

中国科学技术大学

2012—2013 学年第一学期考试试卷

考试科目：随机过程 得分：_____

学生所在系：_____ 姓名_____ 学号：_____

(2013 年 1 月 22 日，开卷)

一、(20 分) 设有随机过程

$$X(t) = \xi \cos t + \eta \sin t, \quad (0 < t < \pi)$$

其中 ξ 与 η 独立，且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ ，试求：

- (1) $\{X(t), 0 < t < \pi\}$ 的均值函数 $\mu_X(t)$ 与协方差函数 $r_X(s, t)$ ；
- (2) $\{X(t), 0 < t < \pi\}$ 的一维与二维分布密度。

二、(20 分) 公路某收费站红、黄、蓝三种颜色的汽车到达数分别为速率 3, 4, 5 的泊松过程，且相互独立，试求：

- (1) 第一辆车（红、黄或蓝色）的平均到达时间及第一辆红车的平均到达时间；
- (2) 红车首先到达的概率；
- (3) 在相继的两辆红车之间恰有 k 辆车到达的概率 ($k = 0, 1, 2, \dots$)。

三、(20 分) 有关某种商品的销售状况共有 24 个季度的连续数据 (1—畅销, 0—滞销)：

1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0,
1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1,

假设该商品销售状况满足齐次马氏链，

- (1) 试确定该马氏链的一步转移概率矩阵 P (用转移频率来近似转移概率)；
- (2) 若现在是畅销，试确定其后第四季度的销售状况；
- (3) 若影响销售的所有因素不变，试分析长期以后销售状况的分布。

四、(18分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为区间 $[0, 3]$ 上的随机游动, 其一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \\ 0, & 0, & 1, & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求质点由状态 k 出发而被状态 0 吸收的概率 p_k 及吸收的平均时间 v_k ($k = 1, 2, 3$)。

五、(22分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为独立同分布的随机序列, 且 $E(X_0) = 0, \text{Var}(X_0) = \sigma^2$ 。

又设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为强度 λ 的泊松过程, 且与 $\{X_n, n \geq 0\}$ 独立。记 $Y(t) = X_{N(t)}, (t \geq 0)$,

- (1) 证明 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 为平稳过程;
- (2) 试求 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的功率谱密度函数。
- (3) $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的均值遍历性是否成立? 为什么?

(完)