslant 0$。

(4)当解为非最优，为对解进行改进，当换入变量为 x_1，换出变量为 x_6，必有 $d\geqslant 0$，$c_1>0$，且 $c_1\geqslant c_2, a_3>0, \frac{3}{a_3}<\frac{d}{4}$。

2.单纯形法与方案优化

9 Gutchi 公司生产钱包、化妆袋和背包. 生产原料需要皮革, 生产过程需要缝纫和修整两道工序. 下表给出了生产这三种产品所需要的资源量, 以及资源的可用量和单位产品的价格.

资源	单位产品的资源需求量			日可用量
	钱包	化妆袋	背包	
皮革 (平方英尺)	2	1	3	42
缝纫 (小时)	2	1	2	40
修整 (小时)	1	0.5	1	45
售价 (美元)	24	22	45	

(a) 建立线性规划模型, 用单纯形法求解模型.

(b) 从最优解中分析每种资源的使用状况.

解：(a) 略

(b)

资源	松弛变量的值	状况	是否起作用
皮革	s1=0	匮乏	起作用的约束
缝纫	s2=0	匮乏	起作用的约束
修整	s3=25	充裕	不起作用的约束

因此，进行方案改进时，从资源匮乏的皮革、缝纫入手；或者减少没有必要的成本修整。
3.大 M 法、二阶段法
max z = 2x1 + 3x2- 5x3
x1 + x2+ x3 = 7
2x1 - 5x2 + X3 ⩾10
x1, x2, x3⩾0
（1）使用大 M 法求解相应的线性规划间题，其中 M 不取具体值
（2）二阶段法解决
解答略
注：初始单纯性表的构建

4.证明题
可行解->基可行解？
最优可行解->最优基可行解？
进基准则和最优性判定
（以上解答过程见课本）

有可行解->大 M 法的人工变量为零？
证明略
提示：从 M 的主观性出发，若人工变量非零，那么直接带入目标行，取 M 无穷大，则 z 可以无穷小（极大值问题）或无穷大（极小值问题）

举例说明存在退化的基可行解，不满足最优性条件，但却是最优解
2.5A-3：退化解的循环

第三章
1.对偶问题的构造
（判断）
原始问题不等式约束的对偶变量有符号限制（）
原始问题无符号限制变量对应对偶约束为等式形式（）
原始问题无可行解，对偶问题便无可行解（）
原始问题有无界解，对偶问题便无可行解（）
原始问题无可行解，对偶问题便有无界解（）

除第三、五个不一定，其它对

2.证明题
对偶问题的对偶是原始问题
证明：分别按极大值问题和极小值问题推演一遍即可
极小值规划问题

$$\min z=\{\boldsymbol{c^T x}|\boldsymbol{Ax}\le \boldsymbol{b},\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{d},\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{0}\} \quad\Leftrightarrow\quad \min z=\{\boldsymbol{c_N^T x_N}|\boldsymbol{Ax_N}+\boldsymbol{x_B}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{Bx_N}=\boldsymbol{d},\boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{0}\}$$

$$\Leftrightarrow\quad \max w=\{\boldsymbol{y_1^T b}+\boldsymbol{y_2^T d}|\boldsymbol{y_1^T A}+\boldsymbol{y_2^T B}\le\boldsymbol{c^T},\boldsymbol{y_1^T}\le\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\text{无符号限制}\}$$

$$=\{\boldsymbol{b^T y_1}+\boldsymbol{d^T y_2}|\boldsymbol{A^T y_1}+\boldsymbol{B^T y_2}\le\boldsymbol{c},\boldsymbol{y_1}\le\boldsymbol{0},\boldsymbol{y_2}\text{无符号限制}\}$$

$$\max w=\{-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_1^- + \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{y}_2^+ - \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{y}_2^- \big| -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}_1^- + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}_2^+ - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}_2^- \le \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}_1^-, \boldsymbol{y}_2^-, \boldsymbol{y}_2^+ \ge \boldsymbol{0}\}$$
$$(\boldsymbol{y}_1^- = -\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_2^+ - \boldsymbol{y}_2^-)$$
$$\Leftrightarrow \quad \max w=\{-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}_1^- + \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{y}_2^+ - \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{y}_2^- \big| \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}_2^+ - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}_2^- + \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}_1^-, \boldsymbol{y}_2^-, \boldsymbol{y}_2^+, \boldsymbol{y}_3 \ge \boldsymbol{0}\}$$
$$\Leftrightarrow \quad \min z` = \left\{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{c} \middle| -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A} \ge -\boldsymbol{b}^T, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B} \ge \boldsymbol{d}^T, -\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B} \ge -\boldsymbol{d}^T, \boldsymbol{x}^T \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}\text{无符号限制}\right\}$$
$$= \{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \big| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}^T \ge \boldsymbol{0}\}$$

注：大于等于约束乘负号转化成小于等于即可

注：极大值问题类似，此处不再写。

3.广义单纯性法、对偶单纯形法

解决下列问题

$$\min z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \geqslant 0 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 \geqslant 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 \geqslant 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

初始单纯形表如下：

基	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	解
z	-3	-2	-1	-4	0	0	0	0
x5	-2	-4	-5	-1	1	0	0	0
x6	-3	1	-7	2	0	1	0	-2
x7	-5	-2	-1	-6	0	0	1	-15

由表知，该极小值规划问题的最优性已满足、可行性未满足

离基 x7，进基 x1

基	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	解
z	0	-0.8	-0.4	-0.4	0	0	-0.6	9
x5	0	-3.2	-4.6	1.4	1	0	-0.4	6
x6	0	2.2	-6.2	5.6	0	1	0	7
x1	1	0.4	0.2	1.2	0	0	-0.2	3

可行性满足，迭代结束！

决策变量	最优解
x1	3
x2	0
x3	0
x4	0
z	9

4.后最优优化

（判断）

改变目标行系数可能影响最优解的可行性（）

对极大值规划问题，添加约束后若可行性不满足，重新进行单纯性规划可能导致新的目标值比原目标值大（）

均错误

3.10 现有线性规划问题

$$\max z=-5x_1+5x_2+13x_3$$
$$\begin{cases}-x_1+x_2+3x_3\leqslant 20 & ①\\ 12x_1+4x_2+10x_3\leqslant 90 & ②\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

先用单纯形法求出最优解，然后分析在下列各种条件下，最优解分别有什么变化？

(1) 约束条件①的右端常数由 20 变为 30；

(2) 约束条件②的右端常数由 90 变为 70；

(3) 目标函数中 x_3 的系数由 13 变为 8；

(4) 约束中 x_1 的系数列向量由 $\begin{pmatrix}-1\\12\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$；

(5) 增加一个约束条件③$2x_1+3x_2+5x_3\leqslant 50$；

(6) 将原约束条件②改变为 $10x_1+5x_2+10x_3\leqslant 100$。

解:

解 在上述线性规划问题的第①、②个约束条件中分别加入松弛变量 x_4,x_5，得

$$\max z=-5x_1+5x_2+13x_3+0x_4+0x_5$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+x_2+3x_3+x_4=20\\ 12x_1+4x_2+10x_3+x_5=90\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

列出此问题的初始单纯形表，并进行迭代计算。

表 2—8

c_j			−5	5	13	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	20	−1	1	[3]	1	0	20/3
0	x_5	90	12	4	10	0	1	9
c_j-z_j			−5	5	13	0	0	
13	x_3	20/3	−1/3	[1/3]	1	1/3	0	20
0	x_5	70/3	46/3	2/3	0	−10/3	1	35
c_j-z_j			−2/3	2/3	0	−13/3	0	
5	x_2	20	−1	1	3	1	0	
0	x_5	10	16	0	−2	−4	1	
c_j-z_j			0	0	−2	−5	0	

由表 2—8 中计算结果可知，线性规划问题的最优解 $X^*=(0,20,0,0,10)^T$，目标函数最优值 $z^*=5\times 20=100$。

(1)约束条件①的右端常数由 20 变为 30；

$$B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\90\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\-30\end{bmatrix}$$

列出单纯形表，并利用对偶单纯形法求解。

表 2—9

c_j			−5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	30	−1	1	3	1	0
0	x_5	−30	16	0	[−2]	−4	1
c_j-z_j			0	0	−2	−5	0
5	x_2	−15	23	1	0	[−5]	3/2
13	x_3	15	−8	0	1	2	−1/2
c_j-z_j			−16	0	0	−1	−1
0	x_4	3	−23/5	−1/5	0	1	−3/10
13	x_3	9	6/5	2/5	1	0	1/10
c_j-z_j			−103/5	−1/5	0	0	−13/10

由表 2—9 中计算结果可知，线性规划问题的最优解变为 $X^*=(0,0,9,3,0)^T$，目标函数最优值 $z^*=13\times9=117$。

(2)约束条件②的右端常数由 90 变为 70：

$$B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\70\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\-10\end{bmatrix}$$

列出单纯形表，并利用对偶单纯形法求解。

表 2—10

c_j			−5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	20	−1	1	3	1	0
0	x_5	−10	16	0	[−2]	−4	1
c_j-z_j			0	0	−2	−5	0
5	x_2	5	23	1	0	−5	3/2
13	x_3	5	−8	0	1	2	−1/2
c_j-z_j			−16	0	0	−1	−1

由表 2—10 中计算结果可知，线性规划问题的最优解变为 $X^*=(0,5,5,0,0)^T$，目标函数最优值 $z^*=5\times5+13\times5=90$。

(3)目标函数中 x_3 的系数由 13 变为 8：

x_3 为非基变量，其检验数变为 $\sigma_3=8-5\times3-0\times(-2)=-7<0$，所以线性规划问题的最优解不变。

(4)x_1 的系数列向量由 $\begin{bmatrix}-1\\12\end{bmatrix}$ 变为 $\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$：

x_1 在最终单纯形表中的系数列向量变为 $P'_1=B^{-1}P_1=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$，从而 x_1 在最终单纯形表中的检验数变为 $\sigma'_1=c_1-C_BB^{-1}P_1=-5-(5,0)\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}=-5<0$，所以

线性规划问题的最优解不变。

(5)增加一个约束条件：$2x_1+3x_2+5x_3\leqslant 50$；在约束条件③中加入松弛变量 x_6，得 $2x_1+3x_2+5x_3+x_6=50$，加入原单纯形表，并进行迭代计算。

表 2—11

c_j			−5	5	13	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	x_2	20	−1	1	3	1	0	0
0	x_5	10	16	0	−2	−4	1	0
0	x_6	50	2	3	5	0	0	1
5	x_2	20	−1	1	3	1	0	0
0	x_5	10	16	0	−2	−4	1	0
0	x_6	−10	5	0	[−4]	−3	0	1
c_j-z_j			0	0	−2	−5	0	0
5	x_2	25/2	11/4	1	0	−5/4	0	3/4
0	x_5	15	27/2	0	0	−5/2	1	−1/2
13	x_3	5/2	−5/4	0	1	3/4	0	−1/4
c_j-z_j			−5/2	0	0	−7/2	0	−1/2

由表 2—11 中计算结果可知，线性规划问题的最优解变为 $X^*=(0,\frac{25}{2},\frac{5}{2},0,15,0)^T$，目标函数最优值 $z^*=5\times\frac{25}{2}+13\times\frac{5}{2}=95$。

(6)将原约束条件②改变为：$10x_1+5x_2+10x_3\leqslant 100$

x_1 在最终单纯形表中的系数列向量变为 $P'_1=B^{-1}P_1=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\14\end{bmatrix}$，从而 x_1 在最终单纯形表中的检验数变为 $\sigma'_1=c_1-C_BB^{-1}P_1=-5-(5,0)\begin{bmatrix}-1\\14\end{bmatrix}=0$

x_2 在最终单纯形表中的系数列向量变为 $P'_2=B^{-1}P_2=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，从而 x_2 在最终单纯形表中的检验数变为 $\sigma'_2=c_2-C_BB^{-1}P_2=5-(5,0)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=0$

又因为 $B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\20\end{bmatrix}$ 的各分量均大于 0，所以线性规划问题的最优解不变。

注：以上直接截图答案，单纯形表要自己转换成眼熟的方式

第四章

1.判断矩阵正负定

方法：顺序主子式；凑方；

2.无约束问题

求导、给出改进方向

(c) min $f(\boldsymbol{x}) = -x_1x_2 + 2x_2^2 + 16x_1$, $\boldsymbol{x}_0 = (3,0)$.

(d) max $f(\boldsymbol{x}) = x_1x_2 - 10x_1 + 4x_2$, $\boldsymbol{x}_0 = (-4,10)$.

(c) min $f(x) = -x_1x_2 + 2x_2^2 + 16x_1$ $x_0 = (3,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = -x_2 + 16 = 16$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = -x_1 + 4x_2 = -3$

$\nabla f(x_0) \neq 0$，不是平稳点

由泰勒定理 $f(x_0 + td) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T td + o(\|td\|)$ $t>0$

$\nabla f(x_0)^T = (16, -3)$

$d = \begin{pmatrix} -16 \\ 3 \end{pmatrix}$是一个能改善解的方向

(d)$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_2 - 10 \\ x_1 + 4 \end{bmatrix}$代入$x_0 = (-4,10)$ $\nabla f(x) = 0$

x_0是平衡点$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 不定，鞍点

3.等式约束

1 考虑等式约束优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2 + 10x_3^2 \\ \text{s.t.} \quad & g_1(\boldsymbol{x}) = x_1 - x_2^2 + x_3 - 5 = 0 \\ & g_2(\boldsymbol{x}) = x_1 + 5x_2 + x_3 - \tfrac{11}{4} = 0. \end{aligned}$$

(a) 求解问题的最优解.

(b) 假设约束变化为 $g_1(\boldsymbol{x}) = 0.01$, $g_2(\boldsymbol{x}) = 0.02$, 利用灵敏度分析法求解最优目标函数值的改变量.

当二阶不定时，不一定不是极值点，用定义去判定！

4.不等式约束——KKT 条件

考虑非线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) = 15x_1^2 + 4x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 = 8 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) 写出问题的 KKT 条件.

(b) 用 KKT 条件验证点 $\boldsymbol{x}_0 = (0,4)$ 不是最优解.

(c) 验证在点 $\boldsymbol{x}_0 = (0,4)$ 处, 存在可行下降方向 $\boldsymbol{d} = (2,-3)$.

(d) 求解 (a) 中的 KKT 条件, 并说明得到的 KKT 点是否为问题的最优解.

（a）（b）略

（c）改进方向：确保约束（gi(x)=0）成立的情况下，验证函数值【如果是求出这个方向，那么一阶导】

（d）试探解的求法：从 KKT 条件(iii)中，假设一个值不为 0 去做

(a) KKT条件

1. $g_1(x) = 3x_1 + 2x_2 - 8 = 0$, $g_2(x) = x_1 \geq 0$, $g_3(x) = x_2 \geq 0$.
2. $30x_1 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, $8x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0$.
3. $\lambda_i g_i(x) = 0$, $i = 1,2,3$.
4. $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$.

假设λ_2不为 0，则$x_1 = 0$ $x_2 = 4$ $\lambda_3 = 0$ $\lambda_1 = 16$ (ii)不成立，故λ_2一定为 0

假设λ_3不为 0，则$x_2 = 0$ $x_1 = \frac{8}{3}$ $\lambda_2 = 0$ $\lambda_1 = \frac{80}{3}$ (ii)不成立，故λ_3一定为 0

假设λ_1 x_1 x_2不为 0，则$3x_1 + 2x_2 - 8 = 0$ $10x_1 = \lambda_1$ $4x_2 = \lambda_1$

解得$x^* = (1,2.5)$ $\lambda^* = (10,0,0)$

定义 $L_1(x) = L(x, \lambda^*) = 15x_1^2 + 4x_2^2 - 10(3x_1 + 2x_2 - 8)$，则

$$\nabla^2 L_1(x) = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} > 0$$

所以 $x^* = (1, 5/2)$ 是唯一的严格极小值点，则是最优解。

5.判定凸集、凸函数

设 $C \subset \mathbb{R}^m$ 是一个凸集. 证明集合 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集:

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times m},\ \boldsymbol{y} \in C\}.$$

6.判定凸规划

$$\begin{aligned} \text{(a)}\ \ \max\ \ & f(\boldsymbol{x}) = \ln(x_1) + 3x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1 \geq 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 9. \end{aligned}$$

f(x)为凹函数、g1(x)、g2(x)为凸函数、g3(x)为仿射函数

（本章难点在于求 KKT 点，而这玩意就是纯试）

7.求 KKT 点

$$\begin{aligned} \text{(d)}\ \ \min\ \ & f(\boldsymbol{x}) = 14x_1 + 9x_2 - 7x_3 \\ \text{s.t.}\ \ & 6x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & 3x_2 + 11x_3 \leq 25 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

显然，凸规划问题

KKT 条件

(i)$6x_1 + 2x_2 \leq 20$ $3x_2 + 11x_3 \leq 25$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(ii)$14 - 6\lambda_1 - \lambda_3 = 0$ $9 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_4 = 0$ $-7 - 11\lambda_2 - \lambda_5 = 0$

(iii) $\lambda_1(6x_1 + 2x_2 - 20) = 0$ $\lambda_2(3x_2 + 11x_3 - 25) = 0$ $\lambda_3 x_1 = 0$ $\lambda_4 x_2 = 0$ $\lambda_5 x_3 = 0$

(iv) $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$ $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$

由(ii)可以知晓λ_3,λ_4必然不为 0，否则与(iv)矛盾

故$x_1,x_2=0$ $\lambda_1=0$ $\lambda_3=14$

假设λ_5不为 0，则x_3为 0，λ_2为 0，$\lambda_5=-7$，错误，故$\lambda_5=0$ $\lambda_2=-\frac{7}{11}$ $\lambda_4=\frac{120}{11}$ $x_3=\frac{25}{11}$

综上，$x^*=\left(0,0,\frac{25}{11}\right)$ $\lambda^*=\left(0,-\frac{7}{11},14,\frac{120}{11},0\right)$

凸规划问题，KKT 点即为全局极小值点，故$f^*=-\frac{175}{11}$ $x^*=\left(0,0,\frac{25}{11}\right)$

8.求 KKT 点

考虑非线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & f(\boldsymbol{x}) = 2\ln(x_1) + 8\ln(x_2) \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + x_2 = 8 \\ & x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

(a) 写出问题的 KKT 条件.

(b) 用 KKT 条件验证点 $\boldsymbol{x}_0 = (\frac{3}{2}, 2)$ 不是最优解.

(c) 验证在点 $\boldsymbol{x}_0 = (\frac{3}{2}, 2)$ 处, 存在可行上升方向 $\boldsymbol{d} = (-1, 4)$.

(d) 求解 (a) 中的 KKT 条件, 并说明得到的 KKT 点是否为问题的最优解.

(a)KKT 条件：

(i)$4x_1+x_2=8$ $x_1\geq 1$ $x_2\geq 1$

(ii)$\frac{2}{x_1}-4\lambda_1-\lambda_2=0$ $\frac{8}{x_2}-\lambda_1-\lambda_3=0$

(iii)$\lambda_2(x_1-1)=0$ $\lambda_3(x_2-1)=0$

(iv)$\lambda_2,\lambda_3\leq 0$

(b)由$x_1=\frac{3}{2}$ $x_2=2$知，$\lambda_2,\lambda_3=0$，代入(ii) $\lambda_1=\frac{1}{2x_1}=\frac{1}{3}$ $\lambda_1=\frac{8}{x_2}=\frac{1}{4}$矛盾，不成立，该点不是 KKT 点，不是最优解

(c)在$x=(\frac{3}{2},2)$处，第一个约束成立，先验证在该方向上，此约束仍成立

记$x=\left(\frac{3}{2},2\right)+\delta d=(\frac{3}{2}-\delta,2+4\delta)$

代入约束，$4x_1+x_2=4\left(\frac{3}{2}-\delta\right)+2+4\delta=8$仍成立

（其它的验证办法：$g_1(x)=4x_1+x_2-8$

$$\nabla g_1(x_0)=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} \quad g_1(x)=g_1(x_0)+\delta\nabla g_1(x_0)^T d=0$$

约束成立）

验证在该方向上的优化性

$$\nabla \mathrm{f}(x_0)^T \mathrm{d}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}=\frac{44}{3}$$

在该方向上有使目标值变大的趋势

(d)求 KKT 点
KKT 条件:
(i)$4x_1+x_2=8 \quad x_1\geq 1 \quad x_2\geq 1$
(ii)$\frac{2}{x_1}-4\lambda_1-\lambda_2=0 \qquad \frac{8}{x_2}-\lambda_1-\lambda_3=0$
(iii)$\lambda_2(x_1-1)=0 \quad \lambda_3(x_2-1)=0$
(iv)$\lambda_2,\lambda_3\leq 0$

假设$\lambda_2=0$，则$x_1=1,x_2=4,\lambda_3=0$，(ii)不成立
假设$\lambda_3=0$，则$x_2=1,x_1=\frac{7}{4}$，(ii)不成立

故$\lambda_2,\lambda_3=0 \qquad \lambda_1=\frac{1}{2x_1}=\frac{8}{x_2}$
代入(i)，得$x_1=0.4 \quad x_2=6.4 \quad \lambda_1=1.25$

$$x^*=(0.4,6.4) \qquad \lambda^*=(1.25,0,0)$$

验证该 KKT 点是否为极值点，
法一：验证凸规划

$$\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix}-\frac{2}{x_1^2} & 0\\ 0 & -\frac{8}{x_2^2}\end{bmatrix}<0$$

$f(x)$为凹函数，约束为凸函数、仿射函数，故为凸规划问题，KKT 点即为极大值点
法二：定理 4.7

$$\nabla L_1(x^*)=0 \qquad \nabla^2 L_1(x^*)<0$$

故该点为极大值点

第五章
1.一维搜索法
黄金分割法、二分法
（就纯算）

2.最速上升（下降）法/梯度法
(c) $\min f(\boldsymbol{x})=x_1-x_2+x_1^2-x_1x_2+x_2^2$, $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0)$.

$$\nabla f(x)=\begin{bmatrix}1+2x_1-x_2\\ -1-x_1+2x_2\end{bmatrix}$$

迭代 1

$$\nabla f\left(x^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \qquad x(r)=\begin{bmatrix}r\\ -r\end{bmatrix}$$

$$h(r)=f\left(x(r)\right)=2r+3r^2 \quad h`(r)=2+6r=0 \quad h``(r)=6>0$$

$$r=-\frac{1}{3} \qquad x^{(1)}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

迭代 2

$$\nabla f\left(x^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

故$\left\|x^{*}-x^{(1)}\right\|=0$，$x^{(1)}$为最优解

3.牛顿法

(d) $f(\boldsymbol{x})=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2+x_1-2x_2$, $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,0)$.

$$\nabla f(x)=\begin{bmatrix}2x_1-2x_2+1\\-2x_1+8x_2-2\end{bmatrix}\qquad \nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix}2&-2\\-2&8\end{bmatrix}\qquad -\nabla^2 f\left(x^{(0)}\right)^{-1}=-\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

迭代 1

$$d^{(0)}=-\nabla^2 f\left(x^{(0)}\right)^{-1}\nabla f\left(x^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$x^{(1)}=x^{(0)}+d^{(0)}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

迭代 2

$$d^{(1)}=-\nabla^2 f\left(x^{(1)}\right)^{-1}\nabla f\left(x^{(1)}\right)=\mathbf{0}$$

迭代结束

最优解$x^{*}=x^{(1)}=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)\quad f^{*}=-\frac{1}{3}$

4.可分离有约束规划

注 1：对未线性化的函数才作近似

注 2：限制基的单纯形法要注意两个额外限制

说明下述非线性规划问题是可分离的.

(a) $\max\ f(\boldsymbol{x})=x_1x_2x_3$

s.t. $x_1^2+x_2+x_3\le 4$

$x_1,\ x_2,\ x_3\ge 0.$

考虑目标函数的形式，用取对数的方式来做

记$y_1=x_1+1\quad y_2=x_2+1\quad y_3=x_3+1\quad y_4=y_1y_2y_3\quad y_5=y_1y_2\quad y_6=y_2y_3\quad y_7=y_1y_3$

则有

$$x_1x_2x_3=(y_1-1)(y_2-1)(y_3-1)=y_1y_2y_3-y_1y_2-y_2y_3-y_1y_3+y_1+y_2+y_3-1$$

$$\max f(y)=y_1+y_2+y_3+y_4-y_5-y_6-y_7-1$$

$$s.t.\ \ (y_1-1)^2+y_2+y_3\le 6$$

$$\ln y_1+\ln y_2+\ln y_3-\ln y_4=0$$

$$\ln y_1+\ln y_2-\ln y_5=0$$

$$\ln y_2+\ln y_3-\ln y_6=0$$

$$\ln y_1 + \ln y_3 - \ln y_7 = 0$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \geq 1$$

(c) $\min\ f(\boldsymbol{x}) = (x_1-2)^2 + 4(x_2-6)^2$

s. t. $6x_1 + 3(x_2+1)^2 \leq 12$

$x_1,\ x_2 \geq 0.$

给定分离点 0，1，2

$$f_1(x_1) = (x_1-2)^2 \quad f_2(x_2) = 4(x_2-6)^2$$
$$g_1(x_1) = 6x_1 \quad g_2(x_2) = 3(x_2+1)^2$$

K	a_{1k}	$f_1(x_1)$	$g_1(x_1)$	a_{2k}	$f_2(x_2)$	$g_2(x_2)$
1	0	4	0	0	144	3
2	1	1	6	1	100	12
3	2	0	12	2	64	27

线性化后的规划问题

$$\min z = 4\omega_{11} + \omega_{12} + 144\omega_{21} + 100\omega_{22} + 64\omega_{23}$$
$$s.t.\ 6\omega_{12} + 12\omega_{13} + 3\omega_{21} + 12\omega_{22} + 27\omega_{23} \leq 12$$
$$\omega_{11} + \omega_{12} + \omega_{13} = 1$$
$$\omega_{21} + \omega_{22} + \omega_{23} = 1$$
$$\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23} \geq 0$$

且同时满足两个限制

当前单纯形表

基	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	s	解
z	-4	-1	0	-144	-100	-64	0	0
s	0	6	12	3	12	27	1	12
ω_{11}	1	1	1	0	0	0	0	1
ω_{21}	0	0	0	1	1	1	0	1

选取s、ω_{12}、ω_{21}进基（尽量确保可行性，折衷确保最优性）

初始单纯形表

基	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	s	解
z	-3	0	1	0	44	80	0	145
s	-6	0	6	0	9	24	1	3
ω_{12}	1	1	1	0	0	0	0	1
ω_{21}	0	0	0	1	1	1	0	1

进基ω_{23}，不可选取离基

进基ω_{22}，离基s

基	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	s	解
z	79/3	0	-85/3	0	0	-112/3	-44/9	391/3
ω_{22}	-2/3	0	2/3	0	1	8/3	1/9	1/3
ω_{12}	1	1	1	0	0	0	0	1
ω_{21}	2/3	0	-2/3	1	0	-5/3	-1/9	2/3

进基ω_{11}，离基ω_{12}

基	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	s	解

z	0	-79/3	-164/3	0	0	-112/3	-44/9	104
ω_{22}	0	2/3	4/3	0	1	8/3	1/9	1
ω_{11}	1	1	1	0	0	0	0	1
ω_{21}	0	-2/3	-4/3	1	0	-5/3	-1/9	0

最优性已满足，迭代结束

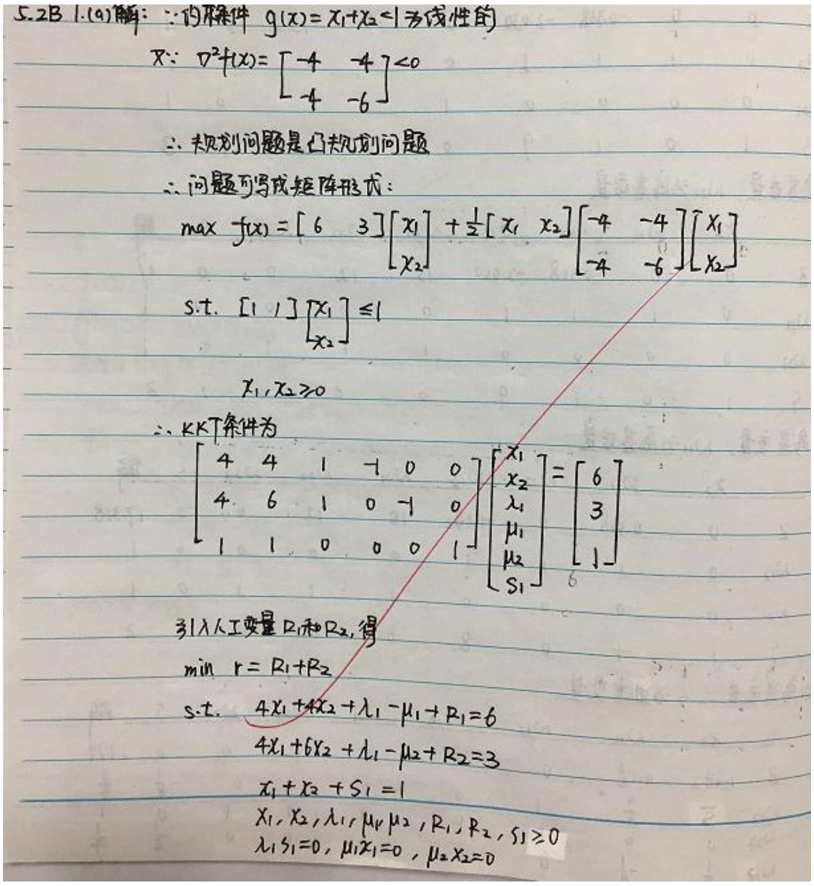
决策变量	最优解
z	104
x_1	0
x_2	1

5.二次规划

(a) $\max\ f(\boldsymbol{x}) = 6x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2$

s.t. $x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1,\ x_2 \geq 0.$



5.2B 1.(a)解：∵约束条件 $g(x)=x_1+x_2\le 1$ 为线性的

又∵ $\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix}-4 & -4\\ -4 & -6\end{bmatrix}<0$

∴规划问题是凸规划问题

∴问题可写成矩阵形式：

$\max\ f(x)=\begin{bmatrix}6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & -4\\ -4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

s.t. $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\le 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

∴KKT条件为

$$\begin{bmatrix}4 & 4 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 4 & 6 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \lambda_1\\ \mu_1\\ \mu_2\\ S_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

6

引入人工变量 R_1 和 R_2，得

$\min\ r=R_1+R_2$

s.t. $4x_1+4x_2+\lambda_1-\mu_1+R_1=6$

$4x_1+6x_2+\lambda_1-\mu_2+R_2=3$

$x_1+x_2+S_1=1$

$x_1, x_2, \lambda_1, \mu_1, \mu_2, R_1, R_2, S_1\geq 0$

$\lambda_1 S_1=0,\ \mu_1 x_1=0,\ \mu_2 x_2=0$

初始单纯形表：

基	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	解
r	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
R_1	4	4	1	-1	0	1	0	0	6
R_2	4	6	1	0	-1	0	1	0	3
S_1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

修正后：

基	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	解
r	8	10	2	-1	-1	0	0	0	9
R_1	4	4	1	-1	0	1	0	0	6
R_2	4	6	1	0	-1	0	1	0	3
S_1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

x_1为进基变量，R_2为离基变量

基	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	解
r	0	-2	0	-1	1	0	-2	0	3
R_1	0	-2	0	-1	1	1	-1	0	3
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
S_1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$

μ_2为进基变量，S_1为离基变量

基	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	解
r	0	0	1	-1	0	0	-1	-4	2
R_1	0	0	1	-1	0	1	0	-4	2
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
μ_2	0	-2	-1	0	1	0	-1	4	1

λ_1为进基变量，R_1为离基变量

基	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	S_1	解
r	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
λ_1	0	0	1	-1	0	1	0	-4	2
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
μ_2	0	-2	0	-1	1	1	-1	0	3

∴此表为最优单纯形表

∵ $r=0$

∴解 $x^*=(x_1,x_2)=(1,0)$ 是可行的，即 x^* 为KKT点，也即原问题的唯一最优解

∴ $f(x^*)=6-2=4$

考虑二次规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 行满秩, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正定. 通过构造拉格朗日函数, 证明问题的最优解为

$$\boldsymbol{x}^* = -\boldsymbol{Q}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{R}^\mathsf{T}\boldsymbol{b},$$

其中 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D}^{-1} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^\mathsf{T})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}$, $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^\mathsf{T})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}$.

本题，无变量约束，故不考虑$\boldsymbol{\mu}$，均为等式约束，故不考虑$\boldsymbol{s}$
线性规划模型：

$$\begin{bmatrix} -D & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}$$

直接求解

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -D & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -Q & R^{-T} \\ (AD^{-1}A^T)^{-1}AD^{-1} & (AD^{-1}A^T)^{-1} \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q & R^{-T} \\ (AD^{-1}A^T)^{-1}AD^{-1} & (AD^{-1}A^T)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

得证

(b) $\min\ f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - 3x_2$

s.t. $x_1 + x_2 \geq 1$

$3x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1,\, x_2 \geq 0.$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad c^T = [1 \quad -3] \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad b^T = [1 \quad -6]$$

（1）判断凸规划

$$\nabla^2 f(x) = D > 0$$

f(x)为凸函数，约束为凸函数；故为凸规划问题

（2）KKT 条件（极小值问题，不等式全部化成大于等于号，再写成矩阵形式）

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$x, \lambda, \mu, s \geq 0 \qquad \lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 = \mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = 0$$

二阶段法，人工变量

初始单纯形法:

基	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	R_1	s_1	s_2	R_2	解
r	7	4	1	3	-1	0	0	0	-1	0	7
R_1	4	2	1	-3	-1	0	1	0	0	0	1
μ_2	-2	-4	-1	2	0	1	0	0	0	0	3
s_1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
R_2	3	2	0	0	0	0	0	0	-1	1	6

进基x_1，离基R_1

基	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	R_1	s_1	s_2	R_2	解
r	0	0.5	-0.75	8.25	0.75	0	-1.75	0	-1	0	5.25
x_1	1	0.5	0.25	-0.75	-0.25	0	0.25	0	0	0	0.25
μ_2	0	-3	-0.5	0.5	-0.5	1	0.5	0	0	0	3.5
s_1	0	0.5	-0.25	0.75	0.25	0	-0.25	1	0	0	0.75
R_2	0	0.5	-0.75	2.25	0.75	0	-0.75	0	-1	1	5.25

进基λ_2，离基R_2

基	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	R_1	s_1	s_2	R_2	解
r	0		2	0		0		0			
x_1	1	0.5	0.25	-0.75	-0.25	0	0.25	0	0	0	0.25
μ_2	0	-3	-0.5	0.5	-0.5	1	0.5	0	0	0	3.5
s_1	0	0.5	-0.25	0.75	0.25	0	-0.25	1	0	0	0.75
λ_2	0	2/9	-1/3	1	1/3	0	-1/3	0	-4/9	4/9	7/3

（自个算吧就…）

KKT 点:

$$x^* = (\quad) \qquad \lambda^* = (\quad)$$

6.机会约束规划

2 考虑下面的机会约束规划问题, 将问题转化为确定型的可分离规划模型.

(a) $\max\ f(\boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2 + 5x_3$

$$\text{s.t. } \Pr\{a_1x_1 + 3x_2 + a_3x_3 \le 10\} \ge 0.9$$
$$\Pr\{7x_1 + 5x_2 + x_3 \le b_2\} \ge 0.1$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

已知 a_1, a_3 和 b_2 相互独立, 分别服从正态分布 $N(2,9)$, $N(5,16)$ 和 $N(15,25)$.

对约束 1

$$\Pr\left\{\frac{H_i - E(H_i)}{\sqrt{Var(H_i)}} \le \frac{10 - E(H_i)}{\sqrt{Var(H_i)}}\right\} = \Pr\{X \le \frac{10 - E(H_i)}{\sqrt{Var(H_i)}}\} \ge 0.9 = \Pr\{X \le K_{0.1}\}$$

$$\frac{10 - E(H_i)}{\sqrt{Var(H_i)}} \ge K_{0.1} \quad E(H_i) + K_{0.1}\sqrt{Var(H_i)} \le 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + K_{0.1}\sqrt{9x_1^2 + 16x_2^2} \le 10$$

对约束 2

$$\Pr\left\{\frac{h_i - E(B_2)}{\sqrt{Var(B_2)}} \le \frac{B_2 - E(H_2)}{\sqrt{Var(H_2)}}\right\} \ge 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad \Pr\{\frac{B_2 - E(H_2)}{\sqrt{Var(H_2)}} \le \frac{h_i - E(B_2)}{\sqrt{Var(B_2)}}\} \le 0.9$$

$$\frac{h_i - E(B_2)}{\sqrt{Var(B_2)}} \le K_{0.1}$$

$$7x_1 + 5x_2 + x_3 \le 5K_{0.1} + 15$$

该问题转化为

$$\begin{gathered} \max f(x) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ s.t.\ \ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + K_{0.1}y \le 10 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_3 \le 5K_{0.1} + 15 \\ 9x_1^2 + 16x_2^2 - y^2 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, y \ge 0 \end{gathered}$$

查表知$K_{0.1} = 1.285$

$$\begin{gathered} \max f(x) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ s.t.\ \ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1.285y \le 10 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_3 \le 21.425 \\ 9x_1^2 + 16x_2^2 - y^2 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, y \ge 0 \end{gathered}$$

情况 3 所有的 a_{ij} 和 b_i 都是服从正态分布的随机变量. 考虑机会约束条件

$$\Pr\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\right\} \ge 1 - \alpha_i.$$

$$\Pr\left\{\frac{H_i - E(H_i)}{\sqrt{Var(H_i)}} \le \frac{-E(H_i)}{\sqrt{Var(H_i)}}\right\} \ge \Pr\{X \le K_{\alpha_i}\}$$

$$\frac{-E(H_i)}{\sqrt{Var(H_i)}} \ge K_{\alpha_i}$$

$$E(H_i) + K_{\alpha_i}\sqrt{Var(H_i)} \le 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} E(A_{ij})x_j + K_{\alpha_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} Var(A_{ij})x_j^2 - Var(B_i)} \le E(B_i)$$

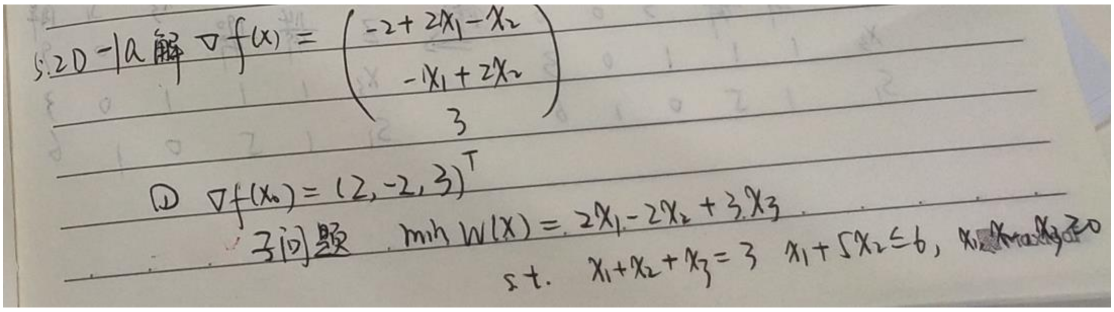
7.可行方向法

用可行方向法求解下列问题:

(a) $\min\ f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 + 3x_3$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ \ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + 5x_2 \le 6 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

取初始点 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (2, 0, 1)$.

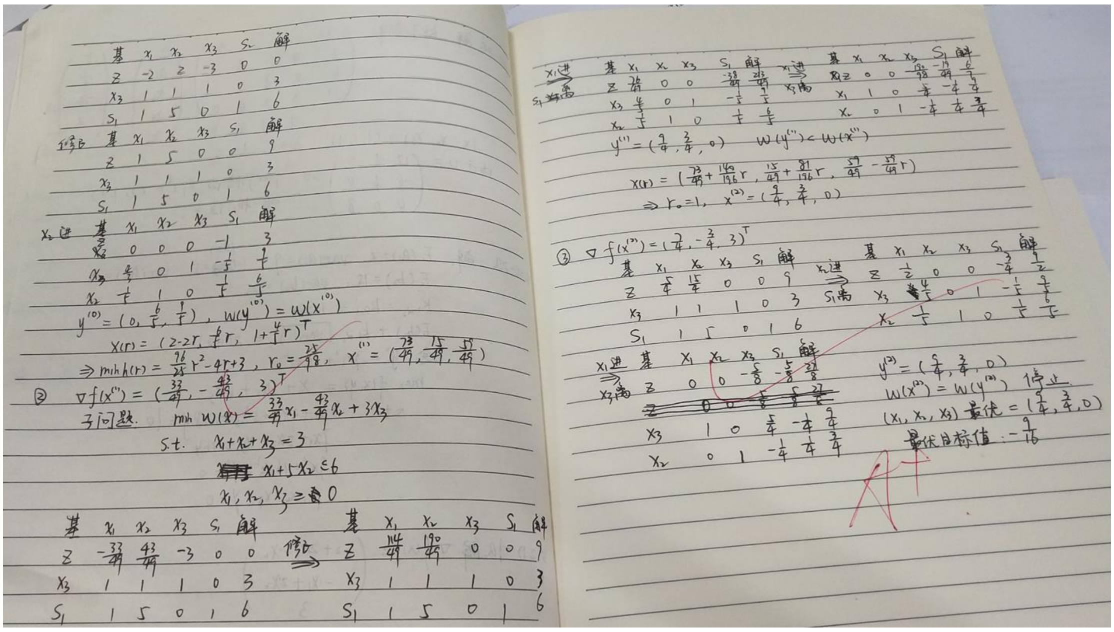


5.2D-1(a) 解 $\nabla f(x)=\begin{pmatrix}-2+2x_1-x_2\\ -x_1+2x_2\\ 3\end{pmatrix}$

① $\nabla f(x_0)=(2,-2,3)^T$

子问题 $\min w(x)=2x_1-2x_2+3x_3$

s.t. $x_1+x_2+x_3=3$ $x_1+5x_2\le 6$, $x_1,x_2,x_3\ge 0$



基	x_1	x_2	x_3	S_1	解
Z	-2	2	-3	0	0
x_3	1	1	1	0	3
S_1	1	5	0	1	6

修正

基	x_1	x_2	x_3	S_1	解
Z	1	5	0	0	9
x_3	1	1	1	0	3
S_1	1	5	0	1	6

x_2进

基	x_1	x_2	x_3	S_1	解
Z	0	0	0	-1	3
x_3	$\frac{4}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
x_2	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

$y^{(0)}=(0,\frac{6}{5},\frac{9}{5})$, $w(y^{(0)})=w(x^{(0)})$

$x(r)=(2-2r,\frac{6}{5}r,1+\frac{4}{5}r)^T$

$\Rightarrow \min h(r)=\frac{96}{25}r^2-4r+3$, $r_0=\frac{25}{98}$, $x^{(1)}=(\frac{73}{49},\frac{15}{49},\frac{59}{49})$

② $\nabla f(x^{(1)})=(\frac{33}{49},-\frac{43}{49},3)^T$

子问题. $\min w(x)=\frac{33}{49}x_1-\frac{43}{49}x_2+3x_3$

s.t. $x_1+x_2+x_3=3$

$x_1+5x_2\le 6$

$x_1,x_2,x_3\ge 0$

基	x_1	x_2	x_3	S_1	解
Z	$-\frac{33}{49}$	$\frac{43}{49}$	-3	0	0
x_3	1	1	1	0	3
S_1	1	5	0	1	6

修正 $\Longrightarrow$

基	x_1	x_2	x_3	S_1	解
Z	$\frac{114}{49}$	$\frac{190}{49}$	0	0	9
x_3	1	1	1	0	3
S_1	1	5	0	1	6

x_1进 $\Longrightarrow$ S_1离

基	x_1	x_2	x_3	S_1	解
Z	$\frac{26}{49}$	0	0	$-\frac{38}{49}$	$\frac{213}{49}$
x_3	$\frac{4}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
x_2	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

x_1进 $\Longrightarrow$ x_3离

基	x_1	x_2	x_3	S_1	解
Z	0	0	$-\frac{190}{98}$	$-\frac{19}{49}$	$\frac{6}{7}$
x_1	1	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$y^{(1)}=(\frac{9}{4},\frac{3}{4},0)$ $w(y^{(1)})<w(x^{(1)})$

$x(r)=(\frac{73}{49}+\frac{149}{196}r,\frac{15}{49}+\frac{81}{196}r,\frac{59}{49}-\frac{59}{49}r)$

$\Rightarrow r_0=1$, $x^{(2)}=(\frac{9}{4},\frac{3}{4},0)$

③ $\nabla f(x^{(2)})=(\frac{7}{4},-\frac{3}{4},3)^T$

基	x_1	x_2	x_3	S_1	解
Z	$\frac{5}{4}$	$\frac{15}{4}$	0	0	9
x_3	1	1	1	0	3
S_1	1	5	0	1	6

x_2进 $\Longrightarrow$ S_1离

基	x_1	x_2	x_3	S_1	解
Z	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{9}{2}$
x_3	$\frac{4}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
x_2	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$

x_1进 $\Longrightarrow$ x_3离

基	x_1	x_2	x_3	S_1	解
Z	0	0	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{27}{8}$
~~Z~~	~~0~~	~~0~~	~~$\frac{5}{8}$~~	~~$\frac{5}{8}$~~	~~$\frac{27}{8}$~~
x_3	1	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$y^{(2)}=(\frac{9}{4},\frac{3}{4},0)$

$w(x^{(2)})=w(y^{(2)})$ 停止

(x_1,x_2,x_3) 最优 $=(\frac{9}{4},\frac{3}{4},0)$

最优目标值：$-\frac{9}{16}$

A+

（通过等式约束消去 x3 后用图解法解子问题更快）

(b) $\max\ f(\boldsymbol{x})=x_1^3+x_2^3-3x_1x_2$

s.t. $3x_1+x_2\le 3$

$5x_1-3x_2\le 5$

$x_1,\ x_2\ge 0.$

取初始点 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,1).$

$$\max f(x)=x_1^3+x_2^3-3x_1x_2$$
$$s.t.\quad 3x_1+x_2\le 3\qquad 5x_1-3x_2\le 5\qquad\quad x_1,x_2\ge 0$$
$$\nabla f(x)=\begin{bmatrix}3x_1^2-3x_2\\3x_2^2-3x_1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}x_1^2-x_2\\x_2^2-x_1\end{bmatrix}$$

迭代 1

$$\nabla f\left(x^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}$$

子问题

$$\max w=\nabla f\left(x^{(0)}\right)^T x=-3x_1+3x_2$$

$$s.t.\quad 3x_1+x_2\le 3\qquad 5x_1-3x_2\le 5\qquad\quad x_1,x_2\ge 0$$

图解法解（第二个约束多余）

解得$y^{(0)}=(0,3)$ $\qquad w\left(y^{(0)}\right)=9\quad w\left(x^{(0)}\right)=3$

$$w\left(y^{(0)}\right) > w\left(x^{(0)}\right) \qquad d^{(0)} = (0,2)$$

进行一维搜索:

$$\max h(r) = (1+2r)^3$$
$$s.t. \quad 0 \le r \le 1$$

于是$r^{(0)} = 1 \qquad x^{(1)} = (0,3) \qquad f\left(x^{(1)}\right) = 27$

迭代 2:

$$\nabla f\left(x^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} -9 \\ 27 \end{bmatrix}$$

子问题

$$\max w = \nabla f\left(x^{(1)}\right)^T x = -9x_1 + 27x_2$$

$$s.t. \quad 3x_1 + x_2 \le 3 \qquad 5x_1 - 3x_2 \le 5 \qquad x_1, x_2 \ge 0$$

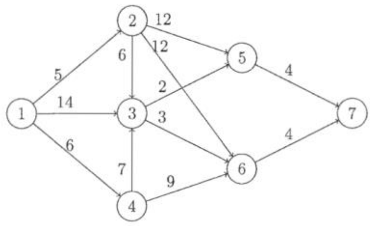
解得$y^{(1)} = (0,3) \qquad w\left(y^{(1)}\right) = 81 \quad w\left(x^{(1)}\right) = 81$

迭代结束

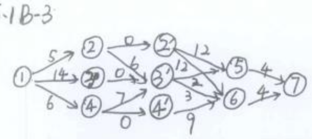
第六章

1.核心思想

考虑图 6.5 中的路径网络, 计算城市 1 到城市 7 的最短路径.



6-1B-3



将②③④结点扩展为②③④和②'③'④',从而本题可分为四个阶段

阶段四: $S_4 \in \{5,6\}$, $x_4 \in \{7\}$, 状态转移方程$S_5 = x_4$, $f_4^*(S_5) = 0$

S_4	$v_4(S_4,x_4)+f_5^*(S_5)$	最优解	
	$x_4=7$	$f_4^*(S_4)$	$x_4^*(S_4)$
5	4+0=4	4	7
6	4+0=4	4	7

阶段三: $S_3 \in \{2',3',4'\}$, $x_3 \in \{5,6\}$, 状态转移方程$S_4 = x_3$.

S_3	$v_3(S_3,x_3)+f_4^*(S_4)$		最优解	
	$x_3=5$	$x_3=6$	$f_3^*(S_3)$	$x_3^*(S_3)$
2'	12+4=16	12+4=16	16	5或6
3'	2+4=6	3+4=7	6	5
4'	—	9+4=13	13	6

阶段二: $S_2 \in \{2,3,4\}$, $x_2 \in \{2',3',4'\}$, $S_3 = x_2$

S_2	$v_2(S_2,x_2)+f_3^*(S_3)$			最优解	
	$x_2=2'$	$x_2=3'$	$x_2=4'$	$f_2^*(S_2)$	$x_2^*(S_2)$
2	0+16=16	12	—	12	3'
3	—	0+6=6	—	6	3'
4	—	13	13	13	2'或3'

阶段一: $S_1 \in \{1\}$, $x_1 \in \{2,3,4\}$, $S_2 = x_1$

S_1	$v_1(S_1,x_1)+f_2^*(S_2)$			最优解	
	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$f_1^*(S_1)$	$x_1^*(S_1)$
1	5+12=17	14+6=20	6+13=19	17	2

最短路径为 1→2→3→5→7

最短距离为 17

2.背包问题

4 一位野外徒步旅行者需要往包里装三样东西：食品、急救包和衣物. 背包容积为 3 立方英尺，单位食品占空间 1 立方英尺，一个急救包占 $\frac{1}{4}$ 立方英尺，每件衣物占 $\frac{1}{2}$ 立方英尺. 该旅行者认为食品、急救包和衣物的优先级权重分别是 3、4、5. 这意味着衣物在这三样物品中价值最高. 根据经验，每样物品至少要拿一件，急救包至多需要两个. 那么这位徒步旅行者应该每样物品各拿多少件呢?

6.2A

4.解：背包容积以$\frac{1}{4}$立方英尺为单位，则有12个单位

c_i为收益，a_i为代价

	a_i	c_i
食物 1	4	3
急救包 2	1	4
衣物 3	2	5

且$x_i \geq 1$，$x_2 \leq 2$

阶段3：衣物

$s_3 \in \{2, \cdots 7\}$，$s_4 = s_3 - 2x_2$，$v_3(s_3, x_3) = 5x_3$

s_3	$v_3(s_3,x_3)+f_4^*(s_3)$ $x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	最优解 $f_3^*(s_3)$	$x_3^*(s_3)$
2	5			5	1
3	5			5	1
4	5	10		10	2
5	5	10		10	2
6	5	10	15	15	3
7	5	10	15	15	3

阶段2：急救包

$s_2 \in \{8, 4\}$，$s_3 = s_2 - x_2$，$v_2(s_2, x_2) = 4x_2$

s_2	$v_2(s_2,x_2)+f_3^*(s_3)$ $x_2=1$	$x_2=2$	最优解 $f_2^*(s_2)$	$x_2^*(s_2)$
8	15+4=19	15+8=23	23	2
4	5+4=9	5+8=13	13	2

阶段1：食物

$s_1 \in \{12\}$，$s_2 = s_1 - 4x_2$，$v_1(s_1, x_1) = 3x_1$

s_1	$v_1(s_1,x_1)+f_2^*(s_2)$ $x_1=1$	$x_1=2$	最优解 $f_1^*(s_1)$	$x_1^*(s_1)$
12	23+3=26	13+6=19	26	1

因此，携带1单位食物

2单位急救包

3单位衣物.

3.劳动力问题

按照合同 GECO 公司需在未来 4 年内每年提供 4 台飞机发动机，不过每年的生产能力和生产成本都不同. GECO 在第 1 年能生产 5 台发动机，第 2 年能生产 6 台，第 3 年能生产 3 台，第 4 年能生产 5 台. 相应地，这 4 年里每台发动机的生产成本分别是 30 万美元、33 万美元、35 万美元、42 万美元. GECO 每年生产的发动机数量可以大于需求，多生产的发动机先存放在库房里直到运走. 每年每台发动机的库存成本也不一样，按照估计，第 1 年为 2 万美元，第 2 年为 3 万美元，第 3 年为 4 万美元，第 4 年为 5 万美元. 现在是第一年年初，GECO 已经有了 1 台发动机的现货. 请为 GECO 制定一个未来 4 年的最优生产计划.

6.2B

4.

阶段4：(第4年初) $h_1(x_4)=\begin{cases}42(x_4-4), & x_4>4 \\ 0, & x_4=4\end{cases}$ $h_2(s_4,x_4)=5s_4$

状态转移方程：$s_5=x_4-4$；$s_4\in\{0,1,2,3\}$，$x_4\in\{4\}$

s_4	$h_1(x_4)+h_2(s_4,x_4)+f_5^*(s_5)$	最优解	
	$x_4=4$	$f_4^*(s_4)$	$x_4^*(s_4)$
0	168	168	4
1	126+5=131	131	4
2	84+10=94	94	4
3	42+15=57	57	4

阶段3：(第3年初)

$s_3\in\{4,3,2,1\}$ $x_3\in\{4,5,6,7\}$

$s_4=x_3-4$

s_3	$h_1(x_3)+h_2(s_3,x_3)+f_4^*(s_4)$				最优解	
	$x_3=4$	$x_3=5$	$x_3=6$	$x_3=7$	$f_3^*(s_3)$	$x_3^*(s_3)$
1	277				277	4
2	246	244			244	5
3	215	213	211		211	6
4	184	182	180	178	178	7

阶段2：(第2年初)

$s_2\in\{2,1,0\}$ $x_2\in\{8,7,6,5\}$

$s_3=x_2-4$

s_2	$h_1(x_2)+h_2(s_2,x_2)+f_3^*(s_3)$				最优解	
	$x_2=5$	$x_2=6$	$x_2=7$	$x_2=8$	$f_2^*(s_2)$	$x_2^*(s_2)$
0	442	442			442	5or6.
1	412	412	412		412	5or6or7
2	382	382	382	382	382	5or6or7or8

阶段1：(第1年初)

$s_1\in\{1\}$ $x_1\in\{4,5,6\}$

s_1	$h_1(x_1)+h_2(s_1,x_1)+f_2^*(s_2)$			最优解	
	$x_1=4$	$x_1=5$	$x_1=6$	$f_1^*(s_1)$	$x_1^*(s_1)$
1	534	534	534	534	4or5or6

可行方案有生产数目如下：

第1年	第2年	第3年	第4年
5	3.4.5.6	3	
4	4.5.6.	3	
3	5.6	3	

4.设备更新模型

3 Circle 农场计划要对一台已经使用了 2 年的拖拉机制定未来 5 年的更新计划. 一台拖拉机必须使用至少 3 年, 但 5 年后必须淘汰. 拖拉机今年的价格为 40000 美元, 以后每年上涨 10%. 拖拉机今年的年度运行费是 1300 美元, 但预计以后每年增加 10%.

(a) 将该问题描述成一个最短路径问题. (b) 建立问题的动态规划模型.

(c) 求出未来 5 年的最优更新策略.

5.投资模型

（这个属实是看不懂…）

6.维度问题

(c) $\max\ z=7x_1^2+6x_1+5x_2^2$

$$\text{s.t. } x_1+2x_2\le 10$$

$$x_1-3x_2\le 9$$

$$x_1,\ x_2\ge 0.$$

7.随机性问题

我想把一辆二手自行车卖给出价最高的买家, 可以接受下面 3 种出价: 低价约 550 元, 中价约 950 元, 高价约 1250 元. 经过市场调查发现, 这 3 种出价等概率出现. 我计划连续 3 天张贴卖车广告, 每天结束时决定是否接受当天的最高出价. 我卖二手车的最优策略应该是什么?

用一个 10 立方米的货柜存放三种货品. 单位货品 A、B、C 的体积分别为 2、1、3 立方米. 每种货品的需求量是随机的, 下表给出了相关的概率分布:

货品	货品需求量的概率分布			
	1	2	3	4
A	0.5	0.5	0	0
B	0.3	0.4	0.2	0.1
C	0.3	0.2	0.5	0

每种货品的单位缺货损失费分别是 8、10、15 元. 货柜内每种货品应该放多少件以使损失最小?

8.极大化事件的概率

假设你在赌场玩赌博游戏. 下赌注后, 要看抛两次硬币的结果定输赢. 如果硬币都是正面朝上, 你押注的每 1 元赌场会付给你 3 元; 否则, 你就输掉押注的钱. 现在你共有 1 元, 你的目标是使得 3 次游戏后至少拥有 4 元的概率达到最大, 请给出最佳游戏策略.

第七章

1.比较矩阵与一致性

表 7.2: 比较矩阵的随机一致性指数

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

$$CR \triangleq \frac{CI}{RI},\ CI = \frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$$

Kevin 和 June (K&J) 夫妇考虑买一套房子, 目前有三套房子 A、B、C 可供选择. 这对夫妇一致认为应该用两个指标来选房: 房子户型 (Y) 和距工作地点的距离 (W), 并建立了以下比较矩阵. 请对这三套房子进行优先级排序, 并计算每个矩阵的一致性比.

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{K} \\ \mathrm{J} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{K} & \mathrm{J} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array},\quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{K}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{W} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{Y} & \mathrm{W} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array},\quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{J}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{W} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{Y} & \mathrm{W} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array},\quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{KY}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{KW}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array},\quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{JY}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array},\quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{JW}} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

2.决策树分析

某食品店每天对面包的需求量 X 服从下面的概率分布:

X	100	150	200	250	300
p	0.20	0.25	0.30	0.15	0.10

该店购入面包的价格是每块 55 美分, 出售面包的价格是每块 1.2 美元. 每天卖不掉的面包按照每块 25 美分做清仓处理. 假定每天的采购量为上表中五种情况之一. 建立相应的决策树, 该店每天应采购多少块面包?

3.贝叶斯分析

根据 Acme 公司的历史数据估算, 其批量生产的小饰品不能令人接受 (差的) 的可能性有 5%. 一次差批量中有 15% 的次品, 一次好批量中有 4% 的次品. 令 $X=x_1$ 表示该批量是好的, $X=x_2$ 表示该批量是差的, 相应的先验概率为

$$\Pr\{X=x_1\}=0.95, \qquad \Pr\{X=x_2\}=0.05.$$

公司在发货前会抽取两件产品进行检验, 可能有三种结果: (1) 两件都是好的 (y_1), (2) 一件是好的一件是坏的 (y_2), (3) 两件都是次品 (y_3).

(a) 求出后验概率 $\Pr\{X=x_i \mid Y=y_j\}$, $i=1,2$, $j=1,2,3$.

(b) 假设该公司把产品供货给客户 A 和客户 B. 合同规定客户 A 和 B 的次品率分别不能超过 5% 和 8%. 次品率每上升一个百分点, 公司就要赔偿 100 美元, 每下降一个百分点, 生产成本增加 50 美元. 建立相应的决策树, 并确定产品供货的优先策略.

4.效用理论

Golden 一家刚刚搬到一个位于地震带的地方居住, 他们必须决定是否按照高抗震标准来建造自己的房子. 建造高抗震标准房子的费用是 850000 美元, 否则价格只有 350000 美元. 假如地震发生了 (地震发生的概率只有 0.001), 抗震等级不够的房子需要 900000 美元的修缮费. 假定效用函数值在 0 到 100 之间, 建立问题的效用函数.

5.不确定型决策和四种准则

对即将到来的播种季节, 农场主 McCoy 可以种玉米 (a_1)、种小麦 (a_2)、种大豆 (a_3)、也可以放牧 (a_4). 不同行动的益损值受降雨量的影响, 包括: 降雨量大 (s_1)、降雨量适中 (s_2)、降雨量小 (s_3)、干旱 (s_4). 估计的收益矩阵如下所示 (单位: 1000 美元). 请为农场主 McCoy 建议最优的行动方案.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	−20	60	30	−5
a_2	40	50	35	0
a_3	−50	100	45	−10
a_4	12	15	15	10

6.二人零和对策

（1）纯策略解

（2）混合策略解

（3）优超策略

（4）图解法

（5）线性规划解法