1 多项式

1. $f\in\mathbb{Q}[x], a,b\in\mathbb{Q}$. 已知$f(a+b\sqrt{5})=0$, 求证$f(a-b\sqrt{5})=0$

2. $f\in\mathbb{Q}[x]$, 并且$f\geq 0$恒成立, 求证: 存在$g\in\mathbb{C}[x]$使得$f(x)=g(x)\overline{g(x)}$

3. 在$\mathbb{C}[x]$中分解$f(x)=(x+1)^n-(x-1)^n \quad (n\geq 1)$

4. 已知$P(x)$是n次实系数多项式, 并且$k=0,1,\cdots,n-1$时, $P(k)=k/(k+1)$. 求$P(n)$

5. 求正整数m使得$(x^2+x+1)|(x^{2m}+x^m+1)$

6. 求所有的实系数多项式P, 使得$P(x^2+1)=P(x)P(x)+1$

7. 是否存在非负整系数多项式, 使得其在每个正整数处取值都为质数?

8. 求所有的整系数多项式$P(x)$使得$P(\sqrt{2}+\sqrt{5})=0$

2 整除与同余

1. 证明: 任意两个相邻质数一定不是某个质数的二倍

2. 证明: 有无穷多$(4n+3)$型质数

3. 证明: 存在连续的2021个正整数$a_1,\cdots,a_{2021}$, 使得存在$n_i>1$, 并且$n_i^i|a_i$

4. 在整数范围内解方程

$$n_1^4+n_2^4+\cdots+n_{14}^4=1599$$

5. 求所有正整数a,b,c使得

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2$$

6. 记$f(N)$为N各位数字之和, 如$f(12)=1+2=3$. 求$f(f(f(3333^{3333})))$

7. 已知$\binom{100}{k}$为奇数, 求k.

8. 已知$a^2+b^2=c^2$, 求证$3|ab$