中国科学技术大学 2024年秋季学期
(数学分析(B1) 期中考试试题参考解答)

一、(24 分) 求下面的极限：

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x+3}{x^2-1}\right)$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1)$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{x})}}$.

解

1. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{x+3}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+2}{x^2-1}-\frac{x+3}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1-\cos x)(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=1.$$

3. $$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

4. $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{x})}}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{(1+x)\frac{1}{(1+x)\ln(1+\frac{1}{x})}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{(1+x)\frac{x}{1+x}}=\mathrm{e}$$

二、(24 分) 求函数 $f(x)$ 的导数:

1. $f(x)=\dfrac{\ln x}{2+\sin x}$;

2. $f(x)=x^5 5^x$;

3. $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & -1<x<0\\ \mathrm{e}^x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$;

4. $f(x)$ 是 $y=(x^2+1)\mathrm{e}^x$ 的反函数.

解

1. $$\left(\frac{\ln x}{2+\sin x}\right)'=\frac{2+\sin x-x(\cos x)\ln x}{x(2+\sin x)^2};$$

2. $$(x^5 5^x)'=5x^4 5^x+x^5 5^x\ln 5=x^4 5^{x+1}+x^5 5^x\ln 5;$$

3. $$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & -1<x<0\\ \mathrm{e}^x, & x\geqslant 0\end{cases};$$

4. $$f'(x)=\frac{1}{(f(x)+1)^2\mathrm{e}^{f(x)}}=\frac{f^2(x)+1}{x(f(x)+1)^2}.$$

三、(10 分) 求参数方程 $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ 所表示的曲线在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程, 并求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 因为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= (-\sin t + \sin t + t\cos t)\,\mathrm{d}t = t\cos t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= (\cos t - \cos t + t\sin t)\,\mathrm{d}t = t\sin t\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$. 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处, 有 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \frac{\pi}{4})$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \frac{\pi}{4})$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$. 故, 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程为

$$y = x - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\tan t}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{t\cos t} = \frac{1}{t\cos^3 t}.$$

四、(10 分) 问函数 $f(x) = \mathrm{e}^{10|x-2|-x^2}$ 是否最大值? 如果有, 请求出最大值.

解 显然 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(0) = \mathrm{e}^{20} > 0$. 因此 $f(x)$ 有最大值. 因为

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{10(x-2)-x^2}, & x \geqslant 2 \\ \mathrm{e}^{10(2-x)-x^2}, & x < 2, \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{10(x-2)-x^2}(10 - 2x), & x > 2 \\ \mathrm{e}^{10(2-x)-x^2}(-10 - 2x), & x < 2, \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 有两个驻点 $x = 5, x = -5$. 由于 $f(2) = \mathrm{e}^{-4}$, $f(5) = \mathrm{e}^{5}$, $f(-5) = \mathrm{e}^{45}$. 故, $f(x)$ 在 $x = -5$ 取最大值 e^{45}.

五、(8 分) 设 $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$. 求 $f^{(3n+2)}(0)$.

解 因为 $(x^3-1)f(x) = x-1$, 所以根据 Leibniz 公式, 有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^3-1)^{(k)}f^{(n-k)}(x) = 0,\ n = 2, 3, \cdots.$$

由此

$$(x^3-1)f^{(n)}(x) + 3nx^2f^{(n-1)}(x) + 3n(n-1)xf^{(n-2)}(x) + n(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(x) = 0.$$

在 $x = 0$ 点, 有

$$f^{(n)}(0) + n(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(0) = 0.$$

易知 $f(0) = 1,\ f'(0) = -1,\ f''(0) = 0$. 故, 由上面的递推公式, 可得

$$\begin{aligned}
&f^{(3n)}(0) = (-1)^n(3n)!,\\
&f^{(3n+1)}(0) = (-1)^{n+1}(3n+1)!,\\
&f^{(3n+2)}(0) = 0.
\end{aligned}$$

六、(8 分) 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 n 个实数, 满足

$$|a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n\sin nx| \leqslant |\sin x|\ (\forall\ x \in \mathbb{R}).$$

求证: $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$.

证明 由条件得

$$\left|a_1\frac{\sin x}{x} + a_2\frac{\sin 2x}{x} + \cdots + a_n\frac{\sin nx}{x}\right| \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ (x \neq 0).$$

注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x} = k$. 在上面的不等式中让 $x \to 0$, 即得

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1.$$

七、(8 分) 设 $a_1 > 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 求 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$.

解 由递推公式可知 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 是严格递增的数列. 若 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{a_n\}$ 收敛到一个正数 a, 因而 $a_{n+1} - a_n \to 0$. 但由递推公式 $\frac{1}{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. 这是矛盾的. 故, a_n 严格递增发散到 $+\infty$.

由递推公式

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}.$$

由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{a_n^2}\right) = 2.$$

故, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.

八、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负且可导, $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 求证: 存在 $\xi \in (0,1)$ 满足 $f^3(\xi) + f'(\xi) = 0$.

证明 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 中有零点 x_0, 则 x_0 是 $f(x)$ 在区间内部的最小值点, 因而 $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. 此时取 ξ 为 x_0 即可.

若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 中无零点, 则 $f(x) > 0$. 令 $g(x) = -\frac{1}{2f^2(x)} + x$. 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 可导, 且有 $g(0) = g(1) = -\frac{1}{2}$. 根据微分中值定理, 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即,

$$\frac{f'(\xi)}{f^3(\xi)} + 1 = 0.$$

故, $f^3(\xi) + f'(\xi) = 0$.