随机过程 B 2020-2021 学年第二学期试卷解答

陈镜舟

2023 年 7 月 7 日

一

1

(1) 错，应该是独立增量

(2) 对，比如 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) 错。反例：一维对称随机游走是零常返。

(4) 错，反例即 (2) 中的 P。

(5) 对。周期无穷大 $\Rightarrow P_{ii}^{(n)} = 0$。

2

计算积分时使用了 Γ 积分公式。

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu t} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} dt \\
=&\frac{u\lambda^k}{k!} \int_0^{+\infty} t^k e^{-(\lambda+u)t} dt \\
=&\frac{\mu\lambda^k}{k!} \cdot \frac{1}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \int_0^{+\infty} (\lambda+\mu)^k t^k e^{-(\lambda+\mu)t} d(\lambda+\mu)t \\
=&\frac{\mu\lambda^k}{k!} \cdot \frac{1}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \cdot \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du \\
=&\frac{u\lambda^k}{k!} \frac{1}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \cdot k! \\
=&\frac{\mu\lambda^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

3

C，因为 $E(N(t)) = \lambda t \neq const$。

4

$N(t)$ 即参数为 μ 的 Poisson 过程。

$$f_{s_n}(x) = \mu e^{-\mu x} \cdot \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$P(N(t) = n) = \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!}$$

5

D，其他选项的错误原因如下。

A：N 和 M 不一定独立。

B：Poisson 过程的时间间隔服从指数分布，因此每隔一辆车记录一次得到的随机过程的时间间隔服从 Γ 分布，这显然不是 Poisson 过程。

C：R 应在 $\tau = 0$ 处取得最大值。

6

思路：化为标准高斯分布。

$R(\tau) = \frac{1}{2}e^{-|\tau|} \Rightarrow R(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$。因此将区间化为 $[\frac{0.5-0}{1/\sqrt{2}}, \frac{1-0}{1/\sqrt{2}}]$，即 $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$。故

$$P = \Phi(\sqrt{2}) - \Phi(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

7

$\lambda r e^{-\lambda r}$，等价于参数为 λ 的 Poisson 过程在 $[0, r]$ 时间段内观察到一次的概率。

二

复合 Poisson 过程，参考教材第 9 页例 1.12 和第 21 页。

$$
\begin{aligned}
&X_{(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \\
&Y_i \sim \begin{pmatrix} 30 & 50 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix},\ EY = 35,\ VarY = 75 \\
&E[X(t)] = 10 \times 35t = 350t,\ Var[X(t)] = 10 \times (75 + 35^2)t = 13000t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_Y(\mu) &= \frac{3}{4}e^{30\mu} + \frac{1}{4}e^{50\mu} \\
g_{X(t)}(u) &= E[(g_Y(u))^N] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!} \cdot g_Y^k = \frac{1}{e^{\lambda t}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(g_Y \lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda t(g_Y - 1)} = exp\{10t(\frac{3}{4}e^{30u} + \frac{1}{4}e^{50u} - 1)\}
\end{aligned}
$$

三

1

不可约，非周期，正常反，矩阵略。

2

各个状态都是遍历态，计算可得

$$
\pi_i = \frac{\frac{1}{1-P_{ii}}}{\sum_{j=1}^{a} \frac{1}{1-P_{jj}}}
$$

四

1

显然。

2

各状态互达且状态 1 为非周期，故各个态均为非周期。

$$\begin{aligned} f_{11} &= (1-p_1) + p_1(1-p_2) + p_1p_2(1-p_3) + \cdots \\ &= 1 - p_1 + p_1 - p_1p_2 + p_1p_2 - p_1p_2p_3 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

状态 1 常返 $\Rightarrow$ 各个态均常返。

五

1

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E[X(t)] \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\omega_0 t + \theta) d\theta = 0 \\ R_Y(\tau) &= E[X(t)\cos(w_0 t + \theta) X(s) \cos(w_0 s + \theta)] \\ &= E[X(t)X(s)] \cdot E[\frac{\cos(w_0 t + w_0 s + 2\theta) + \cos(w_0 t - w_0 s)}{2}] \\ &= R_X(\tau) \cdot \frac{1}{2} \cos w_0 \tau \\ E[Y^2(t)] &= R_Y(0) = \frac{1}{2} R_X(0) < \infty \end{aligned}$$

所以 $Y(t)$ 为平稳过程。

2

$$\begin{aligned} S_Y(w) &= \int R_Y(x) e^{-jw\tau} d\tau \\ &= \int \frac{1}{2} R_X(\tau) \cdot \frac{1}{2} [e^{jw_0\tau} + e^{-jw_0\tau}] \cdot e^{-jw\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int R_x(\tau) [e^{-j(w-w_0)\tau} + e^{-j(w+w_0)\tau}] d\tau \\ &= \frac{1}{4} [S_x(w - w_0) + S_x(w + w_0)] \end{aligned}$$

六

1

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{w^2+2}{w^4+7w^2+12}e^{jw\tau}dw=\frac{1}{2}e^{-2|\tau|}-\frac{\sqrt{3}}{6}e^{-\sqrt{3}|\tau|}$$

2

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|R(\tau)|d\tau\le\int_{0}^{+\infty}e^{-2t}+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\sqrt{3}t}dt<\infty$$

因此有均值遍历性。