第 9 章复习

1. §9.1.3 多元函数的极限
2. §9.1.4 多元函数的连续性
3. §9.2.1 多元函数的偏微商
4. §9.2.2 多元函数的可微性
5. §9.2.3 方向导数与梯度
6. §9.2.4 复合函数的微商
7. §9.3.1 隐函数的存在性和微商
8. §9.5.2 二元函数的 Taylor 公式
9. §9.5.3 二元函数的极值
10. §9.5.4 二元函数的条件极值

1. **多元函数的极限：** 设 $f(p)$ 是 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数, p_0 是 D 的聚点, 在 D 上当 $p \to p_0$ 时 $f(p)$ 以 A 为极限, 即

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = A$$

的定义是: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $p \in D$, 且 $0 < \|p - p_0\| < \delta$ 时, 有 $|f(p) - A| < \varepsilon$.

2. **累次极限：** 以二元函数为例, 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个空心邻域中有定义, 对任意固定的 y 如果极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ 存在, 令

$$\varphi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

它是一个在 y_0 近旁有定义的函数。如果极限 $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y)$ 存在, 就令

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y).$$

称为 f 在 (x_0, y_0) 处的一个累次极限。

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

3. **极限与累次极限的区别：** 重极限与累次极限是两个不同的概念，它们之间没有必然的蕴含关系。例如对于函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad g(x,y)=y\sin\frac{1}{x},$$

有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，而

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0.$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$，而

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y)=0,\ \text{但}\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y)\ \text{不存在}.$$

4. **两种极限的关系：** 若重极限与累次极限都存在，则它们必相等。

5. **多元连续函数：** 设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $p_0 \in D$. 如果 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, 使得 $\forall\, p \in D \cap B_\delta(p_0)$, 有

$$|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon,$$

则称 f 在 p_0 连续。注意当 p_0 是 D 的孤立点时，f 一定在 p_0 连续。当 p_0 是 D 的聚点时，f 在 p_0 连续等价于

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0).$$

6. **方向导数和偏导数：** 设开集 $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, u 是一个方向，$p_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 + tu) - f(p_0)}{t}$$

存在且有限，就称这个极限是 f 是在点 p_0 沿方向 u 的方向导数，记为 $\frac{\partial f}{\partial u}(p_0)$. 沿方向 $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ 的方向导数称为 f 的第 i 个一阶偏导数，记为 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$.

7. **微分的定义：** 设 $h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$. 如果成立着

$$f(p_0+h)-f(p_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i h_i+o(\|h\|),\ \|h\|\to 0,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是不依赖于 h 的常数，那么就称 f 在 p_0 点可微，称 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i h_h$ 为 f 在 p_0 的微分，记为

$$df(p_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i h_h.$$

8. 当 f 在 p_0 可微时，f 在 p_0 的 n 个一阶偏导数存在，且

$$df(p_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)h_i.$$

9. **可微与方向导数及连续之间的关系：**

$$\begin{tikzcd} & & \boxed{\text{函数连续}} \\ \boxed{\text{各偏导数连续}} \arrow[r] & \boxed{\text{函数可微}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \boxed{\text{各方向导数存在}} \arrow[uu, "/" marking] \end{tikzcd}$$

例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

在原点处任意方向的方向导数都是零，但此函数在原点不连续.

10. **复合求导：** 设开集 $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ 在 x_0 可微， $g : f(D) \to \mathbb{R}^l$ 在 $f(x_0)$ 可微, 则 $g \circ f\ D \to \mathbb{R}^l$ 在 x_0 可微, 且

$$J(g \circ f)(x_0) = Jg(f(x_0)) \cdot Jf(x_0).$$

此式左端是一个 $l \times n$ 阶矩阵, 右端 $Jg(f(x_0))$ 是 $l \times m$ 阶矩阵, $Jf(x_0)$ 是 $m \times n$ 阶矩阵, 它们分别是 $g \circ f, g$ 和 f 的 Jacobian.

以二元函数为例, 设 $u = f(x, y)$, $x = \varphi(s, t)$, $y = \psi(s, t)$. 求复合函数 $u = f(\varphi(s, t), \psi(s, t))$ 的偏导数的公式是

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial s} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial s},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

11. **混合偏导数** 设开集 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$, 点 $p_0 \in D$. 如果 f 的两个混合偏导数在 D 上存在, 并在 p_0 连续, 那么

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0).$$

一般来说，两个混合偏导数如果只是求导顺序不同，只要它们都连续，那么它们就相等。

12. Taylor **多项式** 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 n 元函数, 有各种偏导数, 且各种混合偏导数都连续, 此时 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 与 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 可相加和相乘, 加法和乘法有交换律. 对于多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和微分算子 $D=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n})$, 记

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad D^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

定理 (Taylor **公式**) 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个凸区域, $f:U\to\mathbb{R}$ 并且 $f\in C^{m+1}(U)$. 再设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $a+h=(a_1+h_1,\cdots,a_n+h_n)$ 是 U 中两点. 则存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}h^\alpha+R_m,\tag{1}$$

其中

$$R_m=\sum_{|\alpha|=m+1}\frac{D^\alpha f(a+\theta h)}{\alpha!}h^\alpha.\tag{2}$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

特别重要的是 Taylor 公式中的前三项:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j + \cdots \\ &= f(a) + Jf(a)\cdot h + \frac{1}{2} h Hf(a) h^T + \cdots \end{aligned}$$

其中

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} \tag{3}$$

是一个 n 阶对称方阵, 称为 f 在 a 点的 Hessian.

在原点展开的 Taylor 公式称为Maclaurin 公式.

返回 全屏 关闭 退出

13. **极值** 设 p_0 是 n 元函数 f 的一个驻点，函数 f 在 p_0 的某邻域内有连续的二阶偏导数。如果在 p_0 点的 Henssian 矩阵

$$Hf(p_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

是严格定正（负）方阵，那么 p_0 是 f 的一个严格极小（大）值点；如果 $Hf(p_0)$ 是不定方阵，那么 p_0 不是 f 的极值点。

注意： 重点搞清二元和三元函数的极值的计算。

14. **条件极值** 设 $f(x_1,\cdots,x_n,y_1\cdots,y_m)$ 是定义在 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中开集 D 上的 $n+m$ 元函数。如果该函数在 m 个约束条件：

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1,\cdots,x_n,y_1\cdots,y_m)=0, \\ \cdots\cdots \\ \Phi_m(x_1,\cdots,x_n,y_1\cdots,y_m)=0. \end{cases}$$

的约束下在 D 中的点 $z_0=(x_0,y_0)=(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)$ 取到极值, 那么存在 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^m$, 使得 (x_0,y_0) 是函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Phi_i(x,y)$$

的驻点。

注意: 重点搞清只有一个约束条件的情况.

15. **曲面的显式方程和隐式方程**

设三元函数 $F(x,y,z)$ 定义在区域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 上，区域 D 中所有满足方程

$$F(x,y,z)=0$$

的点集组成 $\mathbb{R}^3$ 中一张曲面，称为由此方程确定的隐式曲面。若此曲面是光滑的，$p_0=(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面上一点，则过此点的切平面的方程是

$$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(p_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(p_0)+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(p_0)=0.$$

特别，对于显式方程

$$z=f(x,y),$$

在 $p_0=(x_0,y_0)$ 的切平面方程是

$$z-f(p_0)=(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(p_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(p_0).$$

设 $\boldsymbol{\Delta}$ 是参数 uv 平面上的一个区域，参数方程

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in \boldsymbol{\Delta},$$

表示 $\mathbb{R}^3$ 中一张曲面，在曲面上一点 $p_0 = (u_0, v_0)$ 的法向为

$$\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)(p_0)$$

例 1 判断下列极限是否存在, 若有极限, 求出其极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; (3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$; (6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

例 2 设 $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 考察函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 的偏导数.

解 由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0,$$

因此 f 在 $(0,0)$ 连续. 注意到 $f(x,0)=0$, 因而

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y^2} \quad \text{不存在.}$$

注, 若题中的 $y\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ 改为 $|y|^t\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ $(t>1)$ 则 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, 且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

例 3 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$. 求常数 a. (其中二阶偏导数均连续)

解 由变换可知, x, y 是 u, v 的函数. 因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{\partial z}{\partial u} + a\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) + a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) \\ &= -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -2\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) + a\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) \\ &= 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{aligned}$$

于是

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

根据题设条件, 应有 $a\neq -2$ 且

$$6+a-a^2=0.$$

故, $a=3$.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

例 4 试求由下列方程 $u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$ 所确定的隐函数 u 的微分.

解 根据一阶微分形式的不变性, 对方程两边求微分, 得

$$3u^2du-3(dx+dy)u^2-6(x+y)udu+3z^2dz=0.$$

即,

$$\left(u^2-2(x+y)u\right)du=u^2dx+u^2dy-z^2dz.$$

故,

$$du=\frac{u}{u-2x-2y}dx+\frac{u}{u-2x-2y}dy-\frac{z^2}{u^2-2xu-2yu}dz.$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

例 5 求函数 $f(x,y)=\frac{1}{1-x-y+xy}$ 在点 $(0,0)$ 的 Taylor 展开, 展开到 n 阶为止.

解 令 $u=x+y-xy$, 则 $f(x,y)=\frac{1}{1-u}$. 由于

$$\frac{1}{1-u}=\sum_{k=0}^{n}u^k+o(u^n).$$

注意到 $|u|\leqslant(\sqrt{2}+\frac{1}{2})\rho$, 这里 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 有 $o(u)=o(\rho)$.

$$\begin{aligned}
f(x,y)&=\sum_{k=0}^{n}u^k+o(u^n)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_k^i(x+y)^{k-i}(xy)^i+o(\rho^n)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{\min\{k,n-k\}}(-1)^iC_k^i(x+y)^{k-i}(xy)^i+o(\rho^n).
\end{aligned}$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

例 6 求函数 $u = x + y + z$ 在条件 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, x > 0, y > 0, z > 0$ 之下的极值.

解 设

$$F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right).$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{\lambda}{x^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{\lambda}{y^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 - \frac{\lambda}{z^2}.$$

令 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ 并令 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. 可得 $x = y = z = 3$.

由条件可知函数 $x \geqslant 1, y \geqslant 1, z \geqslant 1$, 故, $u = x + y + z$ 无最大值, 但有最小值, 该最小值必在第一卦限内部一个有界闭集取到. 由于在所给条件下只有一个驻点, 该驻点也必是 u 的最小值点. 于是 $x + y + z \geqslant 9$. 由此可知对任意正数 x, y, z 有

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9.$$