§9.6 向量场的微商

9.6.1 向量场

所谓向量场是指空间中某个区域中, 每一点对应一个向量. 向量场是物理等学科中流速场、力场、电场、磁场等“场”的概念的概括.

例如如图9.1 所示的海洋中水流的速度场, 每一个向量显示该点处水流速度的方向和大小, 而速度场的方向形成一个圆形, 则表明水流在此形成一个涡流.

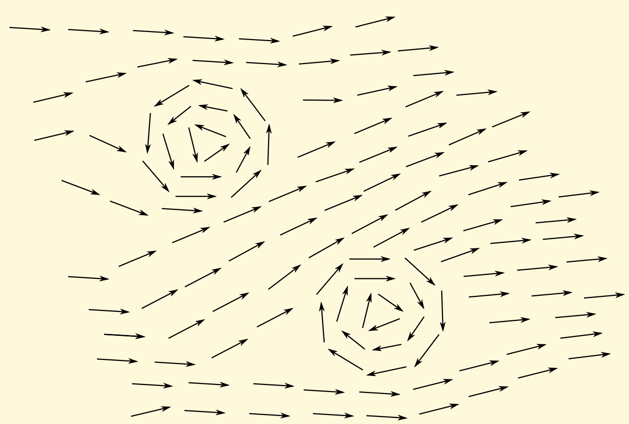

图 9.1

空间中引进坐标系, 向量场可用坐标系来表示.

如果空间引入直角坐标系 $[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$, 那么空间中的一点就可以由坐标表示 $M(x,y,z)$, 而这一点对应的向量 $\vec{v}$ 可以表示为

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},\quad (x,y,z)\in D\subset\mathbb{R}^3,$$

其中 P,Q,R 称为向量场 $\vec{v}$ 的分量函数.

在平面上引进直角坐标系, 那么平面向量场表示如下

$$\vec{v}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j},\quad (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2.$$

因此, 空间中的向量场就是空间中一个区域到空间的一个映射, 平面中的向量场就是平面中一个区域到平面的一个映射.

空间中表示点 P 的位置向量 $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, 称为空间的位置向量场, 在直角坐标系下

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

以质量为 M 并位于坐标原点的质点, 对位于点 (x, y, z) 处质量为 m 的质点的引力场表示如下 (图9.2)

$$\vec{F} = -k\frac{mM}{r^3}\vec{r},$$

其中 k 是引力常数, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

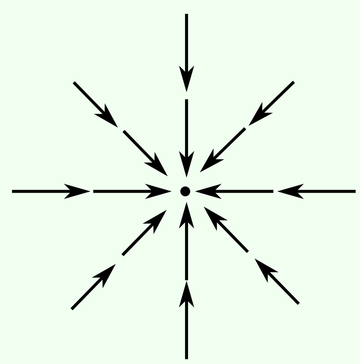

图 9.2

平面向量场

$$\vec{v}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

表示的是一个二维的“斡旋”状向量场 (图9.3), 因为

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j})\cdot(-y\vec{i} + x\vec{j}) = 0,$$

所以该向量场的特点是每一点的向量都与圆心在原点的圆相切, 并且随着与原点的距离越远, 向量越长.

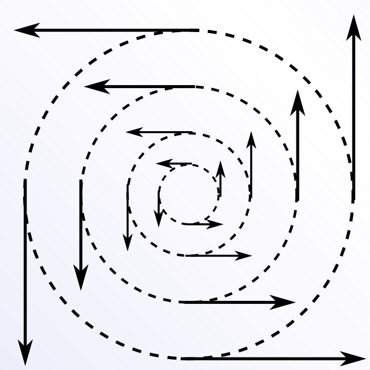

图 9.3

对于向量场 $\vec{v}(x,y,z)$, 当下列极限存在时

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\vec{v}(x+\Delta x,y,z)-\vec{v}(x,y,z)}{\Delta x}$$

就定义为 $\vec{v}(x,y,z)$ 对 x 的偏微商, 同理可定义 $\vec{v}(x,y,z)$ 对 y 和 z 的偏微商. 特别, 在直角坐标系下, 若

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},$$

则关于 x 的偏微商可以表示为

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}\vec{j}+\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}\vec{k},$$

以及对 y 和 z 类似的偏微商表示. 如果分量函数 P,Q,R 有连续的偏导数, 那么我们称向量场 $\vec{v}$ 为光滑向量场.

相对于向量场, 我们称空间中一点对应一个数量称为数量场.

例如物体中每一点对应的质量密度、温度, 流体中每一点对应的压强等等都是数量场. 当取定直角坐标系后, 数量场就是点 $M(x,y,z)$ 的函数 $u(x,y,z)$.

9.6.2 梯度、散度与旋度

根据微分的定义, 函数 $\phi(x, y, z)$ 的微分 $\mathrm{d}\phi$ 是 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 的线性函数, 它可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{grad}\,\phi \cdot \mathrm{d}\vec{r},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}, \\ \mathrm{d}\vec{r} &= \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}.\end{aligned}$$

因此函数的微分 $\mathrm{d}\phi$ 是函数的梯度 $\mathrm{grad}\,\phi$ 与 $\mathrm{d}\vec{r}$ 的点乘.

在直角坐标系下, 定义如下算符

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

并称为 Hamilton **算符**或 Nabla **算符**.

算符 ∇ 兼有微商和向量两种运算属性. 算符 ∇ 作用在函数 $\phi(x, y, z)$ 上就给出了函数的梯度

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} = \mathrm{grad}\,\phi,$$

只因此一个数量场的梯度是一个向量场.

借用算符 ∇, 函数 ϕ 的微分 $\mathrm{d}\phi$ 可以表示为

$$\mathrm{d}\phi = \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

由于算符 ∇ 具有向量性质, 所以还可以与向量场分别做 “点乘” 和 “叉乘” .

在直角坐标系下, 设

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

向量场 $\vec{v}$ 的**散度** 定义如下

$$\operatorname{div}\vec{v} = \nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

因此, 一个向量场的散度是一个数量场.

向量场的**旋度** 定义如下

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

因此, 一个向量场的旋度是一个向量场.

设 ϕ, ψ 是数量场, $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为向量场, 则

$$
\begin{aligned}
\nabla(\phi+\psi) &= \nabla\varphi+\nabla\psi,\\
\nabla\cdot(\vec{a}+\vec{b}) &= \nabla\cdot\vec{a}+\nabla\cdot\vec{b},\\
\nabla\times(\vec{a}+\vec{b}) &= \nabla\times\vec{a}+\nabla\times\vec{b},\\
\nabla(\phi\psi) &= \phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi,\\
\nabla\cdot(\phi\vec{a}) &= \phi\nabla\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\nabla\phi,\\
\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) &= \vec{b}\cdot\nabla\times\vec{a}-\vec{a}\cdot\nabla\times\vec{b},\\
\nabla\times(\phi\vec{a}) &= \nabla\phi\times\vec{a}+\phi\nabla\times\vec{a}.
\end{aligned}
$$

还可以直接验证下列结果

$$
\begin{aligned}
\text{rot grad}\,\phi &= \nabla\times\nabla\phi=\vec{0},\\
\text{div rot}\,\vec{a} &= \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a})=0
\end{aligned}
$$

Hamilton 算符 ∇具有向量的属性使得它自己和自己还可以进行“点乘”，其结果是一个新的算符, 记为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta} = \nabla\cdot\nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\end{aligned}$$

称为 Laplace 算符, 它作用在数量场 $\phi(x, y, z)$ 上为

$$\boldsymbol{\Delta}\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$