

2023 春《数学分析 B2》期末试题

2023 年 7 月 16 日上午

一 (本题共 30 分):

(1) (本题 10 分) 计算 $I = \int_L \frac{1}{2}y^2 dx + xydy$, 其中 L 为 $y = \sqrt{2x - x^2}$, ($0 \leq x \leq 1$)

方向为 x 增加的方向

解: 令 $P = \frac{1}{2}y^2$; $Q = xy$; 则 P, Q 在 R^2 上有一阶连续偏导数;

且: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$; 设 L 与有向直线段 $\overline{AB}, \overline{BO}$ 所围成的区域为 D

其中 $A(1,1), B(1,0), O(0,0)$

由格林公式: $I = \int_L \frac{1}{2}y^2 dx + xydy = 0 + \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}$

(2) (本题 10 分): 求曲面积分: $I = \iint_{\Sigma} 4xzdydz - 2yzdzdx + (1 - z^2)dxdy$,

其中 Σ 是由曲线 $z = x^2 + y^2$, ($0 \leq z \leq 2$), 方向取下侧.

解析: 补平面 $z=2, (x^2 + y^2 \leq 2)$ 取上侧, 由高斯公式

$$\text{得: } I = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} 4xzdydz - 2yzdzdx + (1 - z^2)dxdy$$

$$: = \iiint_{\Omega} 0 dxdydz + \iint_D 3dxdy$$

$$: = 3 \iint_D dxdy$$

$$: = 6\pi.$$

(3) (本题 10 分) 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$

$$\text{证: } \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{n}-1} e^{-t} dt$$

$$: = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right)$$

$$\text{故: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \Gamma(1) = 1$$

二 (本题 10 分) :求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

$$\text{解: 令 } u_n = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}}{2n-1} x^{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} (2x)^{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} t^{2n}, (t = 2x)$$

$$\text{即: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} t^2 = (2x)^2 < 1$$

收敛区间为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; 当 $x = \pm \frac{1}{2}$ 时, 由莱布尼兹判别法知,

级数都收敛故收敛域为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\text{令: } S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} t^{2n} = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} t^{2n-1} = t S_1(t)$$

$$\text{所以: } S_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} t^{2n-1}$$

$$: \Rightarrow S_1'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{2n-2}$$

$$: = \sum_{n=1}^{\infty} (-t^2)^{n-1} = \frac{1}{1+t^2}, t \in (-1, 1)$$

所以当 $t \in (-1, 1)$ 时, 有 $S_1(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \arctan t$

由幂级数和函数的连续性可知, $S_1(t)$ 在 $t = -1, 1$ 处右左连续

所以: $S(t) = t \arctan t, t \in [-1, 1]$

故: 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}}{2n-1} x^{2n} = 2x \arctan 2x, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

三 (本题 20 分): 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且 $f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \\ \pi + x, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

求 $f(x)$ 的傅里叶级数, 并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ 的值.

解析 (1): $f(x)$ 为偶函数, 所以 $b_n = 0, (n = 1, 2, \dots)$

$$\text{而 } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$: = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx \, dx$$

$$: = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) d(\sin nx)$$

$$: = \frac{2}{n\pi} (\pi - x) \sin nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx$$

$$: = -\frac{2}{n^2\pi} \cos nx \Big|_0^\pi$$

$$: = -\frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1)$$

$$: = \frac{2}{n^2\pi} (1 - (-1)^n)$$

$$: = \begin{cases} \frac{4}{(2n-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

$$\text{而: } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} (\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2) = \pi.$$

由于函数 $f(x)$ 是连续函数

$$\text{所以: } f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, x \in (-\infty, +\infty)$$

在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上积分

$$: \int_0^{\pi/2} (\pi - x) dx = \frac{\pi^2}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)x \Big|_0^{\pi/2}$$

$$: \frac{3\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

$$\text{所以: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

再由巴塞瓦尔等式:

$$\text{有: } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\text{得: } \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x)^2 dx - \frac{\pi^2}{2}$$

$$\text{其中: } \int_0^\pi (\pi - x)^2 dx = \int_0^\pi (\pi^2 - 2\pi x + x^2) dx = \frac{1}{3}\pi^3$$

$$\text{故: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

四 (本题 10 分): 利用 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 来计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x^2} dx$,

其中 $0 < a < b$.

$$\text{解析: 令 } f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx) \sin(bx)}{x^2} dx, (0 \leq t < b)$$

$$\text{则: } f'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx) \sin(bx)}{x} dx, (0 \leq t < b)$$

因为对 $t \in [0, \tau], a < \tau < b$

$$\text{则: } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin(tx) \sin(bx)}{x^2} \right) = \frac{\cos(tx) \sin(bx)}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(t+b)x}{x} + \frac{\sin(b-t)x}{x} \right)$$

由 Dirichlet 判别法

$$\text{有: } \left| \int_0^y \sin(t+b)x dx \right| \leq \frac{2}{t+b} \leq \frac{2}{b}$$

$$\text{和: } \left| \int_0^y \sin(b-t)x dx \right| \leq \frac{2}{b-t} \leq \frac{2}{b-\tau}$$

且: $\frac{1}{x}$ 单调趋于 0

故推出: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(t+b)x}{x} + \frac{\sin(b-t)x}{x} \right) dx$ 在 $t \in [0, \tau]$ 一致收敛

积分求导可换顺序

$$\text{即 } f'(t) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t+b)x}{x} + \frac{\sin(b-t)x}{x} \right) dx$$

$$: = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{且: } f(0) = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0$$

$$\text{得: } f(a) = \frac{\pi a}{2}.$$

五 (本题 10 分): 已知函数级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^x}$;

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 非一致收敛;

(2) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续

证明 (1): 可证 $\frac{\sin nx}{n^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致趋于 0

假设 $\frac{\sin nx}{n^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致趋于 0

则对 $\varepsilon_0 = \frac{\sin 1}{2}$ 时, 存在一个整正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时, 有 $\left| \frac{\sin nx}{n^x} \right| < \varepsilon_0$

对所有的 $x > 0$ 都成立

特别地, 取 $x = \frac{1}{n}, \frac{\sin 1}{n^n} < \varepsilon_0 = \frac{\sin 1}{2}$

令 $n \rightarrow +\infty$, 得 $\sin 1 \leq \varepsilon_0 = \frac{\sin 1}{2}$, 矛盾

所以 $\frac{\sin nx}{n^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致趋于 0

证明 (2): 当 $x \geq \pi$ 时, 由 $\left| \frac{\sin(nx)}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^\pi}$

由 M 判别法可知, 函数 $f(x)$ 在 $[\pi, +\infty)$ 一致收敛, 故连续

对 $0 < \delta < \pi$ 时, 当 $\delta < x < \pi$; 由和差化积

$$\text{可知: } \left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| \leq \frac{2}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{2}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

$$\text{且: } \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^\delta} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

由狄利克雷判别法, 函数 $f(x)$ 在 $[\delta, \pi]$ 上一致收敛, 在 $[\delta, \pi]$ 上连续,

由于 $\delta > 0$ 的任意性可知, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上连续,

综上所述, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续

六 (本题 10 分): 设 $\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+tx)}{x(x+1)} dx, (t \geq 0)$.

(1) 证明: $\varphi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有连续的导函数;

(2) 计算 $\varphi(1)$ 的值.

证明 (1): $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{(x+1)(1+tx)}, (t > 0)$ 对于 $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$

$$\text{有: } 0 < \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{(x+1)(1+tx)}, (t \in [\alpha, \beta])$$

因为 $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(1+tx)}$ 收敛

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t} dx$ 关于 t 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛,

于是 $\psi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $\psi'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(1+tx)}$

$$\text{当 } t > 0, t \neq 1 \text{ 时, } \int_0^A \frac{dx}{(x+1)(1+tx)} = \frac{\ln t}{t-1}, \quad (*)$$

$$\text{即: } \psi'(t) = \frac{\ln t}{t-1}$$

$$\text{当 } t=1 \text{ 时, } \psi'(1) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = 1$$

注意到 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$; 故 $\psi'(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续

证明 (2): 由 (*) 式: $\psi(1) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$

$$\begin{aligned}
& : = - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx \\
& : = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \right) dx \\
& : = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \right) dx \\
& : = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

七 (本题 10 分): 设 D 是由简单光滑闭曲线 L 围成的区域, $f(x,y)$ 在 D 上连续的偏导数。记: $d = \max_{(x,y) \in D} \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

(1) 证明: $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_L x f(x,y) dy - \iint_D x \frac{\partial f}{\partial x} dx dy$

(2) $\forall (x,y) \in L, f(x,y) = 0$, 证: $\iint_D f^2(x,y) d\sigma \leq d^2 \iint_D \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) d\sigma$ 。

证明 (1): 由格林公式可知 $\int_L x f dy = \iint_D \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + f \right) dx dy$

即证出: $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_L x f dy - \iint_D x \frac{\partial f}{\partial x} dx dy$

证明 (2): 由 (1) 的思路

可得: $\int_L x f^2 dy = \iint_D \left(2x f \frac{\partial f}{\partial x} + f^2 \right) dx dy$

以及: $\int_L y f^2 dx = - \iint_D \left(2y f \frac{\partial f}{\partial y} + f^2 \right) dx dy$

又由于: $\forall (x,y) \in L, f(x,y) = 0 \Rightarrow \int_L x f^2 dy = \int_L y f^2 dx = 0$

可得: $\iint_D \left(2x f \frac{\partial f}{\partial x} + f^2 \right) dx dy = - \iint_D \left(2y f \frac{\partial f}{\partial y} + f^2 \right) dx dy$

由柯西不等式: $\iint_D f^2 d\sigma \leq \iint_D |x f f'_x + y f f'_y| d\sigma$

即: $= \iint_D |(x,y)| |(f'_x + f'_y)| |f| d\sigma$

即: $= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2} |f| d\sigma$

即: $\leq d \iint_D \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2} |f| d\sigma$

即: $\leq d \left(\iint_D f^2 dx dy \iint_D (f_x'^2 + f_y'^2) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$

即: $\left(\iint_D f^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq d \left(\iint_D (f_x'^2 + f_y'^2) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\text{即: } \iint_D f^2(x, y) d\sigma \leq d^2 \iint_D \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) d\sigma$$