数分（B2）期中考试参考答案

一、1、求极限

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

解 因为 $(x^2+y^2)^2 \leqslant 2(x^4+y^4)$, 所以

$$0 \leqslant \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \leqslant \frac{2}{x^2+y^2} \to 0$$

一、2、求 $f(x,y)=(x+y)^3$ 在区域 $D=[-1,1]\times[-1,1]$ 上的积分.

解 直接用二元函数 $(x+y)^3$ 在积分区域上的对称性得积分为零. 或者

$$\text{积分} = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} (x+y)^3 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x((x+1)^4-(x-1)^4) = 0.$$

这里, 被积函数是 x 的奇函数, 积分区间关于原点对称, 因此直接得到积分为零.

一、3、求向量 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ 与 $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ 的叉乘 $\vec{a}\times\vec{b}$.

解 直接计算 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

一、4、求 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$ 在原点的 4 阶Taylor 展开式.

解 因为 $\dfrac{\partial^{i+j} f(x,y)}{\partial x^i \partial^j} = \mathrm{e}^{x+y}$,, 所以

$$f(x,y) = 1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+\frac{1}{3!}(x+y)^3+\frac{1}{4!}(x+y)^4.$$

二、设 $f(x,y)$ 有 2 解连续偏导数, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$, 求 $f(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 的二阶导数（用 f 的各阶导数表示）.

解 在恒等式 $f(x,\varphi(x))=0$ 两边对 x 分别求一阶和二阶导数：

$$\begin{aligned}&\text{一阶导:}\ \ f_x'(x,\varphi(x))+f_y'(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0\\&\text{二阶导:}\ \ f_{xx}''+f_{xy}''\varphi'+(f_{yx}''+f_{yy}''\varphi')\varphi'+f_y'\varphi''=0.\end{aligned}$$

由第一个方程解出

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y'(x,\varphi(x))}.$$

代入第二个方程并解出 φ'' 得

$$\varphi''(x)=-\frac{f_{xx}''(f_y')^2-2f_{xy}''f_x'f_y'+f_{yy}''(f_x')^2}{(f_y')^3}$$

也可以直接对$\varphi'(x)=-\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y'(x,\varphi(x))}$ 继续求导, 本质上是一样的.

三、计算积分

$$I=\int_V(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中$V=\left\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\ x,y,z\geqslant 0\right\}$

解 令 $x=au, y=bv, z=cw$, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=abc.$

$$I=abc\int_{V'}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

其中$V'=\{(u,v,w)\mid u^2+v^2+w^2\leqslant 1,\ u,v,w\geqslant 0\}$. 注意到积分

$$\begin{aligned}\int_{V'}u^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w&=\frac{1}{3}\int_{V'}(u^2+v^2+w^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{1}{30}\pi\end{aligned}$$

所以

$$I=\frac{1}{30}abc(a^2+b^2+c^2)\pi.$$

本题在第一次变换后, 虽然积分区域变得简单了, 但是被积函数较原来复杂. 仔细观察发现被积函数在球上的积分具有某种对称性. 因此积分时要充分利用被积函数或积分区域的对称性, 本题如果对

$$\int_{V'}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

直接用球坐标变换, 会大大增加计算难度.

四、设 $x, y, z \geqslant 0$, $x+y+z=1$, 试用Lagrange 乘数法求 $f(x,y,z)=x^a y^b z^c\ (a,b,c>0)$ 的最大值.

解 令

$$F(x,y,z)=x^a y^b z^c+\lambda(x+y+z-1),$$

驻点:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}=a x^{a-1} y^b z^c+\lambda=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y}=b x^a y^{b-1} z^c+\lambda=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial z}=c x^a y^b z^{c-1}+\lambda=0,\\
&x+y+z-1=0.
\end{aligned}$$

上面前三个方程分别乘以 x, y, z 相加后再利用第四个方程得

$$\lambda=-(a+b+c)x^a y^b z^c,$$

代入前三个方程分别得

$$x_0=\frac{a}{a+b+c},\ y_0=\frac{b}{a+b+c},\ z_0=\frac{c}{a+b+c},$$

由于$D=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1, x,y,z\geqslant 0$ 是空间中有界闭集. 连续函数$f(x,y,z)=x^a y^b z^c$ 在 D 上一定取到最大值, 又因为f 在 D 上取值为正, 在边 $x=0$, 或 $y=0$, 或 $z=0$ 上函数取值为零, 因此只能在唯一的驻点取到最大值, 最大值为

$$f(x_0,y_0,z_0)=\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}.$$

求条件极值时, 要根据题意, 分析驻点是否是极值点或最值点.

五、设参数变换 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 有二阶连续的导数, 并满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

证明对任意二阶连续可微函数 $z=f(x,y)$, 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

证明 根据条件不难验证

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

利用上式直接计算

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

即可.

本题与第二题集中反映了不少同学对多变量的复合函数求导存在理解上和计算上的双重问题. 复合函数求导是导数运算最基本的问题, 希望认真对待.

六、1. 求椭球 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$ 在点 $M_0\left(\sqrt{3},\ \frac{4\sqrt{3}}{3},\ \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ 的切平面 Π;

2. 设 V 是切平面 Π 与三个坐标平面围成的区域, 求积分

$$I=\iiint_V x\left(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

解 记

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}-1,$$

$$\Longrightarrow \nabla F=2\frac{x}{9}\vec{i}+2\frac{y}{16}\vec{j}+2\frac{z}{25}\vec{k},$$

因此在 M_0,有

$$\nabla F(M_0)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{1}{4}\vec{j}+\frac{1}{5}\vec{k}\right).$$

取与 $\nabla F(M_0)$ 平行的向量 $\vec{n}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{1}{4}\vec{j}+\frac{1}{5}\vec{k}$ 作为切平面的法向量得切平面方程为

$$\frac{1}{3}(x-\sqrt{3})+\frac{1}{4}\left(y-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{1}{5}\left(z-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)=0$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-\sqrt{3}=0$$

求积分:

$$I=\iiint_V x\left(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\leqslant\sqrt{3},y,z\geqslant 0}\left(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5}\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\int_0^{3(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5})}x\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{2}{9}\iint\limits_{\frac{y}{4}+\frac{z}{5}\leqslant\sqrt{3},y,z\geqslant 0}\left(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5}\right)^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{81}{2}\sqrt{3}$$

本题首先要计算 $\nabla F(M_0)$, 因此只要选取与 $\nabla F(M_0)$ 平行的向量作为切平面的法向量即可, 尽可能简化. 简化的目的是为了进一步计算创造条件. 否则增加计算难度和出错率.

七、设 A,B,C 是平面上不共线的三点, 且三角形 $\triangle ABC$ 有一个内角$\geqslant 120^\circ$. 考虑平面上如下函数

$$f(P)=|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|+|\overrightarrow{PC}|$$

1. 证明函数 $f(P)$ 可以在平面上取到最小值.
2. 求函数 $f(P)$ 在可微点的梯度.
3. 证明函数 $f(P)$ 没有驻点, 求函数的最小值并说明理由.

证明 因为函数 $f(P)$ 连续, 且

$$\lim_{P\to+\infty}f(P)=+\infty.$$

因此只要取任意常数 $M>f(A)$, 则存在 $R>0$, 使得当 $|\overrightarrow{OP}|\geqslant R$ 时, 就有 $f(P)>M$. 由此判断 $f(P)$ 圆 $D=\{P(x,y)\mid|\overrightarrow{OP}|\leqslant R\}$ 外取值大于 M.

因为 D 是空间中有界闭集, 因此 $f(P)$ 在 D 上取到最小值, 该最小值也是 $f(P)$ 在平面上的最小值.

又因为

$$\nabla f(P)=-\left(\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}+\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}\right).$$

除 A,B,C 三点外连续（三个偏导数连续）, 因此可微. 只在 A,B,C 处不可微.

关于第三问可采取反证法. 如果 f 有驻点 P_0 则

$$\nabla f(P_0)=0,\Longrightarrow\frac{\overrightarrow{P_0A}}{|\overrightarrow{P_0A}|}+\frac{\overrightarrow{P_0B}}{|\overrightarrow{P_0B}|}+\frac{\overrightarrow{P_0C}}{|\overrightarrow{P_0C}|}=0,$$

因此三个单位向量 $\dfrac{\overrightarrow{P_0A}}{|\overrightarrow{P_0A}|}$, $\dfrac{\overrightarrow{P_0B}}{|\overrightarrow{P_0B}|}$, $\dfrac{\overrightarrow{P_0C}}{|\overrightarrow{P_0C}|}$ 之间夹角为 $120°$, 也就是 $\overrightarrow{P_0A}$, $\overrightarrow{P_0B}$, $\overrightarrow{P_0C}$ 的夹角也是 $120°$. 并且 P_0 与 A, B, C 两两不共线.

根据题意, 不妨设三角形 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC \geqslant 120°$. 记$\angle P_0AB = \alpha$, 因此 $\angle P_0AC \geqslant 120° - \alpha$, 由此推出

$$\text{在}\triangle P_0AB \text{ 中：} \angle P_0BA = 60° - \alpha,$$
$$\text{在}\triangle P_0AC \text{ 中：} \angle P_0CA < \alpha - 60°.$$

矛盾. 因此函数 f 没有驻点.

由于函数在可微处没有驻点, 因此最小值只能在不可微的三点 A, B, C 处取到, 即

$$\min f(P) = \min\{f(A), f(B), f(C)\}.$$

进一步可知, 若三角形 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC \geqslant 120°$, 则

$$\min f(P) = f(A) = |\overrightarrow{PB}| + |\overrightarrow{PC}|.$$

本题首先分析在平面上取到最小值. 因为平面不是有界闭集, 不能直接使用“连续函数取到最小”的结果. 即使函数是正的, 有下确界, 也不能保证取到最小值, 例如 e^{-x^2} 在直线上下确界是 0, 但是取不到最小值. 应将平面划分为两部分, 得出最小值一定在一个有界闭集之中, 从而保证能取到最小值.

八、设 f 是定义在 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 上的三阶连续可微函数, 且 $f(0, 0) = 0$.
1. 证明存在 D 上2阶连续可微函数 g_1, g_2 满足

$$f(x, y) = xg_1(x, y) + yg_2(x, y).$$

2. 又设 $\nabla f(0, 0) = 0$, 且

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{pmatrix} (0, 0) < 0$$

证明在原点的一个邻域内存在变换 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 使得

$$f(x(u, v), y(u, v)) = u^2 - v^2.$$

证明 因为

$$f(x,y)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}f(tx,ty)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1[xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)]\,\mathrm{d}t.$$

令

$$g_1(x,y)=\int_0^1 f'_x(tx,ty)\,\mathrm{d}t,\quad g_2(x,y)=\int_0^1 f'_y(tx,ty)\,\mathrm{d}t,$$

就有

$$f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y).$$

为了证明 g_1,g_2 的可微性, 有

$$g_1(x+h,y)-g(x,y)=\int_0^1(f'_x(tx+th,ty)-f(tx,ty))\,\mathrm{d}t=\int_0^1 tf''_{xx}(tx+t\theta h,ty)\,\mathrm{d}t\ (0<\theta<1).$$

因此

$$\lim_{h\to0}\frac{g_1(x+h,y)-g(x,y)}{h}=\lim_{h\to0}\int_0^1 f''_{xx}(tx+t\theta h,ty)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 tf''_{xx}(tx,ty)\,\mathrm{d}t.$$

这里因为 f''_{xx} 连续, 所以

$$\left|\int_0^1 f''_{xx}(tx+t\theta h,ty)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 tf''_{xx}(tx,ty)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1 t|f''_{xx}(tx+t\theta h,ty)-f''_{xx}(tx,ty)|\,\mathrm{d}t\to0.$$

这里实际上用到了参变量积分的求导问题, 后面将要讲到, 但实际证明并不困难.

类似方法可证明 g_1,g_2 2阶连续可微.

关于第二问的证明如下:

因为 $\nabla f(0,0)=0,\Longrightarrow f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. 利用第一问的结果

$$f'_x(x,y)=g_1(x,y)+xg'_{1x}(x,y)+yg'_{2x}(x,y)$$

所以 $f'_x(0,0)=g_1(0,0)=0$, 同理得 $g_2(0,0)=0$. 分别对 $g_1(x,y)$ 和 $g_2(x,y)$ 使用第一问的结果, 存在 $a_1(x,y),b_1(x,y)$ 和 $a_2(x,y),b_2(x,y)$ 使得

$$g_1(x,y)=xa_1(x,y)+yb_1(x,y),\quad g_2(x,y)=xa_2(x,y)+yb_2(x,y).$$

代入 $f(x,y)$ 的表达式得

$$f(x,y)=x^2a(x,y)+2xyb(x,y)+y^2c(x,y).$$

这里为了简化，我们令

$$a(x,y)=a_1(x,y),\ b(x,y)=\frac{b_1(x,y)+b_2(x,y)}{2},c(x,y)=b_2(x,y).$$

直接计算得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=a(0,0),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=b(0,0),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=c(0,0)$$

所以

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\end{pmatrix}(0,0)=\det\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}(0,0)=(a^2-bc)(0,0)<0$$

因为 $a(x,y),b(x,y),c(x,y)$ 连续, 不妨设 $a(0,0)>0$, 因此在原点一个邻域内有 $a(x,y)>0,\ a^2(x,y)-b(x,y)c(x,y)<0$, 在该邻域内将表达式

$$f(x,y)=x^2a(x,y)+2xyb(x,y)+y^2c(x,y).$$

化为如下形式

$$f(x,y)=\left(x\sqrt{a}+y\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)y^2.$$

令

$$u=x\sqrt{a}+y\frac{b}{\sqrt{a}},\ v=y\sqrt{\frac{b^2}{a}-c},$$

直接计算得

$$\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{x=0,y=0}=\left.\sqrt{b^2-ac}\right|_{(0,0)}>0$$

所以在远点附近存在逆变换

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v)$$

使得

$$f(x(u,v),y(u,v))=u^2-v^2.$$