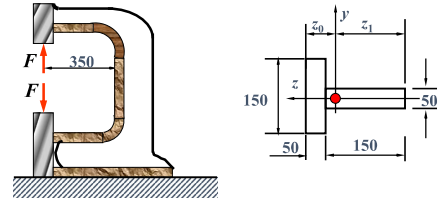
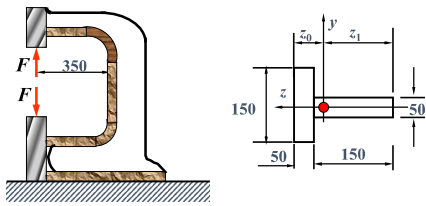
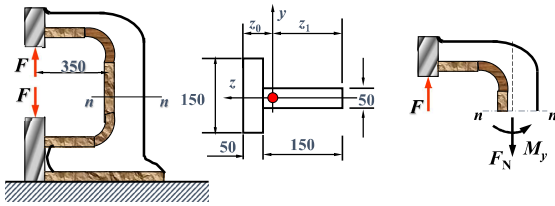


例题2 小型压力机的铸铁框架如图所示.已知材料的许用拉应力  $[\sigma_t] = 30\text{MPa}$ , 许用压应力  $[\sigma_c] = 160\text{MPa}$ . 试按立柱的强度确定压力机的许可压力  $F$ .



解: (1) 确定形心位置  $A = 15 \times 10^{-3} \text{m}^2$   $z_0 = 7.5 \text{cm}$

计算截面对中性轴  $y$  的惯性矩  $I_y = 5310 \text{cm}^4$

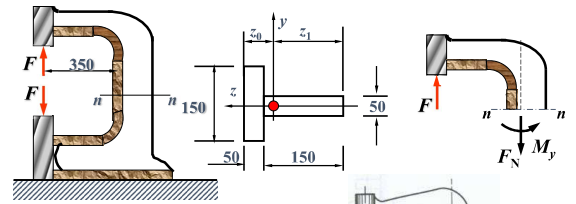


(2) 分析立柱横截面上的内力和应力

在  $n-n$  截面上有轴力  $F_N$  及弯矩  $M_y$

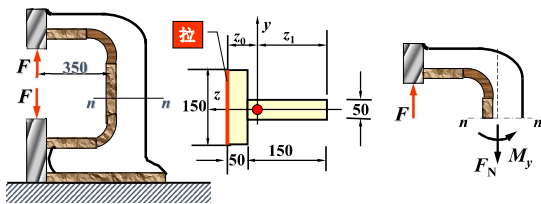
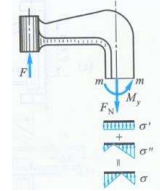
$$F_N = F$$

$$M_y = [(35 + 7.5) \times 10^{-2}] F = 42.5 \times 10^{-2} F$$



由轴力  $F_N$  产生的拉伸正应力为

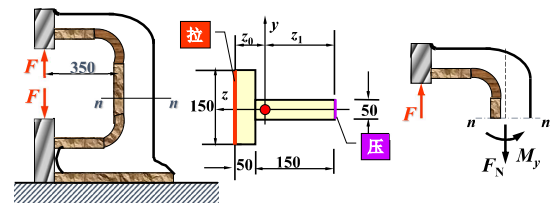
$$\sigma' = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{15} \text{MPa}$$



由弯矩  $M_y$  产生的最大弯曲正应力为

$$\sigma''_{t\max} = \frac{M_y z_0}{I_y} = \frac{425 \times 7.5 F}{5310} \text{MPa} (+)$$

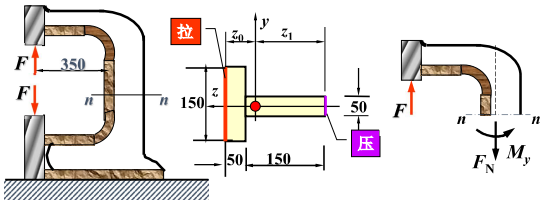
$$\sigma''_{c\max} = \frac{M_y z_1}{I_y} = \frac{425 \times 12.5 F}{5310} \text{MPa} (-)$$



(3) 叠加 在截面内侧有最大拉应力

$$\sigma_{t\max} = \sigma' + \sigma''_{t\max} = \frac{F}{15} + \frac{425 \times 7.5 F}{5310} \leq [\sigma_t]$$

$$\rightarrow [F] \leq 45.1 \text{kN}$$



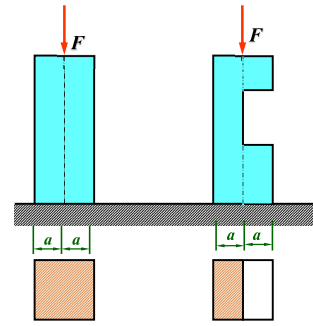
在截面外侧有最大压应力

$$\sigma_{cmax} = |\sigma' + \sigma''_{cmax}| = \left| \frac{F}{A} - \frac{425 \times 12.5F}{5310} \right| \leq [\sigma_c]$$

$$\rightarrow |F| \leq 171.3 \text{ kN}$$

所以取  $|F| \leq 45.1 \text{ kN}$

例题3 正方形截面立柱的中间处开一个槽,使截面面积为原来截面面积的一半.求开槽后立柱的最大压应力是原来不开槽的几倍.



解: 未开槽前立柱为轴向压缩

$$\sigma_1 = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{F}{(2a)^2} = \frac{F}{4a^2}$$

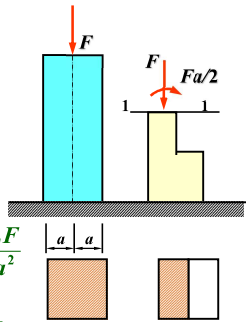
开槽后1-1是危险截面

危险截面为偏心压缩

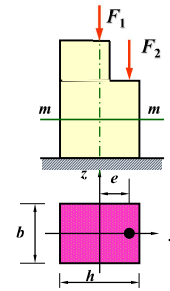
将力  $F$  向1-1形心简化

$$\sigma_2 = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{F}{2a \cdot a} + \frac{F \cdot a/2}{\frac{1}{6} 2a \cdot a^2} = \frac{2F}{a^2}$$

$$\frac{\text{开槽后立柱的最大压应力}}{\text{未开槽前立柱的最大压应力}} = \frac{2F/a^2}{F/4a^2} = 8$$



例题4 矩形截面柱如图所示,  $F_1$  的作用线与杆轴线重合,  $F_2$  作用在  $y$  轴上. 已知:  $F_1 = F_2 = 80 \text{ kN}$ ,  $b = 24 \text{ cm}$ ,  $h = 30 \text{ cm}$ . 如要使柱的  $m-m$  截面只出现压应力, 求  $F_2$  的偏心距  $e$ .



解:

(1) 外力分析 将力  $F_2$  向截面形心简化后, 梁上的外力有

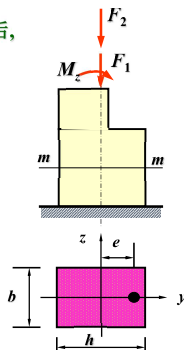
$$\text{轴向压力 } F = F_1 + F_2$$

$$\text{力偶矩 } M_z = F_2 \cdot e$$

(2)  $m-m$  横截面上的内力有

$$\text{轴力 } F = F_1 + F_2$$

$$\text{弯矩 } M_z = F_2 \cdot e$$



$$\text{轴力产生压应力 } \sigma' = -\frac{F_N}{A} = -\frac{F_1 + F_2}{A}$$

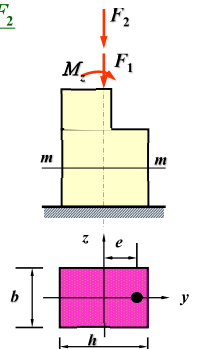
弯矩产生的最大正应力

$$\sigma'' = \pm \frac{M_z}{W_z} = \pm \frac{F_2 \cdot e}{bh^2/6}$$

(3) 依题的要求, 整个截面只有压应力

$$\sigma = |\sigma' + \sigma''| = \left| -\frac{F_1 + F_2}{A} + \frac{F_2 \cdot e}{bh^2/6} \right| = 0$$

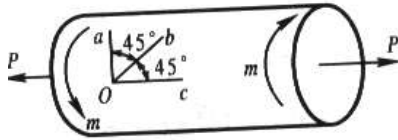
$$\text{得 } e = \frac{(F_1 + F_2)/A}{F_2} \times \frac{bh^2}{6}$$



### § 9-3 拉扭组合

《辅导》p154

例 8-6 一钢制圆轴受拉扭联合作用, 如图 8-9(a) 所示。已知圆轴直径  $d=20$  mm, 材料弹性模量  $E=200$  GPa, 现采用直角应变法测得轴表面  $O$  点的应变值为  $\epsilon_x = -96 \times 10^{-6}$ ,  $\epsilon_y = 565 \times 10^{-6}$ ,  $\epsilon_z = 320 \times 10^{-6}$ 。试求载荷  $P$  和  $m$  的大小。



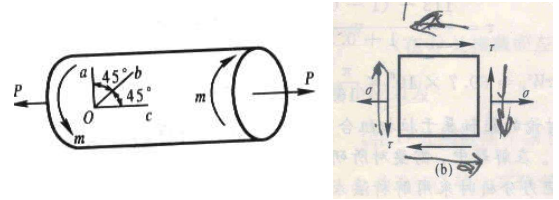
解: 在拉扭联合作用下,  $O$  点的应力状态如图 8-9(b) 所示。由此可知

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad \tau = \frac{m}{W_t}$$

$OC$  方向的线应变

$$\epsilon_x = \frac{\sigma}{E}$$

得  $\sigma = E\epsilon_x = 200 \times 10^9 \times 320 \times 10^{-6} = 64 \text{ MPa}$



$$P = \sigma A = 64 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} (20 \times 10^{-3})^2 = 20.1 \text{ kN}$$

与  $\sigma$  成  $45^\circ$  和  $-45^\circ$  方向的应力分别为

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos 90^\circ - \tau \sin 90^\circ = \frac{\sigma}{2} - \tau$$

$$\sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos(-90^\circ) - \tau \sin(-90^\circ) = \frac{\sigma}{2} + \tau$$

由广义胡克定律

$$\epsilon_{45^\circ} = \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_{45^\circ} - \mu \sigma_{-45^\circ})$$

即  $\left( \frac{\sigma}{2} - \tau \right) - \mu \left( \frac{\sigma}{2} + \tau \right) = E\epsilon_x = 200 \times 10^9 \times 565 \times 10^{-6} = 113 \text{ MPa}$

所以

$$\tau = \frac{113 - (1 - \mu) \frac{\sigma}{2}}{1 + \mu}$$

其中  $\mu = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_z} = \frac{-96 \times 10^{-6}}{320 \times 10^{-6}} = -0.3$

代入上式

$$\tau = \frac{113 - (1 - 0.3) \frac{64}{2}}{1 + 0.3} = 69.7 \text{ MPa}$$

$$m = \tau W_t = 69.7 \times 10^6 \times \frac{\pi}{16} \times (20 \times 10^{-3})^3 = 109.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

### § 9-4 扭转与弯曲的组合

(Combined bending and torsion)

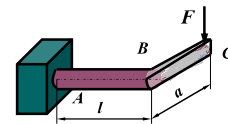
研究对象 (research object) 圆截面杆 (circular bars)

受力特点 (character of external force)

杆件同时承受转矩和横向力作用

变形特点 (character of deformation)

发生扭转和弯曲两种基本变形



#### 一、内力分析

(Analysis of internal force)

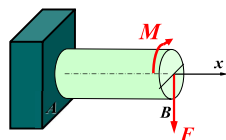
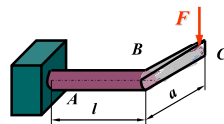
设一直径为  $d$  的等直圆杆  $AB$ ,  $B$  端具有与  $AB$  成直角的刚臂, 研究  $AB$  杆的内力。

将力  $F$  向  $AB$  杆右端截面的形心  $B$  简化得

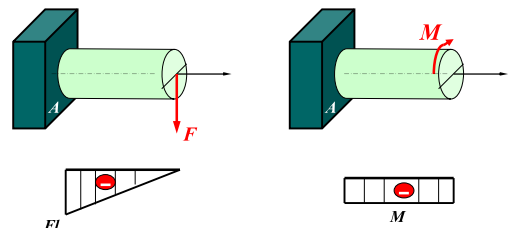
横向力  $F$  (引起平面弯曲)

力偶矩  $M = Fa$  (引起扭转)

$AB$  杆为弯曲与扭转局面组合变形



画内力图确定危险截面



固定端  $A$  截面为危险截面

## 二、应力分析 (Stress analysis)

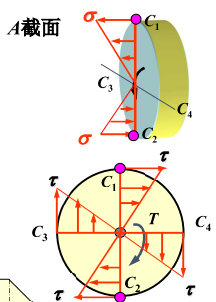
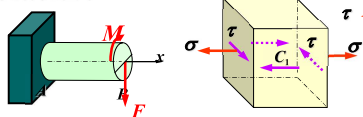
危险截面上的最大弯曲正应力  $\sigma$  发生在  $C_1$ 、 $C_2$  处

最大扭转切应力  $\tau$  发生在截面周边上的各点处。

危险截面上的危险点为  $C_1$  和  $C_3$  点

对于许用拉压应力相等的塑性材料制成的杆, 这两点的危险程度是相同的, 可取任意点  $C_1$  来研究。

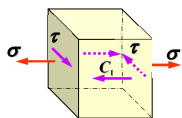
$C_1$  点处于平面应力状态, 该点的单元体如图所示



## 讨论

$$(1) \sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$



该公式适用于图示的平面应力状态,  $\sigma$  是危险点的正应力,  $\tau$  是危险点的切应力, 且横截面不限于圆形截面

该公式适用于弯扭组合变形; 拉(压)与扭转的组合变形; 以及拉(压)扭转与弯曲的组合变形

## 三、强度分析 (Analysis of strength condition)

### 1. 主应力计算 (Calculating principal stress)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

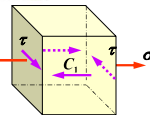
$$\sigma_2 = 0$$

### 2. 相当应力计算 (Calculating equal stress)

第三强度理论, 计算相当力  $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

第四强度理论, 计算相当应力  $\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

### 3. 强度校核 (Check the strength) $\sigma_r \leq [\sigma]$



(2) 对于圆形截面杆有

$$W_t = 2W = \frac{\pi d^3}{16}$$

弯扭组合变形时, 相应的相当应力表达式可改写为

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_t}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{T}{W_t}\right)^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W}$$

式中  $W$  为杆的抗弯截面系数,  $M, T$  分别为危险截面的弯矩和扭矩. 以上两式只适用于弯扭组合变形下的圆截面杆.

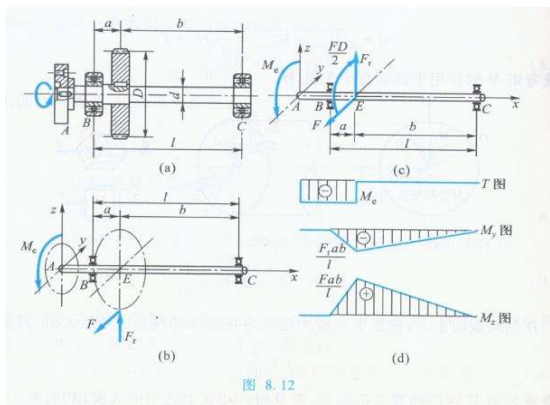
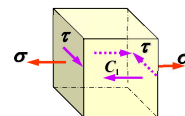


图 8.12

根据轴的计算简图, 分别作出轴的扭矩  $T$  图、垂直平面内的弯矩  $M_1$  图和水平平面内的弯矩  $M_2$  图, 如图 8.12d 所示。轴在  $AE$  段内各截面上的扭矩皆相等, 但截面  $E$  上的  $M_1$  及  $M_2$  都为相应平面内弯曲的最大弯矩, 故截面  $E$  为危险截面。在危险截面  $E$  上的内力矩是:

扭矩  $T = M_e = \frac{FD}{2}$

$x-z$  平面内的弯矩  $M_{1max} = \frac{F_1 ab}{l}$

$x-y$  平面内的弯矩  $M_{2max} = \frac{F_2 ab}{l}$

对截面为圆形的轴, 包含轴线的任意纵向面都是纵向对称面。所以, 把  $M_{1max}$  和  $M_{2max}$  合成后, 合成弯矩  $M$  的作用平面仍然是纵向对称面, 仍可按对称弯曲的公式(5.2)计算。这样, 用矢量合成的方法, 求出  $M_{1max}$  和  $M_{2max}$  的合成弯矩  $M$  (图 8.13a) 为



$$M = \sqrt{M_{\max}^2 + M_{\min}^2} = \frac{ab}{l} \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

合成弯矩  $M$  的作用平面垂直于矢量  $M$ 。

在危险截面上,与扭矩  $T$  对应的切应力在边缘各点上达到最大值,其值为

$$\tau = \frac{T}{W_t} \quad (a)$$

与合成弯矩  $M$  对应的弯曲正应力,在  $D_1$  和  $D_2$  点上达到最大值,其值为

$$\sigma = \frac{M}{W} \quad (b)$$

沿截面的直径  $D_1, D_2$ ,切应力和正应力的分布如图 8.13b 所示。 $D_1$  和  $D_2$  两点上的扭转切应力与边缘上其他各点相同,而弯曲正应力为极值,故这两点是危险点。 $D_1$  点处的应力状态如图 8.13c 所示。

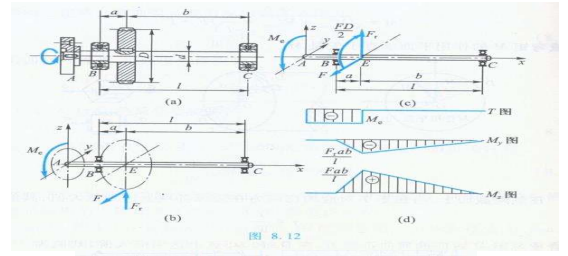


图 8.12

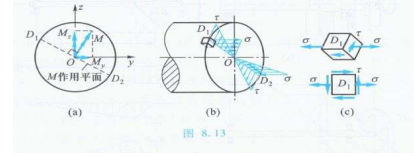


图 8.13

若轴由抗拉和抗压强度相等的塑性材料制成,则在危险点  $D_1$  和  $D_2$  中只需校核一点(例如  $D_1$  点)的强度就可以了。因为  $D_1$  点是二向应力状态,应按强度理论建立强度条件。先由公式(7.6)求得  $D_1$  点的主应力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

对塑性材料来说,应采用第三强度理论或第四强度理论。按第三强度理论,强度条件为

$$\sigma_1 - \sigma_2 \leq [\sigma]$$

以式(c)中的主应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  代入上式,得出

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.4)$$

再以式(a)中的  $\tau$  和式(b)中的  $\sigma$  代入上式,并注意到对圆截面,有  $W_t = 2W$ ,于

是得圆轴在扭转与弯曲组合变形下的强度条件为

$$\frac{1}{W} \sqrt{M^2 + T^2} \leq [\sigma] \quad (8.5)$$

若按第四强度理论,则强度条件应为

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

以式(c)代入上式,经简化后得出

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8.6)$$

再以式(a)和式(b)代入公式(8.6),得到按第四强度理论的强度条件是

$$\frac{1}{W} \sqrt{M^2 + 0.75T^2} \leq [\sigma] \quad (8.7)$$

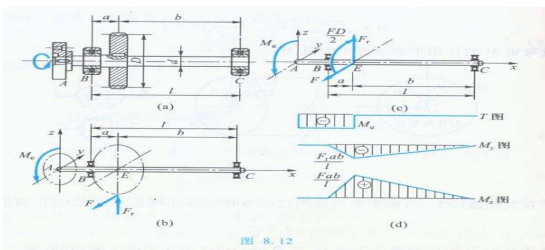


图 8.12

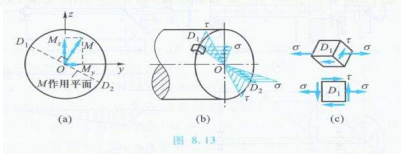


图 8.13

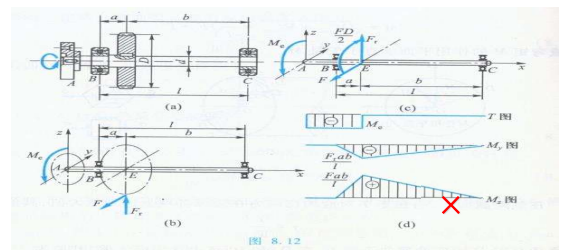


图 8.12

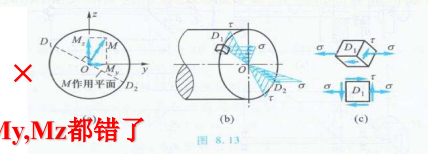
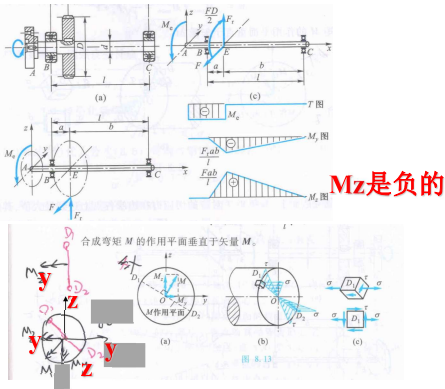


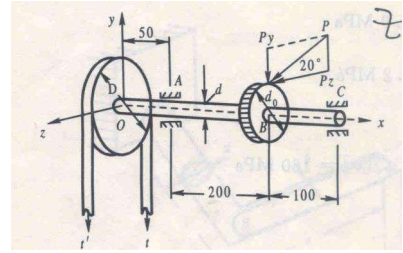
图 8.13

My, Mz 都错了



《辅导》p157

例8-4 传动轴如图8-6(a)所示。已知皮带轮的拉力  $t=6\text{ kN}$ ,  $t'=3\text{ kN}$ , 皮带轮的直径  $D=300\text{ mm}$ ; 齿轮的节圆直径  $d_g=100\text{ mm}$ , 压力角  $\alpha=20^\circ$ ; 轴的直径  $d=40\text{ mm}$ , 许用应力  $[\sigma]=160\text{ MPa}$ , 试按第四强度理论校核轴的强度。



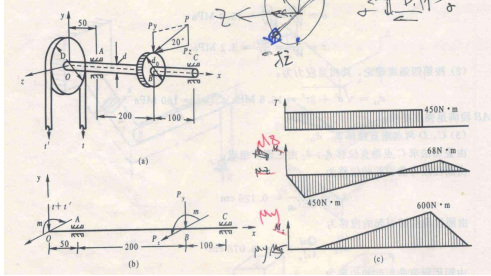
解: 以整体为研究对象, 选取坐标系如图(a)所示, 由  $\sum m_x = 0$ ,

$$P_x \frac{d_g}{2} - (t - t') \frac{D}{2} = 0$$

得圆周力

$$P_x = 9\text{ kN}$$

再通过齿轮压力角  $\alpha$  求径向力



$$P_y = P_x \tan 20^\circ = 9 \times 0.364 = 3.28\text{ kN}$$

轴的转矩

$$m = (t - t') \frac{D}{2} = 0.45\text{ kN} \cdot \text{m}$$

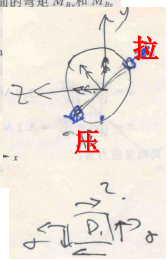
轴的计算简图如图8-6(b)所示。其中  $t+t'$  及  $P_x$  使轴在垂直平面 ( $xOy$ ) 内发生弯曲;  $P_y$  使轴在水平平面 ( $xOz$ ) 内发生弯曲; 而转矩  $m$  将使轴的  $OB$  段发生扭转。因此, 该轴为扭弯组合变形。

作内力图如图8-6(c)。由内力图可知,  $B$  截面为危险截面。B截面的弯矩  $M_x$  和  $M_y$  作用在两个相互垂直的平面内, 故其合成弯矩为

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{68^2 + 600^2} = 603.8\text{ N} \cdot \text{m}$$

由第四强度理论进行校核

$$\begin{aligned} \sigma_{r4} &= \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + 0.75T^2} \\ &= \frac{32}{\pi(40 \times 10^{-3})^3} \sqrt{603.8^2 + 0.75 \times 450^2} \\ &= 114.4\text{ MPa} < [\sigma] \end{aligned}$$



轴的强度足够。

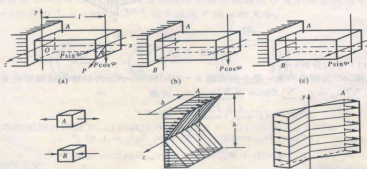
讨论: ① 在未合成弯矩时, 两个相互垂直平面内的弯矩值必须取自同一截面, 如例题中的B截面, 而不是两个弯矩最大值的合成, 显然,  $M = \sqrt{600^2 + 450^2}$  是错误的, 因为两个被合成的弯矩不在同一截面上。

② 如果构件受力比较复杂, 危险截面不易直观判断, 应对可能出现的危险截面一一进行分析。

③ 对两个相互垂直平面内发生变形的圆轴, 由于过截面形心任一轴的扭转截面系数均相同, 因此若要求弯曲应力, 可直接通过合成弯矩求取, 即

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}$$

但若其它形状的截面, 一般对过形心任一轴的扭转截面系数不同, 这时必须求出两个相互垂直平面内的弯曲应力, 然后进行叠加。以矩形截面的悬臂梁为例, 自由端受  $P$  力作用, 如图8-7(a)所示 ( $P$  与  $yz$  平面), 可见将  $P$  力分别沿  $y$  和  $z$  方向分解, 依次求出  $P \cos \alpha$  和  $P \sin \alpha$  在危险面 (固定端) 上引起的应力 (应力分布如图8-7(c), (d)), 然后进行叠加, 不难确定, 危险截面上A点的拉应力最大, B点的压力最大, 它们分别为



例题7 空心圆杆AB和CD杆焊接成整体结构, 受力如图。AB杆的外径  $D=140\text{ mm}$ , 内外径之比  $\alpha = d/D=0.8$ , 材料的许用应力  $[\sigma]=160\text{ MPa}$ , 试用第三强度理论校核AB杆的强度

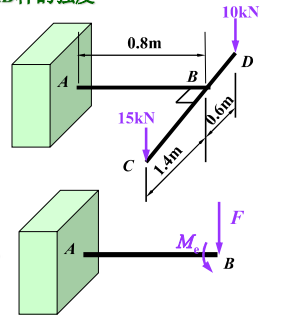
解: (1) 外力分析

将力向AB杆的B截面形心简化得

$$F = 25\text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M_c &= 15 \times 1.4 - 10 \times 0.6 \\ &= 15\text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

AB杆为扭转和平面弯曲的组合变形



(2) 内力分析—画扭矩图和弯矩图

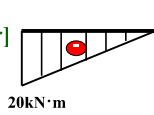
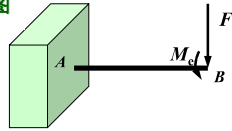
固定端截面为危险截面

$$T = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{\max} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$$

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = 157.26 \text{ MPa} < [\sigma]$$



中间截面为危险截面

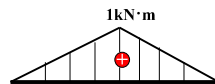
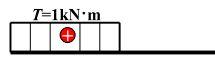
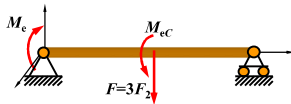
$$T = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{\max} = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + T^2} \leq [\sigma]$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$d = 44.83 \text{ mm}$$



例题8 传动轴如图所示,在A处作用一个外力偶矩 $M_e=1\text{kN}\cdot\text{m}$ ,皮带轮直径 $D=300\text{mm}$ ,皮带轮紧边拉力为 $F_1$ ,松边拉力为 $F_2$ ,且 $F_1=2F_2$ , $l=200\text{mm}$ ,轴的许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$ .试用第三强度理论设计轴的直径

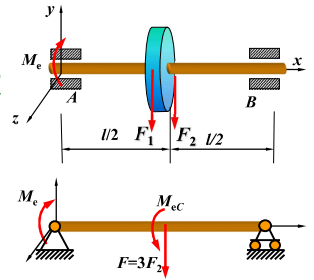
解:将力向轴的形心简化

$$M_{eC} = (F_1 - F_2) \cdot \frac{D}{2} = \frac{F_2 \cdot D}{2}$$

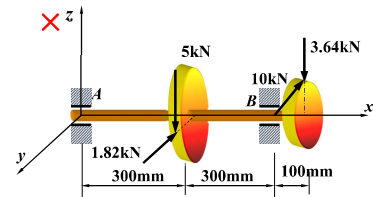
$$F_2 = \frac{20}{3} \text{ kN}$$

$$F = 20 \text{ kN}$$

轴产生扭转和垂直纵向对称面内的平面弯曲



例题9 图示一钢制实心圆轴,轴上的齿轮C上作用有铅垂切向力5kN,径向力1.82kN;齿轮D上作用有水平切向力10kN,径向力3.64kN.齿轮C的节圆直径 $d_1=400\text{mm}$ ,齿轮D的节圆直径 $d_2=200\text{mm}$ .设许用应力 $[\sigma]=100\text{MPa}$ ,试按第四强度理论求轴的直径.



解:(1) 外力的简化

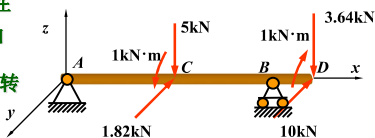
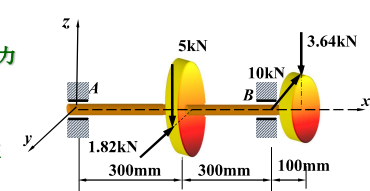
将每个齿轮上的外力向该轴的截面形心简化

(2) 轴的变形分析

5kN, 3.64kN 使轴在xz 纵对称面内产生弯曲

1.82kN, 10kN 使轴在xy 纵对称面内产生弯曲

1 kN·m使轴产生扭转



(3) 绘制轴的内力图

$$M_{yC} = 0.57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{yB} = 0.36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

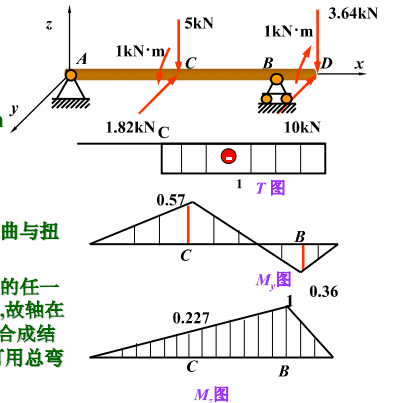
$$M_{zC} = 0.227 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{zB} = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

圆杆发生的是斜弯曲与扭转的组合变形

由于通过圆轴轴线的任一平面都是纵向对称平面,故轴在xz和xy两平面内弯曲的合成结果仍为平面弯曲,从而可用总弯矩来计算该截面正应力



(4) 危险截面上的内力计算

$$M_{yC} = 0.57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{zC} = 0.227 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{yB} = 0.36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{zB} = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

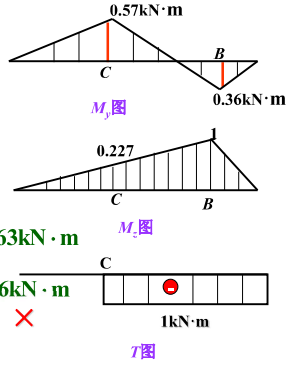
B和C截面的总弯矩为

$$M_B = \sqrt{M_{yB}^2 + M_{zB}^2} = 1.063 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C = \sqrt{M_{yC}^2 + M_{zC}^2} = 0.36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$T_B = T_C = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

B截面是危险截面



(5) 由强度条件求轴的直径

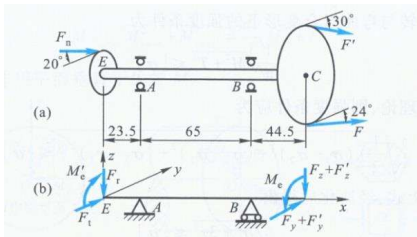
$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{M_B^2 + 0.75T_B^2}}{W} = \frac{1372}{W} \leq [\sigma]$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

轴需要的直径为

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \times 1372}{\pi \times 100 \times 10^6}} = 51.9 \text{ mm}$$

例 8.5 图 8.14a 是某滚齿机传动轴 AB 的示意图。轴的直径为 35 mm, 材料为 45 钢, 许用应力  $[\sigma] = 85 \text{ MPa}$ 。轴是由  $P = 2.2 \text{ kW}$  的电动机通过带轮 C 带动的, 转速为  $n = 966 \text{ r/min}$ 。带轮的直径为  $D = 132 \text{ mm}$ , 带拉力约为  $F + F' = 600 \text{ N}$ 。齿轮 E 的节圆直径为  $d_1 = 50 \text{ mm}$ ,  $F_e$  为作用于齿轮上的啮合力 (与齿轮节圆切线的夹角为  $20^\circ$ )。试校核轴的强度。



解: 由公式(3.1)得带轮传递轴的扭转力矩为

$$M_z = \left( 9.549 \times \frac{2.2}{966} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 21.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

力矩  $M_z$  是通过带拉力  $F$  和  $F'$  传递的, 应有

$$(F - F') \frac{D}{2} = M_z$$

$$F - F' = \frac{2M_z}{D} = \frac{2 \times 21.7 \text{ N} \cdot \text{m}}{132 \times 10^{-3} \text{ m}} = 328.8 \text{ N}$$

已知

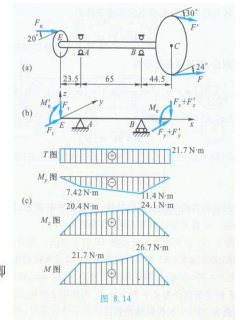
$$F + F' = 600 \text{ N}$$

由以上两式解出

$$F = 464.4 \text{ N}, \quad F' = 135.6 \text{ N}$$

由平衡方程知, 齿轮上法向力  $F_n$  对轴线的力矩  $M_e$  应与带轮上的  $M_z$  相等, 即

$$M_e = F_n \cos 20^\circ \frac{d_1}{2} = M_z$$



$$F_n = \frac{2M_z}{d_1 \cos 20^\circ} = \frac{2 \times 21.7 \text{ N} \cdot \text{m}}{50 \times 10^{-3} \text{ m} \cos 20^\circ} = 923.7 \text{ N}$$

将齿轮上的法向力  $F_n$  和带拉力  $F$  与  $F'$  向轴线 ( $x$  轴) 简化,  $F_n$  简化后得到的  $M_e$  和  $F$  与  $F'$  简化后得到的力矩  $M_z$ , 大小相等方向相反 (图 8.14b), 引起轴的扭转变形。

向  $x$  轴简化后, 作用于轴线上的横向力  $F_x, F_x'$  引起的弯曲变形, 把这些横向力分解成平行于  $y$  轴和  $z$  轴的分量, 并示于图 8.14c 中。其中

$$F_x = F_n \cos 20^\circ = 868 \text{ N}$$

$$F_x' = F_n' \cos 20^\circ = 315.9 \text{ N}$$

$$F_y + F_y' = F_n \sin 20^\circ + F_n' \sin 30^\circ = 541.7 \text{ N}$$

$$F_y + F_y' = F_n \sin 20^\circ + F_n' \sin 30^\circ = 256.7 \text{ N}$$

分别作扭矩  $T$  图、 $x-y$  平面内的弯矩  $M_y$  图、 $x-z$  平面内的弯矩  $M_z$  图 (图 8.14c)。由这些内力图, 可以判定轴的危险截面为 B 面。在截面 B 上, 扭矩  $T$  和合成弯矩  $M$  分别为

$$T = 21.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

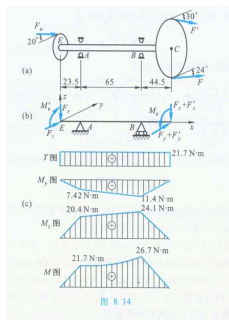
$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(11.4 \text{ N} \cdot \text{m})^2 + (24.1 \text{ N} \cdot \text{m})^2} = 26.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

用同样方法也可求出其他截面上的合成弯矩, 合成弯矩见图 8.14c。

如按第三强度理论进行强度校核, 则由公式(8.5)得

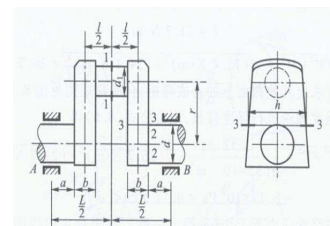
$$\frac{1}{W} \sqrt{M^2 + T^2} = \frac{32}{\pi \times (35 \times 10^{-3})^3} \sqrt{(26.7 \text{ N} \cdot \text{m})^2 + (21.7 \text{ N} \cdot \text{m})^2} = 8.17 \times 10^7 \text{ Pa} = 8.17 \text{ MPa} < [\sigma]$$

考虑到轴在交变应力下工作 (见第十一章), 这里规定的许用应力  $[\sigma]$  已远低于静载下的数值。即使如此, 上面的计算表明, 轴的相当应力仍然偏低, 轴的直径偏大, 强度储备偏高。出现这种情况, 有时是由于刚度或结构上的考虑。



例 8.6 图 8.15a 所示曲轴的尺寸是:  $r = 60 \text{ mm}$ ,  $\frac{L}{2} = 65 \text{ mm}$ ,  $\frac{l}{2} = 32 \text{ mm}$ ,

$a = 22 \text{ mm}$ 。连杆轴颈直径  $d_1 = 50 \text{ mm}$ , 主轴颈直径  $d = 60 \text{ mm}$ 。曲柄截面 3-3 的尺寸为:  $b = 22 \text{ mm}$ ,  $h = 102 \text{ mm}$ 。作用于曲轴上的力有: 作用于连杆轴颈上的力  $F' = 32 \text{ kN}$  和  $F = 17 \text{ kN}$ , 曲柄惯性力  $F_{d1} = 3 \text{ kN}$ , 平衡重惯性力  $F_{d11} = 7 \text{ kN}$ 。曲轴材料为碳钢,  $[\sigma] = 120 \text{ MPa}$ 。试校核曲轴的强度。





解：由曲轴的平衡方程，容易求出轴承的约束力和曲轴传递的扭转力偶矩。它们分别是

$$F_{A1} = F_{A2} = \frac{1}{2} \times (32 \text{ kN} + 2 \times 7 \text{ kN} - 2 \times 3 \text{ kN}) = 20 \text{ kN}$$

$$F_{B1} = F_{B2} = \frac{1}{2} \times 17 \text{ kN} = 8.5 \text{ kN}$$

$$M_x = F_T = (17 \times 10^3 \text{ N}) (60 \times 10^{-3} \text{ m}) = 1\,020 \text{ N}\cdot\text{m}$$

(1) 连杆轴颈的强度计算

连杆轴颈在中央截面 1-1 上弯矩最大。现将这一截面上的弯矩及扭矩分别计算如下：

在  $x-y$  平面内的弯矩

$$\begin{aligned} M_x &= F_{A1} \times \frac{L}{2} + (F_T - F_{A1}) \frac{L}{2} \\ &= (20 \times 10^3 \text{ N}) (65 \times 10^{-3} \text{ m}) + (3 \times 10^3 \text{ N} - 7 \times 10^3 \text{ N}) (32 \times 10^{-3} \text{ m}) \\ &= 1\,172 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

在  $x-z$  平面内的弯矩

$$M_z = F_{B1} \times \frac{L}{2} = (8.5 \times 10^3 \text{ N}) (65 \times 10^{-3} \text{ m}) = 553 \text{ N}\cdot\text{m}$$

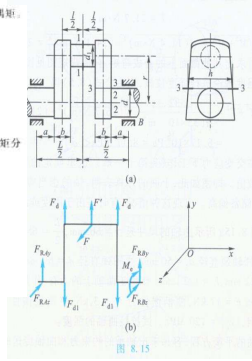


图 8.15

$M_x$  和  $M_z$  的合成弯矩

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_z^2} = \sqrt{(1\,172 \text{ N}\cdot\text{m})^2 + (553 \text{ N}\cdot\text{m})^2} = 1\,296 \text{ N}\cdot\text{m}$$

扭矩为

$$T = F_{A1} \times r = (8.5 \times 10^3 \text{ N}) (60 \times 10^{-3} \text{ m}) = 510 \text{ N}\cdot\text{m}$$

如用第四强度理论进行强度校核，由公式 (8.7) 得

$$\frac{1}{W} \sqrt{M^2 + 0.75T^2} = \frac{32}{\pi \times (50 \times 10^{-3} \text{ m})^3} \sqrt{(1\,296 \text{ N}\cdot\text{m})^2 + 0.75 \times (510 \text{ N}\cdot\text{m})^2} = 112 \times 10^6 \text{ Pa} = 112 \text{ MPa} < [\sigma]$$

所以，连杆轴颈满足强度条件。

(2) 主轴颈的强度计算

对主轴颈，应校核它与曲柄联接的截面 2-2 (图 8.15a)。在这一截面上，

$$M_x = F_{B1y} \times a = (20 \times 10^3 \text{ N}) (22 \times 10^{-3} \text{ m}) = 440 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_z = F_{B1z} \times a = (8.5 \times 10^3 \text{ N}) (22 \times 10^{-3} \text{ m}) = 187 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_z^2} = \sqrt{(187 \text{ N}\cdot\text{m})^2 + (440 \text{ N}\cdot\text{m})^2} = 478 \text{ N}\cdot\text{m}$$

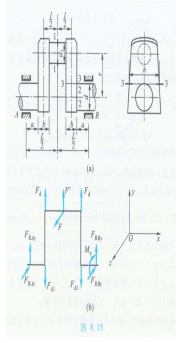


图 8.15

$$T = M_x = 1\,020 \text{ N}\cdot\text{m}$$

如仍用第四强度理论校核强度，则有

$$\frac{1}{W} \sqrt{M^2 + 0.75T^2} = \frac{32}{\pi \times (60 \times 10^{-3} \text{ m})^3} \sqrt{(478 \text{ N}\cdot\text{m})^2 + 0.75 \times (1\,020 \text{ N}\cdot\text{m})^2} = 47.4 \times 10^6 \text{ Pa} = 47.4 \text{ MPa} < [\sigma]$$

可见主轴颈也满足强度要求。

(3) 曲柄的强度计算

曲柄的变形是弯曲、扭转和压缩三种变形的组合。在切于主轴颈的曲柄横截面 3-3 上 (图 8.15a)，轴力  $F_N$ 、弯矩  $M_x$ 、扭矩  $M_z$  与其他横截面相同，但弯矩  $M_z$  比其他截面大，所以应校核这一截面的强度。由图 8.16a 并根据平衡方程，可以求出横截面 3-3 上的轴力  $F_N$ 、弯矩  $M_x$  和  $M_z$ ，以及剪力  $F_{Sx}$ ，它们分别是：

$$F_N = F_{B1y} - F_{A1} = 20 \text{ kN} - 7 \text{ kN} = 13 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M_x &= M_x - F_{B1y} \times \frac{d}{2} = 1\,020 \text{ N}\cdot\text{m} - (8.5 \times 10^3 \text{ N}) \left( \frac{60}{2} \times 10^{-3} \text{ m} \right) \\ &= 765 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$M_z = F_{B1z} \left( a + \frac{b}{2} \right) = 20 \times 10^3 \text{ N} \times (22 + 11) \times 10^{-3} \text{ m} = 660 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$T = M_z = F_{B1z} \left( a + \frac{b}{2} \right) = 281 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$F_{Sx} = F_{B1z} = 8.5 \text{ kN}$$

完成。现将所得结果直接写在下面：

$$\tau_1 = 19.8 \text{ MPa}$$

D 点与  $F_{Sx}$  对应的切应力  $\tau_2$  应为

$$\tau_2 = \frac{3F_{Sx}}{2bh} = \frac{3}{2} \times \frac{8.5 \times 10^3 \text{ N}}{(22 \times 10^{-3} \text{ m}) (102 \times 10^{-3} \text{ m})} = 5.68 \text{ MPa}$$

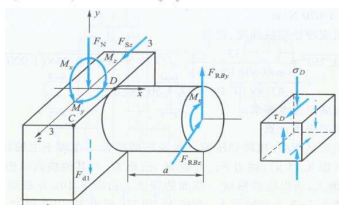
$\tau_1$  和  $\tau_2$  的方向相同，这样，D 点的总切应力是

$$\tau_D = \tau_1 + \tau_2 = 25.5 \text{ MPa}$$

D 点的应力状态已表示于图 8.16b 中。使用第四强度理论时，应将  $\sigma_D$  及  $\tau_D$  代入公式 (8.6)，得

$$\sqrt{\sigma_D^2 + 3\tau_D^2} = \sqrt{(86 \text{ MPa})^2 + 3 \times (25.5 \text{ MPa})^2} = 96.7 \text{ MPa} < [\sigma]$$

故曲柄也是满足强度条件的。



因为曲柄横截面 3-3 是矩形的，不是圆截面，所以求截面上一点的弯曲正应力时，不应将  $M_x$  和  $M_z$  合成，而应该分别求出该点与  $M_x$  和  $M_z$  对应的正应力，并与  $F_N$  引起的正应力叠加。同时，对扭转切应力的计算，也应考虑到截面是矩形的。在截面上的 C 点，与轴力  $F_N$ 、弯矩  $M_x$  和  $M_z$  对应的正应力皆为压应力，叠加的结果是

$$\sigma_c = \frac{F_N}{bh} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{F_N}{bh} + \frac{6M_x}{bh^2} + \frac{6M_z}{b^2h} = 106 \text{ MPa} < [\sigma]$$

因为 C 点是单向压缩，所以只要  $\sigma_c$  小于许用应力  $[\sigma]$ ，就已满足了强度条件。

在 D 点，与轴力  $F_N$  和弯矩  $M_x$  对应的正应力为  $\sigma_D$ ，与扭矩  $M_z$  和弯曲剪力  $F_{Sx}$  对应的切应力分别为  $\tau_1$  和  $\tau_2$ 。正应力  $\sigma_D$  是

$$\sigma_D = \frac{F_N}{bh} + \frac{M_x}{W_x} = \frac{F_N}{bh} + \frac{6M_x}{bh^2} = 86 \text{ MPa}$$

D 点因扭矩  $M_z$  引起的切应力  $\tau_1$  应按矩形截面积杆的扭转计算，并已于例 3.7 中

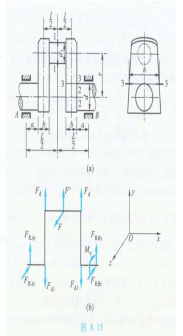
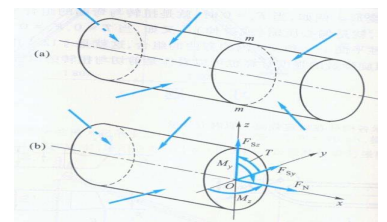
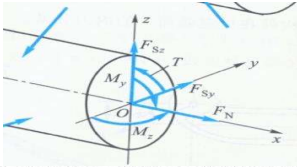


图 8.15

## § 9-5 普遍情况



$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_N, & \sum F_y &= F_{Sy}, & \sum F_z &= F_{Sz} \\ \sum M_x &= T, & \sum M_y &= M_y, & \sum M_z &= M_z \end{aligned}$$



在三个内力分量中,轴力  $F_N$  对应着拉伸(压缩)变形,与  $F_N$  相对应的正应力可按轴向拉伸(压缩)计算(参看第二章)。剪力  $F_{Sx}$  和  $F_{Sy}$  分别对应着  $x-y$  和  $x-z$  平面内的剪切变形,相应的切应力可按横力弯曲时切应力的计算公式计算(参看第五章)。在三个内力矩分量中,  $T$  为扭矩,对应着扭转变形,相应的切应力可按第三章的扭转理论计算。 $M_x$  和  $M_y$  为弯矩,分别对应着  $x-z$  和  $x-y$  平面内的弯曲变形,相应的弯曲正应力可按第五章的弯曲理论计算。

叠加上述内力和内力矩分量所对应的应力,即为组合变形的应力。其中与  $F_N$ 、 $M_x$  和  $M_y$  对应的是正应力,因正应力的方向都是轴向,可按代数相加。与  $F_{Sx}$ 、 $F_{Sy}$  和  $T$  对应的是切应力,因它们对应的切应力不在同一方向上,应按矢量相加。例如

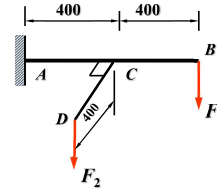
$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$$

例题10  $F_1=0.5\text{kN}, F_2=1\text{kN}, [\sigma]=160\text{MPa}$ .

(1) 用第三强度理论计算  $AB$  的直径

(2) 若  $AB$  杆的直径  $d=40\text{mm}$ ,并在  $B$  端加一水平力

$F_3=20\text{kN}$ , 校核  $AB$  杆的强度.



解:将  $F_2$  向  $AB$  杆的轴线简化得

$$F_2 = 1\text{kN}$$

$$M_c = 0.4\text{kN} \cdot \text{m}$$

$AB$  为弯扭组合变形

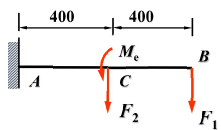
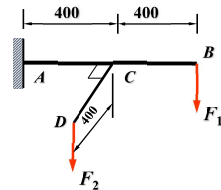
固定端截面是危险截面

$$M_{\max} = 0.8F_1 + 0.4F_2 = 0.8\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$T_{\max} = 0.4\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M_{\max}^2 + T_{\max}^2}}{W} \leq [\sigma]$$

$$d = 38.5\text{mm}$$



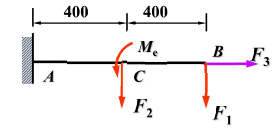
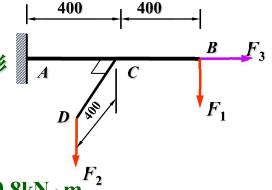
(2) 在  $B$  端加拉力  $F_3$

$AB$  为弯、扭与拉伸组合变形  
固定端截面是危险截面

$$M_{\max} = 0.8F_1 + 0.4F_2 = 0.8\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$T_{\max} = 0.4\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_N = F_3 = 20\text{kN}$$



固定端截面最大的正应力为

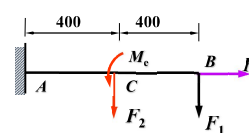
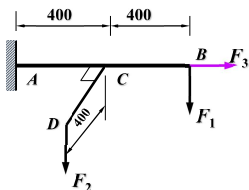
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_c} + \frac{F_N}{A} = 143\text{MPa}$$

最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} = 31.8\text{MPa}$$

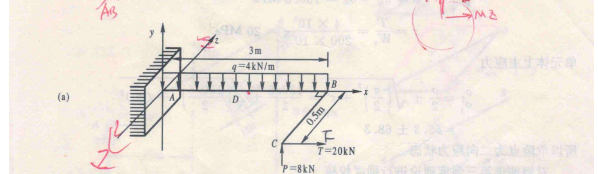
由第三强度理论

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 157\text{MPa} \leq [\sigma]$$



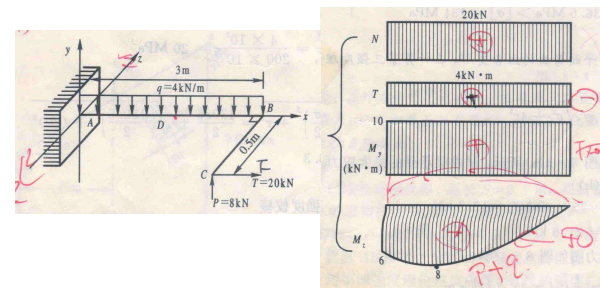
### 《辅导》p153

例 8-1 结构承载如图 8-3(a) 所示, 钢制圆杆的横截面面积  $A=80 \times 10^{-6} \text{m}^2$ , 抗扭截面系数  $W_t=200 \times 10^{-6} \text{m}^3$ , 抗弯截面系数  $W=100 \times 10^{-6} \text{m}^3$ , 材料的许用应力  $[\sigma]=134 \text{MPa}$ , 试分析杆危险点的应力情况, 并进行强度校核。

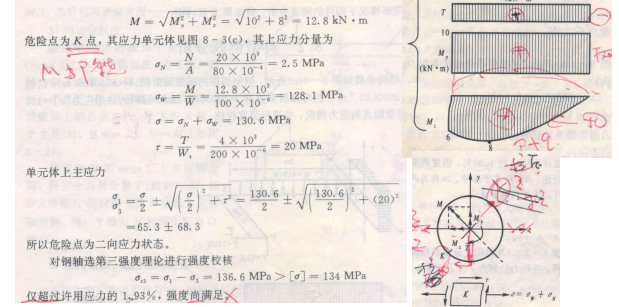




解：分析结构的受力情况，由内力图(图 8-3(b))可知，危险截面为 D，其上内力为  
 $N = 20 \text{ kN}$      $T = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$   
 $M_y = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$      $M_z = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$



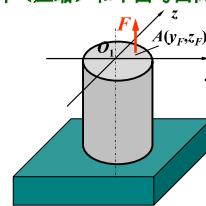
解：分析结构的受力情况，由内力图(图 8-3(b))可知，危险截面为 D，其上内力为  
 $N = 20 \text{ kN}$      $T = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$   
 $M_y = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$      $M_z = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$



## § 9-6 偏心拉(压) · 截面核心 (Eccentric loads & the kern of a section)

### 一、偏心拉(压) (Eccentric loads)

1. 定义 (Definition) 当外力作用线与杆的轴线平行但不重合时，将引起轴向拉伸(压缩)和平面弯曲两种基本变形。

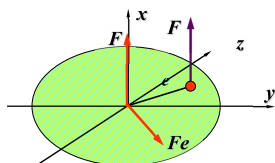
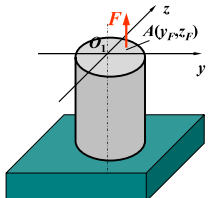


### 2. 以横截面具有两对称轴的等直杆承受偏心拉力 F 为例

(1) 将外力向截面形心简化,使每个力(或力偶)只产生一种基本变形形式

轴向拉力  $F$  力偶矩  $M = Fe$ ,

将  $M$  向  $y$  轴和  $z$  轴分解

$$\begin{cases} M_y = F e \sin \alpha = F z_F \\ M_z = F e \cos \alpha = F y_F \end{cases}$$


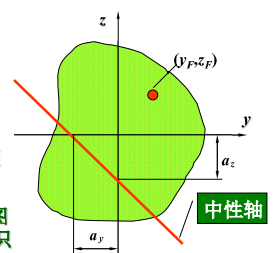
### 六、截面核心 (The kern of a section)

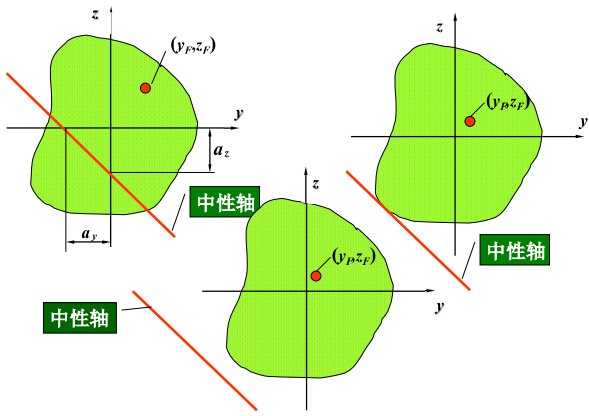
$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F} \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}$$

$(y_F, z_F)$  为外力作用点的坐标

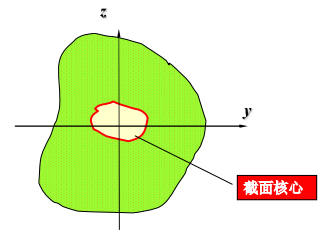
$a_y, a_z$  为中性轴在  $y$  轴和  $z$  轴上的截距

当中性轴与图形相切或远离图形时,整个图形上将只有拉应力或只有压应力





1. 定义 (Definition) 当外力作用点位于包括截面形心的一个区域内时, 就可以保证中性轴不穿过横截面 (整个截面上只有拉应力或压应力), 这个区域就称为 **截面核心** (the kern of a section)



## 第十一章 能量法 (Energy Methods)

- ▶ § 11-1 概述 (Introduction)
- ▶ § 11-2 互等定理 (Reciprocal theorems)
- ▶ § 11-3 卡氏定理 (Castigliano's Theorem)
- ▶ § 11-4 虚功原理
- ▶ § 11-5 单位荷载法 • 莫尔定理 (Unit-load method & Mohr's theorem)
- ▶ § 11-6 计算莫尔积分的图乘法 (The method of moment areas for Mohr's integration)

## § 13-1 概述 (Introduction)

### 一、能量方法 (Energy methods)

利用功能原理  $V_\varepsilon = W$  来求解可变形固体的位移, 变形和内力等的方法。

### 二、外力功 (Work of the external force)

固体在外力作用下变形, 引起力作用点沿力作用方向位移, 外力因此而做功, 则成为外力功。

### 三、变形能 (Strain energy)

在弹性范围内, 弹性体在外力作用下发生变形而在体内积蓄的能量, 称为弹性变形能, 简称变形能。

### 四、功能原理 (Work-energy principle)

可变形固体在受外力作用而变形时, 外力和内力均将做功。对于弹性体, 不考虑其他能量的损失, 外力在相应位移上作的功, 在数值上就等于积蓄在物体内的应变能。

The formula:

$$V_\varepsilon = W \quad (\text{Work-Energy Principle})$$

We will not consider other forms of energy such as thermal energy, chemical energy, and electromagnetic energy. Therefore, if the stresses in a body do not exceed the elastic limit, all of work done on a body by external forces is stored in the body as elastic strain energy.



### 五、杆件变形能的计算 (Calculation of strain energy for various types of loading)

#### 1. 轴向拉压的变形能 (Strain energy for axial loads)

当拉力为  $F_1$  时, 杆件的伸长为  $\Delta l_1$

当再增加一个  $dF_1$  时, 相应的变形增量为  $d(\Delta l_1)$

此外力功的增量为:

$$dW = F_1 d(\Delta l_1) \quad d(\Delta l_1) = \frac{dF_1 l}{EA}$$

当拉力为  $F_1$  时, 杆件的伸长为  $\Delta l_1$

当再增加一个  $dF_1$  时, 相应的变形增量为  $d(\Delta l_1)$

此外力功的增量为:

$$dW = F_1 d(\Delta l_1) \quad d(\Delta l_1) = \frac{dF_1 l}{EA}$$

积分得:  $W = \int dW = \int_0^F F_1 \frac{l}{EA} dF_1 = \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{F}{2} \Delta l$

根据功能原理

$V_\varepsilon = W$ , 可得以下变形能表达式

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} F_N \Delta l$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{F_N l}{EA}$$

$$V_\varepsilon = \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{F_N^2 l}{2EA}$$

当轴力或截面发生变化时:  $V_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \frac{F_{Ni}^2 l_i}{2E_i A_i}$

当轴力或截面连续变化时:  $V_\varepsilon = \int_0^l \frac{F_N^2(x) dx}{2EA(x)}$

比能 (strain energy density):  
单位体积的应变能, 记作  $v_\varepsilon$

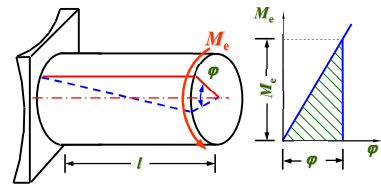
$$v_\varepsilon = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \frac{F\Delta l}{Al} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2} \quad (\text{单位 } \text{J/m}^3)$$

7

## 2. 扭转杆内的变形能 (Strain energy for torsional loads)



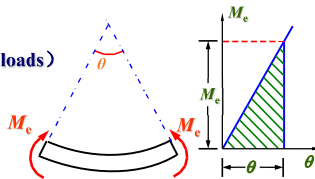
$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2} M_c \cdot \Delta\varphi = \frac{1}{2} M_c \frac{M_c l}{GI_p} = \frac{M_c^2 l}{2GI_p} = \frac{T^2 l}{2GI_p}$$

$$V_\varepsilon = \int \frac{T^2(x)}{2GI_p(x)} dx \quad \text{或} \quad V_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \frac{T_i^2 l_i}{2GI_{pi}}$$

8

## 3. 弯曲变形的变形能

(Strain energy for flexural loads)



- 纯弯曲 (pure bending)

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2} M_c \cdot \theta = \frac{1}{2} M_c \frac{M_c l}{EI} = \frac{M^2 l}{2EI}$$

- 横力弯曲 (nonuniform bending)

$$V_\varepsilon = \int \frac{M_c^2(x)}{2EI(x)} dx$$

9

- 横力弯曲 (nonuniform bending)

$$dV_\varepsilon = \frac{M^2(x) dx}{2EI} \quad V_\varepsilon = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI}$$

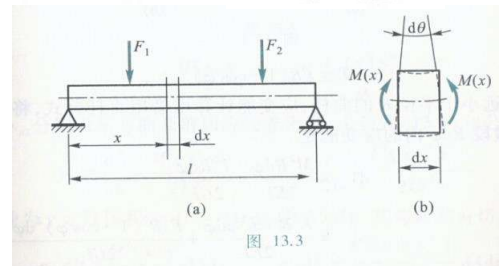


图 13.3

10

## 4. 纯剪切应力状态下的比能

假设单元体左侧固定, 因此变形后右侧将向下移动  $\gamma dx$ .

因为很小, 所以在变形过程中, 上下两面上的外力将不作功. 只有右侧面的外力 ( $\tau dydz$ ) 对相应的位移  $\gamma dx$  作了功.

当材料在线弹性范围内工作时, 上述力与位移成正比, 因此, 单元体上外力所作的功为

$$dW = \frac{1}{2} (\tau dydz) (\gamma dx) = \frac{1}{2} \tau \gamma (dx dy dz)$$

$$\text{比能为 } v_\varepsilon = \frac{dV_\varepsilon}{dV} = \frac{dW}{dV} = \frac{dW}{dx dy dz} = \frac{1}{2} \tau \gamma$$

11

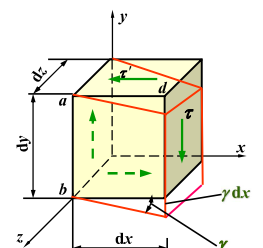
将  $\tau = G\gamma$  代入上式得  $v_\varepsilon = \frac{1}{2} \tau \gamma$

$$v_\varepsilon = \frac{G}{2} \gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G}$$

等直圆杆扭转时应变能的计算

$$V_\varepsilon = \int_V v_\varepsilon dV = \iiint_A v_\varepsilon dA dx$$

$$v_\varepsilon = \frac{G}{2} \gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G}$$



12

$$V_\varepsilon = \iint_A \frac{\tau^2}{2G} dA dx = \iint_A \frac{(\frac{T}{I_p} \rho)^2}{2G} dA dx$$

$$= \frac{l}{2G} (\frac{T}{I_p})^2 \int_A \rho^2 dA = \frac{T^2 l}{2GI_p}$$

$$V_\varepsilon = \frac{M_e^2 l}{2GI_p}$$

将  $\phi = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{M_e l}{GI_p}$  代入上式得  $V_\varepsilon = \frac{M_e^2}{2} \phi$

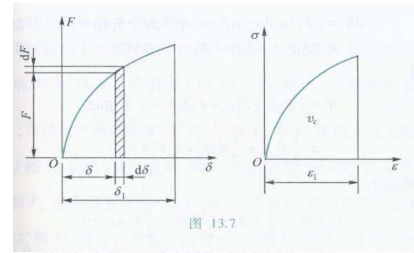
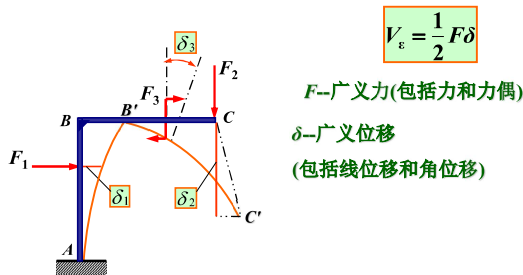


图 13.7

应变能和应变能密度分别是

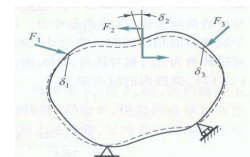
$$V_\varepsilon = W = \int_0^{\delta_1} F d\delta, \quad v_\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon$$



$F$ —广义力(包括力和力偶)  
 $\delta$ —广义位移  
 (包括线位移和角位移)

假设广义力按某一比例由零增至最后值, 对应的广义位移也由零增至最后值.

### 六、变形能的普遍表达式 (General formula for strain energy)



为了表明外力按相同的比例增加, 引进一个在 0 到 1 之间变化的参数  $\beta$ 。加载过程中, 各外力的中间值可表示为  $\beta F_1, \beta F_2, \beta F_3, \dots$ 。由于外力和位移之间是线性关系, 所以相应的位移是  $\beta \delta_1, \beta \delta_2, \beta \delta_3, \dots$ 。外力从零开始缓慢地增加到最终值,  $\beta$  从 0 变到 1。如给  $\beta$  一个增量  $d\beta$ , 位移  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$  的相应增量分别为  $\delta_1 d\beta, \delta_2 d\beta, \delta_3 d\beta, \dots$ 。外力  $\beta F_1, \beta F_2, \beta F_3, \dots$  在以上位移增量上作的功为

$$dW = \beta F_1 \cdot \delta_1 d\beta + \beta F_2 \cdot \delta_2 d\beta + \beta F_3 \cdot \delta_3 d\beta + \dots$$

$$= (F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 + F_3 \delta_3 + \dots) \beta d\beta \quad (a)$$

积分上式, 得

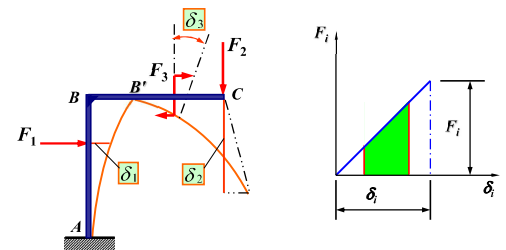
$$W = (F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 + F_3 \delta_3 + \dots) \int_0^1 \beta d\beta$$

$$= \frac{1}{2} F_1 \delta_1 + \frac{1}{2} F_2 \delta_2 + \frac{1}{2} F_3 \delta_3 + \dots$$

物体的应变能应为

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2} F_1 \delta_1 + \frac{1}{2} F_2 \delta_2 + \frac{1}{2} F_3 \delta_3 + \dots \quad (13.12)$$

这表示, 线弹性体的应变能等于每一外力与其相应位移乘积的二分之一的总和。这一结论也称为克拉贝依隆原理。



在整个加载过程中结构的变形能等于外力的功

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2} (F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 + F_3 \delta_3)$$

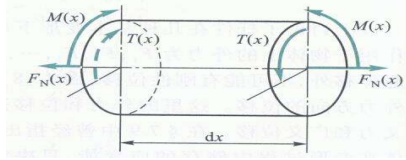
—— 克拉贝依隆原理 (只限于线性结构)



**组合变形的变形能 (Strain energy for combined loads)**

截面上存在几种内力,各个内力及相应的各个位移相互独立,力独立作用原理成立,各个内力只对其相应的位移做功。

$$V_\epsilon = \int \frac{F_N^2(x)}{2EA(x)} dx + \int \frac{T^2(x)}{2GI_p(x)} dx + \int \frac{M^2(x)}{2EI(x)} dx$$



**三、变形能的应用 (Application of strain energy)**

**1. 计算变形能 (Calculating strain energy)**

**2. 利用功能原理计算变形 (Work-energy principle for calculating deflection)**

**(Work-energy principle for calculating deflection)**

例 9-2 如图 9-2 所示,一杆受轴向拉伸,在  $P_1$  作用下,其变形能为  $U(P_1)$ ;在  $P_2$  作用下,其变形能为  $U(P_2)$ 。在  $P_1, P_2$  共同作用下变形能为  $U(P_1, P_2)$ ,且  $U(P_1, P_2) = U(P_1) + U(P_2)$ 。此结果是否正确?为什么?

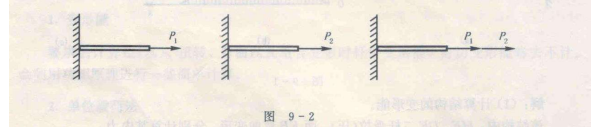


图 9-2

《辅导》p182

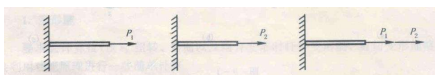


图 9-2

解:

$$U(P_1) = \frac{P_1^2 l}{2EA}$$

$$U(P_2) = \frac{P_2^2 l}{2EA}$$

$$U(P_1) + U(P_2) = \frac{(P_1^2 + P_2^2)l}{2EA}$$

$$U(P_1, P_2) = \frac{(P_1 + P_2)^2 l}{2EA} = \frac{(P_1^2 + P_2^2)l}{2EA} + \frac{P_1 P_2 l}{EA}$$

而故

$$U(P_1, P_2) \neq U(P_1) + U(P_2)$$

讨论:通过上例的分析计算,我们可以发现,由于变形能是载荷和变形量的二次函数,几个同一类力(在本例中是拉伸的轴力)作用下,其变形不是相互独立的,互相之间有耦合关系,故变形能不等于这几个力单独作用下变形能之和。

**例 13.1**

• 轴线为半圆的平面曲杆,作用于A端的集中力P垂直于轴线所在的平面。求P点垂直位移。

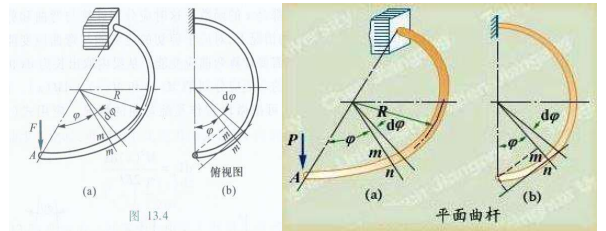


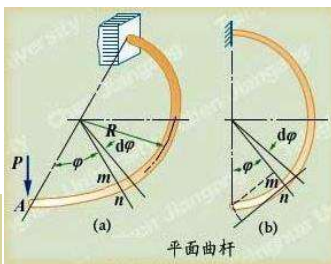
图 13.4

平面曲杆

**例 13.1 解**

$$\begin{cases} M = PR \sin \varphi \\ T = PR(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

$$dU = \frac{M^2 R d\varphi}{2EI} + \frac{T^2 R d\varphi}{2GI_p}$$



平面曲杆

$$W = \frac{1}{2} P \delta_A$$

由功能原理,  $U = W$ 得

$$\frac{1}{2} P \delta_A = \frac{P^2 R^3 \pi}{4EI} + \frac{3P^2 R^3 \pi}{4GI_p}$$

$$\delta_A = \frac{PR^3 \pi}{2EI} + \frac{3PR^3 \pi}{2GI_p}$$

$$\begin{aligned} U &= \int dU = \int_0^\pi \frac{P^2 R^2 \sin^2 \varphi}{2EI} d\varphi + \int_0^\pi \frac{P^2 R^2 (1 - \cos \varphi)^2}{2GI_p} d\varphi \\ &= \frac{P^2 R^3 \pi}{4EI} + \frac{3P^2 R^3 \pi}{4GI_p} \end{aligned}$$

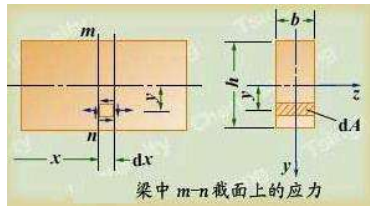


例13.2

比较横力弯曲时的弯曲  
变形能和剪切变形能

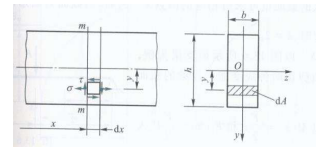
$$\sigma = \frac{M(x)}{I} y,$$

$$\tau = \frac{Q(x)s_x^*}{Ib}$$



例13.2 解

$$u_1 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{M^2(x)y^2}{2EI^2}$$



$$U_1 = \int_V u_1 dV = \int_i \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA dx$$

$$U_1 = \int_i \frac{M^2(x) dx}{2EI}$$

$$u_2 = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{Q^2(x)(s_x^*)^2}{2GI^2 b^2}$$

$$U_2 = \int_V u_2 dV = \int_i \int_A \frac{Q^2 (s_x^*)^2}{2GI^2 b^2} dA dx = \int_i \left[ \frac{Q^2}{2GI^2} \int_A \frac{(s_x^*)^2}{b^2} dA \right] dx$$

$$\Rightarrow k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{(s_x^*)^2}{b^2} dA$$

$$U_2 = \int_i \frac{kQ^2(x) dx}{2GA}$$

$k$  是无量纲的量，仅与截面形状有关！

矩形截面

$$k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{(s_x^*)^2}{b^2} dA = \frac{144}{bh^3} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{4} (h^2 - y^2) b dy = \frac{6}{5}$$

圆形截面

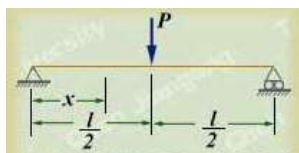
$$k = \frac{10}{9}$$

薄壁圆管

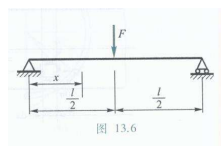
$$k=2$$

例13.3

两种变形能的比较



$$M(x) = \frac{P}{2} x, \quad Q(x) = \frac{P}{2}$$



$$U_1 = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2EI} \left( \frac{P}{2} x \right)^2 dx = \frac{P^2 l^3}{96EI}$$

$$U_2 = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{k}{2GA} \left( \frac{P}{2} \right)^2 dx = \frac{kP^2 l}{8GA}$$

两种变形能之比

$$U_2 : U_1 = \frac{12EI k}{GA l^2}$$

矩形截面梁

$$k=6/5 \quad I/A=h^2/12$$

所以  $U_2 : U_1 = \frac{12}{5} (1+\mu) \left( \frac{h}{l} \right)^2$

$$U_2:U_1 = \frac{12}{5}(1+\mu)\left(\frac{h}{l}\right)^2$$

若 $\mu=0.3$ ,  $h/l=1/5$ , 则

$$U_2:U_1 = 0.125$$

若 $\mu=0.3$ ,  $h/l=1/10$ , 则

$$U_2:U_1 = 0.0312$$

所以, 剪切变形能通常可以忽略

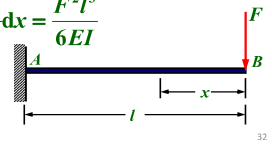
例题1 试求图示悬臂梁的变形能, 并利用功能原理求自由端B的挠度.

解:  $M(x) = -F \cdot x$

$$V_\epsilon = \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \int_0^l \frac{(Fx)^2}{2EI} dx = \frac{F^2 l^3}{6EI}$$

$$W = \frac{1}{2} F \cdot w_B \quad \text{由 } V_\epsilon = W \text{ 得}$$

$$w_B = \frac{Fl^3}{3EI}$$



例题2 试求图示梁的变形能, 并利用功能原理求C截面的挠度.

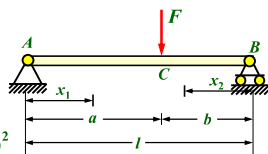
解:

$$V_\epsilon = \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

$$= \int_0^a \frac{\left(\frac{Fb}{l}x_1\right)^2}{2EI} dx_1 + \int_0^b \frac{\left(\frac{Fa}{l}x_2\right)^2}{2EI} dx_2$$

$$= \frac{F^2 b^2 a^3}{2EI^2 \cdot 3} + \frac{F^2 a^2 b^3}{2EI^2 \cdot 3} = \frac{F^2 a^2 b^2}{6EI}$$

$$W = \frac{1}{2} F \cdot w_C \quad \text{由 } V_\epsilon = W \text{ 得 } w_C = \frac{Fa^2 b^2}{3EI}$$



例题3 试求图示四分之一圆曲杆的变形能, 并利用功能原理求B截面的垂直位移. 已知EI为常量.

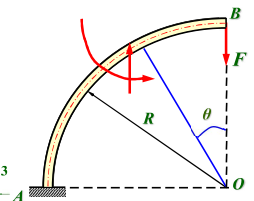
解:  $M(\theta) = FR \sin \theta$

$$V_\epsilon = \int_l \frac{M^2(\theta)}{2EI} R d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(FR \sin \theta)^2}{2EI} R d\theta = \frac{\pi F^2 R^3}{8EI}$$

$$W = \frac{1}{2} F \cdot \delta_y$$

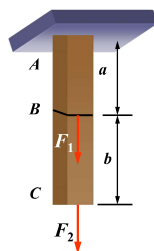
$$\text{由 } V_\epsilon = W \text{ 得 } \delta_y = \frac{\pi FR^3}{4EI}$$



例题4 拉杆在线弹性范围内工作. 抗拉刚度EI, 受到 $F_1$ 和 $F_2$ 两个力作用.

- (1) 若先在B截面加 $F_1$ , 然后在C截面加 $F_2$ ;
- (2) 若先在C截面加 $F_2$ , 然后在B截面加 $F_1$ .

分别计算两种加力方法拉杆的应变能.



(1) 先在B截面加 $F_1$ , 然后在C截面加 $F_2$

(a) 在B截面加 $F_1$ , B截面的位移为

$$\delta_{B1} = \frac{F_1 a}{EA}$$

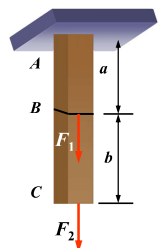
外力功为

$$W_1 = \frac{1}{2} F_1 \delta_{B1} = \frac{F_1^2 a}{2EA}$$

(b) 再在C上加 $F_2$

$$\text{C截面的位移为 } \delta_{C2} = \frac{F_2(a+b)}{EA}$$

$$F_2 \text{ 功为 } W_2 = \frac{1}{2} F_2 \delta_{C2} = \frac{F_2^2(a+b)}{2EA}$$



(c) 在加  $F_2$  后, B 截面又有位移

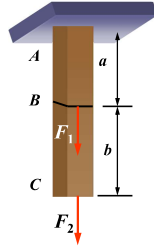
$$\delta_{B2} = \frac{F_2 a}{EA}$$

在加  $F_2$  过程中  $F_1$  作功 (常力作功)

$$W_3 = F_1 \delta_{B2} = \frac{F_1 F_2 a}{EA}$$

所以应变能为

$$\begin{aligned} V_\varepsilon = W &= \frac{1}{2} F_1 \delta_{B1} + \frac{1}{2} F_2 \delta_{C2} + F_1 \delta_{B2} \\ &= \frac{F_1^2 a}{2EA} + \frac{F_2^2 (a+b)}{2EA} + \frac{F_1 F_2 a}{EA} \end{aligned}$$



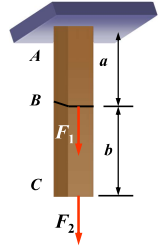
(2) 若先在 C 截面加  $F_2$ , 然后 B 截面加  $F_1$ .

(a) 在 C 截面加  $F_2$  后,  $F_2$  作功

$$\frac{F_2^2 (a+b)}{2EA}$$

(b) 在 B 截面加  $F_1$  后,  $F_1$  作功

$$\frac{F_1^2 a}{2EA}$$



(c) 加  $F_1$  引起 C 截面的位移

$$\frac{F_1 a}{EA}$$

在加  $F_1$  过程中  $F_2$  作功 (常力作功)

$$\frac{F_1 F_2 a}{EA}$$

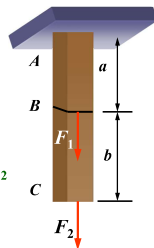
所以应变能为

$$\begin{aligned} V_\varepsilon = W &= \frac{1}{2} F_1 \delta_{B1} + \frac{1}{2} F_2 \delta_{C2} + F_1 \delta_{B2} \\ &= \frac{F_1^2 a}{2EA} + \frac{F_2^2 (a+b)}{2EA} + \frac{F_1 F_2 a}{EA} \end{aligned}$$

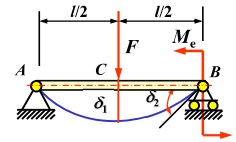
注意:

(1) 计算外力作功时, 注意变力作功与常力作功的区别.

(2) 应变能  $V_\varepsilon$  只与外力的最终值有关, 而与加载过程和加载次序无关.



例5 以弯曲变形为例证明  
应变能  $V_\varepsilon$  只与外力的最  
终值有关, 而与加载过程  
和加载次序无关.



解: 梁中点的挠度为:  $\delta_1 = \frac{Fl^3}{48EI} + \frac{M_c l^2}{16EI}$

梁右端的转角为:  $\delta_2 = \theta = \frac{Fl^2}{16EI} + \frac{M_c l}{3EI}$

梁的变形能为:

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2} F \delta_1 + \frac{1}{2} M_c \delta_2 = \frac{1}{EI} \left( \frac{F^2 l^3}{96} + \frac{M_c^2 l}{6} + \frac{M_c F l^2}{16} \right)$$

先加力  $F$  后, 再加力偶  $M_c$ .

(1) 先加力  $F$  后, C 点的位移

$$\delta_1 = \frac{Fl^3}{48EI}$$

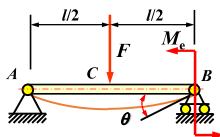
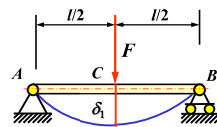
力  $F$  所作的功为

$$W = \frac{1}{2} F \delta_1 = \frac{1}{2} F \cdot \frac{Fl^3}{48EI}$$

(2) 力偶由零增至最后值  $M_c$

B 截面的转角为  $\theta = \frac{M_c l}{3EI}$

力偶  $M_c$  所作的功为  $W_2 = \frac{1}{2} M_c \theta = \frac{1}{2} M_c \cdot \frac{M_c l}{3EI}$



C 截面的位移为

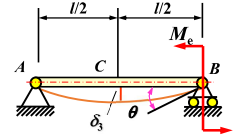
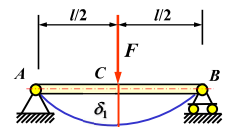
$$\delta_3 = \frac{M_c l^2}{16EI}$$

先加上的力  $F$  所作的功为

$$W_3 = F \delta_3 = F \cdot \frac{M_c l^2}{16EI}$$

$F$  与力偶  $M_c$  所作的功为

$$\begin{aligned} V_\varepsilon &= \frac{1}{2} F \cdot \frac{Fl^3}{48EI} + F \cdot \frac{M_c l^2}{16EI} \\ &\quad + \frac{1}{2} M_c \cdot \frac{M_c l}{3EI} \end{aligned}$$



## § 11-2 互等定理 (Reciprocal Theorems)

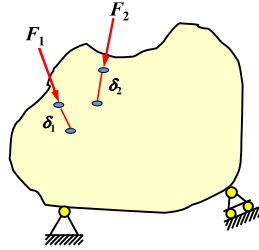
### 一、功的互等定理 (Reciprocal work theorem)

(1) 设在线弹性结构上作用力

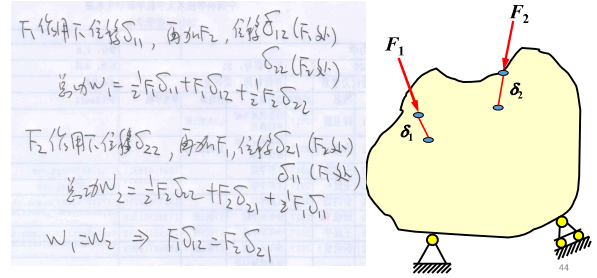
$$F_1, F_2$$

两力作用点沿力作用方向的位移分别为

$$\delta_1, \delta_2$$



43



**功的互等定理 (reciprocal work theorem):** 第一组力在第二组力引起的位移上所作的功, 等于第二组力在第一组力引起的位移上所作的功。

### 二、位移互等定理 (Reciprocal displacement theorem)

若第一组力  $F_1$ , 第二组力只有  $F_2$ ,

如果  $F_1 = F_2$ , 则有

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

**位移互等定理 (reciprocal displacement theorem):**

$F_1$  作用点沿  $F_1$  方向因作用  $F_2$  而引起的位移等于  $F_2$  作用点沿  $F_2$  方向因作用  $F_1$  而引起的位移。(The deflection at A due to a load acting at B is equal to the deflection at B due to the same load acting at A)

45

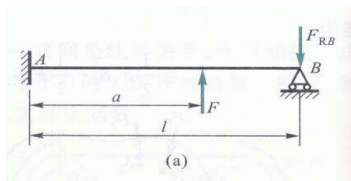
### 三、注意 (Notice)

- (1) 力和位移都应理解为广义的。
- (2) 这里是指结构不可能发生刚性位移的情况下, 只是由变形引起的位移。



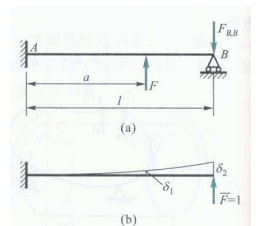
46

例 13.4 装有尾顶针的车削工件可简化成超静定梁 (§ 6.5) 如图 13.11a 所示, 试利用互等定理求解支座 B 的约束力。



解: 解除支座 B, 把工件看作是悬臂梁。把工件上作用的切削力 F 和尾顶针反力  $F_{RB}$  作为第一组力。然后, 设想在同一悬臂梁的右端作用  $\bar{F} = 1$  的单位力 (图 13.11b), 并作为第二组力。在  $\bar{F} = 1$  作用下, 不难求出 F 及  $F_{RB}$  作用点的相应位移分别为

$$\delta_1 = \frac{a^2}{6EI}(3l-a), \quad \delta_2 = \frac{l^3}{3EI}$$



第一组力在第二组力引起的位移上所作的功应为

$$F\delta_1 - F_{RB}\delta_2 = \frac{Fa^2}{6EI}(3l-a) - \frac{F_{RB}l^3}{3EI}$$

47

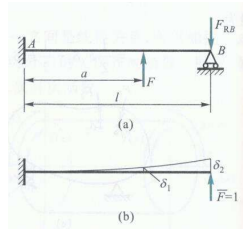
48

在第一组力作用下(图 13.11a),由于右端  $B$  实际上是铰支座,它沿  $\bar{F}=1$  方向的位移应等于零,故第二组力在第一组力引起的位移上所作的功等于零。于是由功的互等定理,

$$\frac{F a^2}{6EI}(3l-a) - \frac{F_{RB} l^3}{3EI} = 0$$

由此解出

$$F_{RB} = \frac{F a^2}{2 l^3}(3l-a)$$



49

### 《力学小问题》p168

155. 等截面圆直杆,已知杆材料弹性常数为  $E, \mu$ , 在杆中央截面沿径向作用均匀压力  $q$ , 如图 155 所示。求杆沿  $x$  方向的伸长  $\Delta l$ 。(陆才善, 西安交大材力教研室。原第 196 题, 1990, No. 5.)

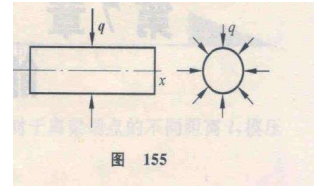
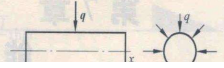


图 155

155. 等截面圆直杆,已知杆材料弹性常数为  $E, \mu$ , 在杆中央截面沿径向作用均匀压力  $q$ , 如图 155 所示。求杆沿  $x$  方向的伸长  $\Delta l$ 。(陆才善, 西安交大材力教研室。原第 196 题, 1990, No. 5.)

解: 在杆的两端假想地加轴向拉力  $P$ 。由于  $P$  引起的径向应变(也就是  $q$  作用截面直径  $d$  的应变)为

$$\frac{\Delta d}{d} = \mu \frac{AP}{\pi d^2 E}$$

由功的互等定理,得

$$P \cdot \Delta l = \int_0^{nd} q ds (\Delta d/2) = (q\pi d/2) \Delta d$$

由以上两式求得在  $q$  作用下杆沿轴向的伸长为

$$\Delta l = 2\mu q l / E$$

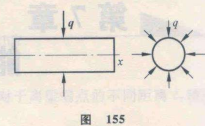


图 155

51

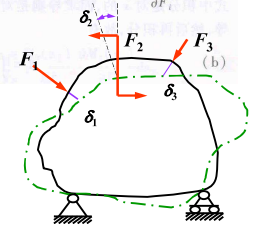
## § 11-3 卡氏定理(Castigliano's Theorem)

设弹性结构在支座约束下无任何刚性位移,  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$  为作用于结构上的外力, 沿诸力作用方向的位移分别为  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots$  (参看图 13.8)。结构因外力作用而储存的应变能  $V_e$  等于外力作功, 它应为  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$  的函数, 即

$$V_e = V_e(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots) \quad (a)$$

如这些外力中的任一个  $F_i$  有一增量  $dF_i$ , 则应变能的增量为  $\Delta V_e = \frac{\partial V_e}{\partial F_i} dF_i$ 。于是结构的应变能成为

$$V_e + \frac{\partial V_e}{\partial F_i} dF_i$$



52

若把力的作用次序改变为先加  $dF_i$ , 然后再作用  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$ 。先作用  $dF_i$  时, 其作用点沿  $dF_i$  方向的位移为  $d\delta_i$ , 应变能为  $\frac{1}{2} dF_i d\delta_i$ 。再作用  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$  时, 虽然结构上事先已有  $dF_i$  存在, 但对线性弹性结构来说,  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$  引起的位移仍然与未曾作用过  $dF_i$  一样, 因而这些力作的功亦即应变能, 仍然等于未曾作用  $dF_i$  时的  $V_e$ 。在作用  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$  的过程中, 在  $F_i$  的方向(亦即  $dF_i$  的方向)发生了位移  $\delta_i$ , 于是  $dF_i$  在位移  $\delta_i$  上完成的功为  $\delta_i dF_i$ 。这样, 按现在的加力次序, 结构的应变能应为

$$\frac{1}{2} dF_i d\delta_i + V_e + \delta_i dF_i \quad (c)$$

因应变能与加力次序无关, 式(b), 式(c)两式应该相等, 故

$$\frac{1}{2} dF_i d\delta_i + V_e + \delta_i dF_i = V_e + \frac{\partial V_e}{\partial F_i} dF_i$$

省略二阶微量  $\frac{1}{2} dF_i d\delta_i$ , 由上式得出

$$\delta_i = \frac{\partial V_e(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots)}{\partial F_i} \quad (13.15)$$

可见, 若将结构的应变能表示为载荷  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$  的函数, 则应变能对任一载荷  $F_i$  的偏导数, 等于  $F_i$  作用点沿  $F_i$  方向的位移  $\delta_i$ 。这便是卡氏第二定理。

53

54

相似地,可以把应变能写成是位移  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots$  的函数,则应变能对任一位移  $\delta_i$  的偏导数,等于该位移方向上作用的载荷  $F_i$ ,这就是卡氏第一定理①。

$$F_i = \frac{\partial V_\varepsilon(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots)}{\partial \delta_i} \quad (13.16)$$

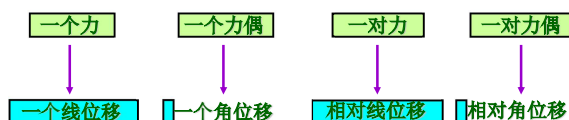
卡氏第一和第二定理中的力和位移都是广义的。特别指出,卡氏第一定理适用于线性和非线性的弹性结构,但是卡氏第二定理仅适用于线性弹性结构。

说明 (Directions):

(1) 卡氏第二定理只适用于线性弹性体

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i}$$

(2)  $F_i$  为广义力,  $\delta_i$  为相应的位移



55

56

(3) 卡氏第二定理的应用

(a) 轴向拉伸与压缩

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \int \frac{F_N^2(x) dx}{2EA} = \int \frac{F_N(x)}{EA} \cdot \frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i} dx$$

(b) 扭转

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \int \frac{T^2(x) dx}{2GI_p} = \int \frac{T(x)}{GI_p} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F_i} dx$$

(c) 弯曲

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \int \frac{M^2(x) dx}{2EI} = \int \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F_i} dx$$

57

(4) 平面桁架

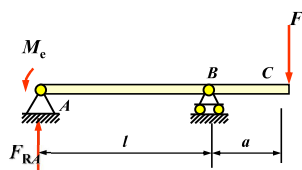
$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^n \frac{F_{Nj} l_j}{EA} \cdot \frac{\partial F_{Nj}}{\partial F_i}$$

(5) 组合变形

$$\begin{aligned} \delta_i &= \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \left[ \int \frac{F_N^2(x) dx}{2EA} + \int \frac{T^2(x) dx}{2GI_p} + \int \frac{M^2(x) dx}{2EI} \right] \\ &= \int \frac{F_N(x)}{EA} \cdot \frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i} dx + \int \frac{T(x)}{GI_p} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F_i} dx + \int \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F_i} dx \end{aligned}$$

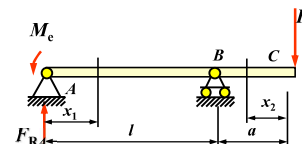
58

例题14 外伸梁受力如图所示,已知弹性模量  $EI$ ,梁材料为线弹性体.求梁C截面的挠度和A截面的转角.



解:

$$F_{RA} = \frac{M_c}{l} - \frac{Fa}{l}$$



$$AB: M_1(x_1) = \left( \frac{M_c}{l} - \frac{Fa}{l} \right) x_1 - M_c$$

$$\frac{\partial M_1(x_1)}{\partial F} = -\frac{a}{l} x_1 \quad \frac{\partial M_1(x_1)}{\partial M_c} = \frac{x_1}{l} - 1$$

$$BC: M_2(x_2) = -Fx_2$$

$$\frac{\partial M_2(x_2)}{\partial F} = -x_2 \quad \frac{\partial M_2(x_2)}{\partial M_c} = 0$$

59

60

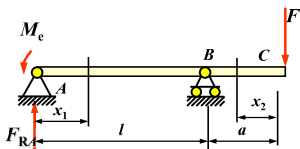


$$w_C = \int_0^l \frac{M_1(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M_1(x)}{\partial F} dx_1 + \int_0^a \frac{M_2(x_2)}{EI} \cdot \frac{\partial M_2(x_2)}{\partial F} dx_2$$

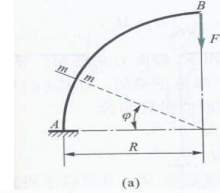
$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{Fl^2}{3} + \frac{M_c la}{6} + \frac{Fa^3}{3} \right) \quad (\downarrow)$$

$$\theta_A = \int_0^l \frac{M_1(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M_1(x)}{\partial M_c} dx_1 + \int_0^a \frac{M_2(x_2)}{EI} \cdot \frac{\partial M_2(x_2)}{\partial M_c} dx_2$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{M_c l}{3} + \frac{Fla}{6} \right) \quad (\curvearrowright)$$



例 13.7 轴线为四分之一圆周的平面曲杆(图 13.14a),  $EI$  为常量。曲杆 A 端固定, 自由端 B 上作用铅垂集中力  $F$ 。求 B 点的铅垂和水平位移。



$$M = FR \cos \varphi, \quad \frac{\partial M}{\partial F} = R \cos \varphi$$

式(13.17),

$$\delta_y = \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} ds = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} FR \cos \varphi \cdot R \cos \varphi \cdot R d\varphi = \frac{\pi FR^3}{4EI}$$

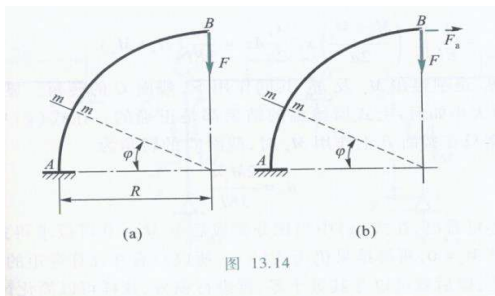
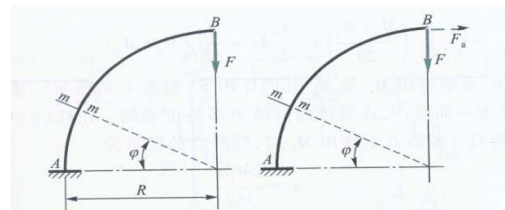


图 13.14

无中生有

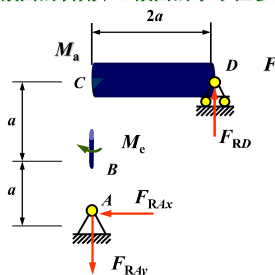


$$M = FR \cos \varphi + F_a R (1 - \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial M}{\partial F_a} = R (1 - \sin \varphi)$$

$$\delta_x = \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_a} ds \right]_{F_a=0} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} FR \cos \varphi \cdot R (1 - \sin \varphi) R d\varphi = \frac{FR^3}{2EI}$$

例题15 刚架结构如图所示, 弹性模量  $EI$  已知。材料为线弹性, 不考虑轴力和剪力的影响, 计算 C 截面的转角和 D 截面的水平位移。



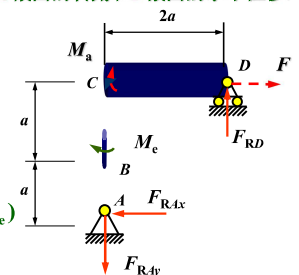
例题15 刚架结构如图所示, 弹性模量  $EI$  已知。材料为线弹性, 不考虑轴力和剪力的影响, 计算 C 截面的转角和 D 截面的水平位移。

解: 在 C 截面虚设一力偶  $M_a$ ,  
在 D 截面虚设一水平力  $F$ 。

$$F_{RD} = F_{R4y}$$

$$= F + \frac{1}{2a} (M_a + M_c)$$

$$F_{R4x} = F$$



$CD: M(x) = [F + \frac{1}{2a}(M_c + M_a)]x$   
 $\frac{\partial M(x)}{\partial F} = x \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M_a} = \frac{x}{2a}$   
 $CB: M(x) = [F + \frac{1}{2a}(M_c + M_a)] \cdot 2a - M_a - Fx$   
 $\frac{\partial M(x)}{\partial F} = 2a - x \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M_a} = 0$   
 $AB: M(x) = Fx \quad \frac{\partial M(x)}{\partial F} = x \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M_a} = 0$

67

$\delta_x = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F} \Big|_{M_a=0, F=0} = \frac{1}{EI} \int_0^{2a} \frac{M_c x}{2a} \cdot x dx + \frac{1}{EI} \int_0^a M_c \cdot (2a - x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^a 0 \cdot x dx = \frac{17M_c a^2}{6EI} (\rightarrow)$   
 $\theta_C = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial M_a} \Big|_{M_a=0, F=0} = \frac{1}{EI} [\int_0^{2a} \frac{M_c x}{2a} \cdot \frac{x}{2a} dx + \int_0^a M_c \cdot 0 dx + \int_0^a 0 \cdot 0 dx] = \frac{2M_c a}{3EI} (\curvearrowright)$

68

例 13.6 图 13.13a 所示刚架的  $EI$  为常量, 在截面  $B$  上受偶矩  $M_e$  作用。试求截面  $C$  的转角  $\theta_c$  及  $D$  点的水平位移  $\delta_x$ 。轴力和剪力对变形的影响可以略去不计。

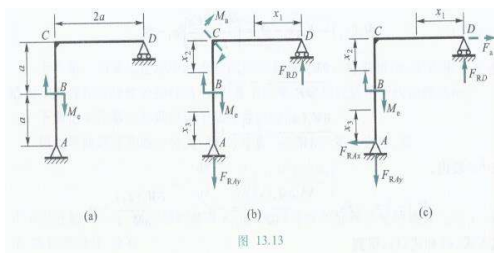
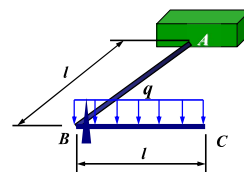


图 13.13

69

例题 16 圆截面杆  $ABC$ , ( $\angle ABC=90^\circ$ ) 位于水平平面内, 已知杆截面直径  $d$  及材料的弹性常数  $E, G$ . 求  $C$  截面处的铅垂位移. 不计剪力的影响。



70

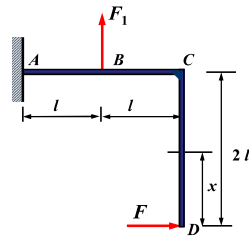
$BC: \text{弯曲变形} \quad M(x) = -Fx - \frac{qx^2}{2} \quad \frac{\partial M(x)}{\partial F} = -x$   
 $AB: \text{弯曲与扭转的组合变形}$   
 $Q = F + ql \quad (\text{弯曲变形}) \quad M(x) = Qx = (F + ql)x \quad \frac{\partial M(x)}{\partial F} = x$   
 $M_B = Fl + \frac{ql^2}{2} \quad (\text{扭转变形}) \quad T(x) = M_B = Fl + \frac{ql^2}{2} \quad \frac{\partial T(x)}{\partial F} = l$

71

$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F} \Big|_{F=0}$   
 $= \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx + \left\{ \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx + \frac{T(x)}{GI_p} \frac{\partial T(x)}{\partial F} dx \right\}$   
 $= \frac{1}{EI} \int_0^l (-\frac{qx^2}{2})(-x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^l qlx \cdot x dx + \frac{1}{GI_p} \int_0^l \frac{ql^2}{2} \cdot l dx$   
 $= \frac{11ql^4}{24EI} + \frac{ql^4}{GI_p} (\downarrow)$   
 $I = \frac{\pi d^4}{64} \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32}$

72

例题17 图示刚架各段的抗弯刚度均为  $EI$ . 不计轴力和剪力的影响. 用卡氏第二定理求截面  $D$  的水平位移  $\Delta_D$  和转角  $\theta_D$ .



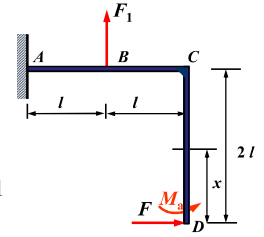
例题17 图示刚架各段的抗弯刚度均为  $EI$ . 不计轴力和剪力的影响. 用卡氏第二定理求截面  $D$  的水平位移  $\Delta_D$  和转角  $\theta_D$ .

解: 在  $D$  点虚设一力偶矩  $M_a$

CD: 弯曲变形

$$M(x) = Fx + M_a$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial F} = x \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M_a} = 1$$



将力  $F$  向  $C$  简化得:

力  $F$  (产生拉伸变形)

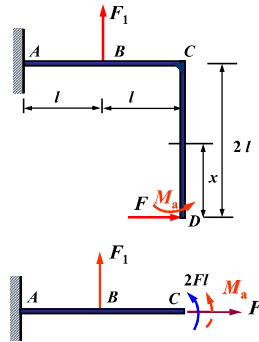
力偶矩  $2Fl$  (产生弯曲变形)

将  $M_a$  向  $C$  简化得:

$M_a$  (产生弯曲变形)

$AC$  产生拉伸与弯曲的组合变形. 横截面上的内力有轴力和弯矩.

但是轴力不计, 因此横截面上的内力只计弯矩.



BC段:  $M(x) = 2Fl + M_a$

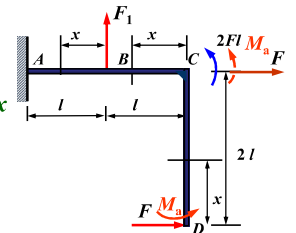
$$\frac{\partial M(x)}{\partial F} = 2l \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M_a} = 1$$

BA段:  $M(x) = 2Fl + M_a + F_1x$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial F} = 2l \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M_a} = 1$$

$$\theta_D = \frac{\partial V_e}{\partial M_a} \Big|_{M_a=0} = \frac{1}{EI} \int_0^{2l} Fx \cdot 1 dx +$$

$$\frac{1}{EI} \left[ \int_0^l 2Fl \cdot 1 dx + \int_0^l (2Fl + F_1x) \cdot 1 dx \right] = \frac{13Fl^2}{2EI}$$



例 13.9 图 13.15a 所示为由两根完全相同的非线性弹性杆铰接而成的结构, 在节点  $C$  作用一铅垂力  $F$ . 若两杆的长度均为  $l$ , 横截面积均为  $A$ . 材料在单轴拉伸时的应力-应变关系为  $\sigma = Ke^{1/n}$  ( $n > 1$ ), 其中  $K$  为常数, 曲线如图 13.15b 所示. 试求节点  $C$  的铅垂位移  $\delta$ .

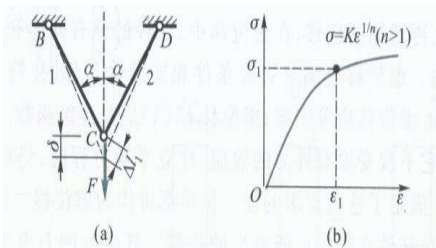


图 13.15

解: 节点  $C$  的铅垂位移  $\delta$  与两杆的伸长关系为

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \delta \cos \alpha$$

由于两杆都是均匀变形, 则两杆的纵向线应变为

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\Delta l_1}{l} = \frac{\delta}{l} \cos \alpha$$

两杆的应变能密度为

$$v_{e1} = v_{e2} = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_1} Ke^{1/n} d\varepsilon = \frac{n}{n+1} K (\varepsilon_1)^{\frac{n+1}{n}}$$

结构的应变能

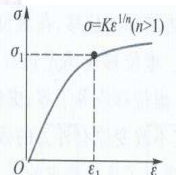
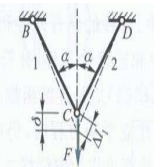
$$V_e = 2 \times v_{e1} \times Al = 2Al \frac{n}{n+1} K \left( \frac{\delta}{l} \cos \alpha \right)^{\frac{n+1}{n}}$$

由卡氏第一定理, 有

$$\frac{\partial V_e}{\partial \delta} = F$$

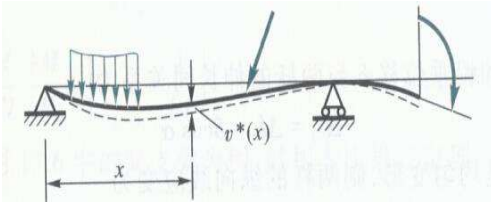
将式(i)代入式(j), 完成求导并化简得

$$\delta = \frac{1}{2^n} \left( \frac{F}{AK} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{l}{\cos^{\frac{n+1}{n}} \alpha}$$



## § 11-4 虚功原理

### 一、虚功原理 (Principle of virtual work)



$$F_1 v_1^* + F_2 v_2^* + F_3 v_3^* + \dots + \int_l q(x) v^*(x) dx + \dots$$

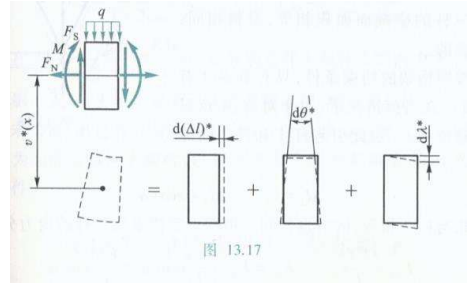


图 13.17

$$dW = F_N d(\Delta l)^* + Md\theta^* + F_S d\lambda^*$$

$$W = \int F_N d(\Delta l)^* + \int Md\theta^* + \int F_S d\lambda^*$$

$$F_1 v_1^* + F_2 v_2^* + F_3 v_3^* + \dots + \int_l q(x) v^*(x) dx + \dots$$

$$= \int F_N d(\Delta l)^* + \int Md\theta^* + \int F_S d\lambda^*$$

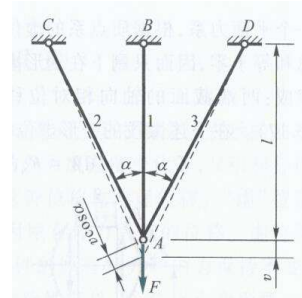
$$F_1 v_1^* + F_2 v_2^* + \dots + \int_l q(x) v^*(x) dx + \dots + M_{e1} \varphi_1^* + M_{e2} \varphi_2^*$$

$$= \int F_N d(\Delta l)^* + \int Md\theta^* + \int F_S d\lambda^* + \int Td\varphi^*$$

上式表明,在虚位移中,外力所作虚功等于内力在相应虚变形上所作虚功。这就是虚功原理。也可把上式右边看作是相应于虚位移的应变能。这样,虚功原理表明,在虚位移中,外力虚功等于杆件的虚应变能。

在导出虚功原理时,并未使用应力-应变关系,故虚功原理与材料的性能无关,它可用于线弹性材料,也可用于非线性弹性材料。虚功原理并不要求力与位移的关系一定是线性的,故可用于力与位移成非线性关系。

例 13.10 试求图 13.18 所示桁架各杆的内力。设三杆的横截面面积相等,材料相同,且是线弹性的。



$$\Delta l_1 = v, \quad \Delta l_2 = v \cos \alpha$$

杆 2 相等,内力也相同。由胡克定律求出三杆的内力

$$F_{N1} = \frac{EA}{l} v, \quad F_{N2} = F_{N3} = \frac{EA}{l_2} v \cos \alpha = \frac{EA}{l} v \cos^2 \alpha$$

$$\int_l F_{N1} d(\Delta l_1)^* = F_{N1} \int_l d(\Delta l_1)^* = F_{N1} (\Delta l_1)^* = \frac{EA}{l} v \delta v$$

杆 2 和杆 3 的内力虚功同为

$$F_{N2} (\Delta l_2)^* = \frac{EA}{l} v \cos^3 \alpha \cdot \delta v$$

内力虚功为

$$F_{N1} (\Delta l_1)^* + 2F_{N2} (\Delta l_2)^* = \frac{EA}{l} (1 + 2\cos^3 \alpha) \delta v$$

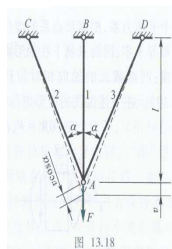


图 13.18

由虚功原理,内力虚功应等于外力虚功,即

$$\frac{EA}{l} (1 + 2\cos^3 \alpha) \delta v = F \delta v$$

消去  $\delta v$ , 可将上式写成

$$\frac{EA}{l} (1 + 2\cos^3 \alpha) - F = 0$$

$$v = \frac{Fl}{EA(1 + 2\cos^3 \alpha)}$$

可求出

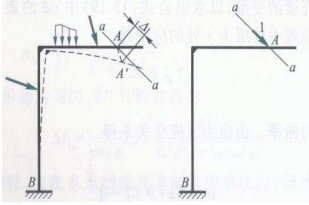
$$F_{N1} = \frac{F}{1 + 2\cos^3 \alpha}, \quad F_{N2} = F_{N3} = \frac{F \cos^2 \alpha}{1 + 2\cos^3 \alpha}$$

图 13.18

## § 11-5 单位荷载法 • 莫尔定理

### (Unit-load method & mohr's theorem)

#### 一、莫尔定理的推导 (Derivation of mohr's theorem)



$$1 \cdot \Delta = \int \bar{F}_N(x) d(\Delta l) + \int \bar{M}(x) d\theta + \int \bar{F}_S(x) d\lambda$$

上式左端为单位力的虚功,右端各项中的  $d(\Delta l)$ ,  $d\theta$ ,  $d\lambda$  是原有外力引起的变形,现在作为变形虚位移。对以抗弯为主的杆件,上式右边代表轴力和剪力影响的第一和第三项可以不计,于是有

$$\Delta = \int_l \bar{M}(x) d\theta \quad (13.19)$$

对只有轴力的拉伸或压缩杆件,式(a)右边只保留第一项,

$$\Delta = \int_l \bar{F}_N(x) d(\Delta l) \quad (b)$$

若沿杆件轴线轴力为常量,则

$$\Delta = \bar{F}_N \int_l d(\Delta l) = \bar{F}_N \Delta l \quad (c)$$

对有  $n$  根杆的杆系,如桁架,则上式应改写成

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{Ni} \Delta l_i \quad (13.20)$$

仿照上面的推导,如欲求受扭杆件某一截面绕轴线的扭转角  $\Delta$ ,则以单位扭转力偶矩作用于该截面上,它引起的扭矩记为  $\bar{T}(x)$ ,于是

$$\Delta = \int_l \bar{T}(x) d\varphi \quad (13.21)$$

式中  $d\varphi$  是杆件微段的扭转角。

以上诸式左端的  $\Delta$  是单位力(或力偶矩)作功  $1 \cdot \Delta$  的缩写,如求出的  $\Delta$  为正,表示单位力所作的功  $1 \cdot \Delta$  为正,亦即表示  $\Delta$  与单位力的方向相同。

若材料是线弹性的,则杆件的弯曲、拉伸和扭转变形分别是

$$d\theta = \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} \right) dx = \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

$$d\varphi = \frac{T(x)}{GI_p} dx$$

于是公式(13.19),公式(13.20),公式(13.21)分别化为

$$\Delta = \int_l \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx \quad (13.22)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{F_{Ni} \bar{F}_{Ni} l_i}{EA_i} \quad (13.23)$$

$$\Delta = \int_l \frac{T(x) \bar{T}(x)}{GI_p} dx \quad (13.24)$$

对非圆截面杆件的扭转,公式(13.24)中的  $I_p$  应改为  $I_t$ 。上列诸式统称为莫尔定理,式中积分称为莫尔积分。注意,公式(13.22)~公式(13.24)只适用于线弹性结构。

$$w_A = \int_l \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx \quad (\text{Mohr's Theorem})$$

$$\theta = \int_l \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx \quad \Delta = \int_l \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx$$

$$\text{桁架:} \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{F_{Ni} \bar{F}_{Ni} l_i}{EA}$$

#### 二、普遍形式的莫尔定理

##### (General formula for mohr's theorem)

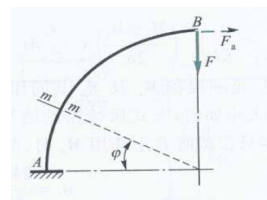
$$\Delta = \int_l \frac{F_N(x) \bar{F}_N(x)}{EA} dx + \int_l \frac{T(x) \bar{T}(x)}{GI_p} dx + \int_l \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx$$

注意:上式中  $\Delta$  应看成广义位移,把单位力看成与广义位移相对应的广义力。

#### 三、使用莫尔定理的注意事项

- (1)  $M(x)$ : 结构在原荷载下的内力;
- (2)  $\bar{M}$  —— 去掉主动力,在所求广义位移点,沿所求广义位移的方向加广义单位力时,结构产生的内力;
- (3) 所加广义单位力与所求广义位移之积,必须为功的量纲;
- (4)  $\bar{M}(x)$  与  $M(x)$  的坐标系必须一致,每段杆的坐标系可自由建立;
- (5) 莫尔积分必须遍及整个结构。

与卡氏定理的统一

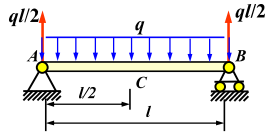


$$M = FR \cos \varphi + F_n R (1 - \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial M}{\partial F_n} = R (1 - \sin \varphi)$$

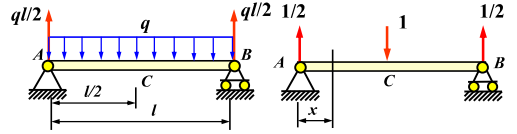
$$\delta_s = \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_n} ds \right]_{F_n=0} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} FR \cos \varphi \cdot R (1 - \sin \varphi) R d\varphi = \frac{FR^3}{2EI}$$

例題5 抗彎剛度為 $EI$ 的等截面簡支梁受均布荷載作用,用單位載荷法求梁中點的撓度 $w_C$ 和支點A截面的轉角.剪力對彎曲的影響不計.



解: 在實際荷載作用下,任一 $x$ 截面的彎矩為

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \quad (0 \leq x \leq l)$$



(1) 求C截面的撓度

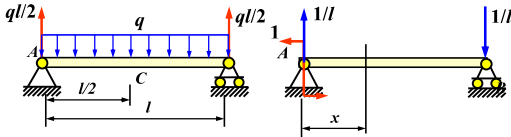
在C點加一向下的單位力,

任一 $x$ 截面的彎矩為  $\bar{M}(x) = \frac{1}{2}x \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2})$

$$\begin{aligned} w_C &= \int_l \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)dx}{EI} = 2 \cdot \int_0^{l/2} \frac{x}{2EI} \cdot \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{5ql^4}{384EI} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

13

14



(2) 求A截面的轉角

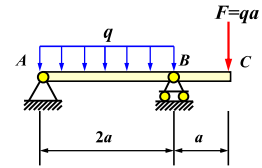
在A截面加一單位力偶

引起的 $x$ 截面的彎矩為  $\bar{M}(x) = \frac{1}{l}x - 1 \quad (0 \leq x \leq l)$

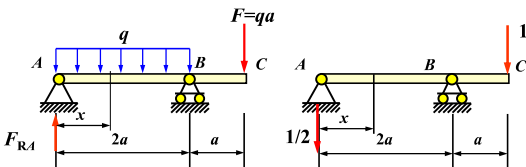
$$\begin{aligned} \theta_A &= \int_l \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)dx}{EI} = \int_0^l \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{l} - 1\right) \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right) dx \\ &= -\frac{ql^3}{24EI} \quad (\text{順時針}) \end{aligned}$$

15

例題6 圖示外伸梁,其抗彎剛度為 $EI$ .用單位載荷法求C點的撓度和轉角.



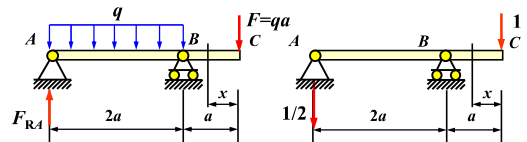
16



解:  $F_{RA} = \frac{qa}{2}$

(1) 求C截面的撓度 (在C處加一單位力“1”)

$$AB: M(x) = \frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2} \quad \bar{M}(x) = -\frac{x}{2}$$



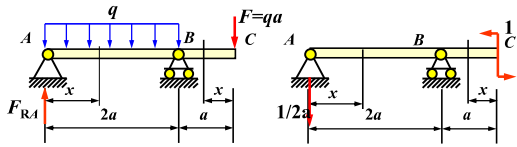
BC:  $M(x) = -qa \cdot x \quad \bar{M}(x) = -x$

$$\begin{aligned} w_C &= \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{2a} \left(\frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right) \left(-\frac{x}{2}\right) dx + \int_0^a (-qax) (-x) dx \right] \\ &= \frac{2qa^4}{3EI} \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

17

18





(2) 求C截面的转角 (在C处加一单位力偶)

$$AB: M(x) = \frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2} \quad \bar{M}(x) = \frac{x}{2a}$$

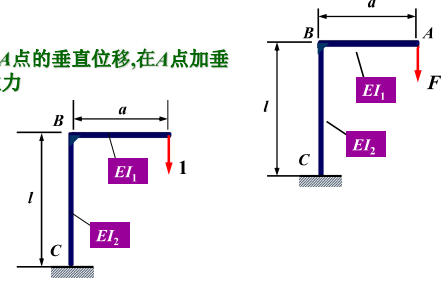
$$BC: M(x) = -qa \cdot x \quad \bar{M}(x) = 1$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{2a} \left( \frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) \left( \frac{x}{2a} \right) dx + \int_0^a (-qax)(1) dx \right]$$

$$= -\frac{5qa^3}{6EI} \quad (\curvearrowright)$$

例题7 刚架的自由端A作用集中力F,刚架各段的抗弯刚度已于图中标出. 不计剪力和轴力对位移的影响. 计算A点的垂直位移及B截面的转角.

解: (1) 计算A点的垂直位移,在A点加垂直向下的单位力



19

20

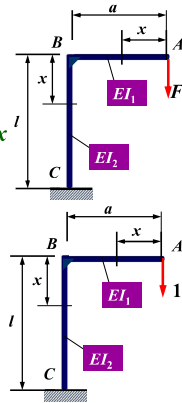
$$AB: M(x) = -Fx \quad \bar{M}(x) = -x$$

$$BC: M(x) = -Fa \quad \bar{M}(x) = -a$$

$$\delta_y = \int_0^a \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI_1} dx + \int_0^l \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI_2} dx$$

$$= \frac{1}{EI_1} \int_0^a (-Fx)(-x) dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^l (-Fa)(-a) dx$$

$$= \frac{Fa^3}{3EI_1} + \frac{Fa^2l}{EI_2} \quad (\downarrow)$$



21

(2) 计算B截面的转角,在B上加一个单位力偶矩

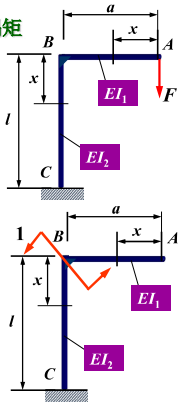
$$AB: M(x) = -Fx \quad \bar{M}(x) = 0$$

$$BC: M(x) = -Fa \quad \bar{M}(x) = 1$$

$$\theta_B = \int_0^a \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI_1} dx + \int_0^l \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI_2} dx$$

$$= \frac{1}{EI_1} \int_0^a (-Fx)(0) dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^l (-Fa)(1) dx$$

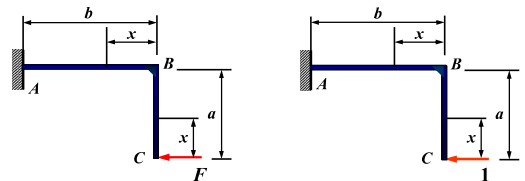
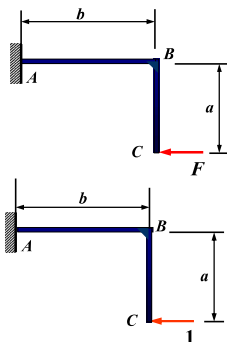
$$= -\frac{Fal}{EI_2} \quad (\curvearrowright)$$



22

例题8 图示刚架,两杆的EI和EA分别相同,试求C点的水平位移.

解:在C点加一水平单位力



$$CB: M(x) = -Fx \quad \bar{M}(x) = -x$$

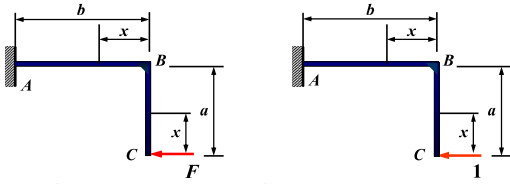
$$F_N(x) = 0 \quad \bar{F}_N(x) = 0$$

$$AB: M(x) = -Fa \quad \bar{M}(x) = -a$$

$$F_N(x) = -F \quad \bar{F}_N(x) = -1$$

23

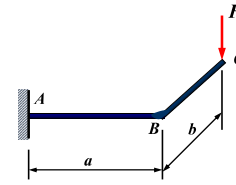
24



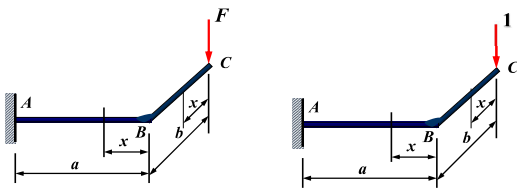
$$\begin{aligned}
 H_C &= \frac{1}{EI} \int_l M(x) \bar{M}(x) dx + \frac{1}{EA} \int_l F_N(x) \bar{F}_N(x) dx \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^a (-Fx)(-x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^b (-Fa)(-a) dx + \\
 &\quad \frac{1}{EA} \int_0^b (-F)(-1) dx = \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fa^2b}{EI} + \frac{Fb}{EA} \quad (\leftarrow)
 \end{aligned}$$

25

例题9 图示为一水平面内的曲杆, B处为一刚性节点,  $\angle ABC=90^\circ$  在 C处承受竖力F, 设两杆的抗弯刚度和抗扭刚度分别是 EI 和  $GI_p$ , 求 C点竖向的位移。



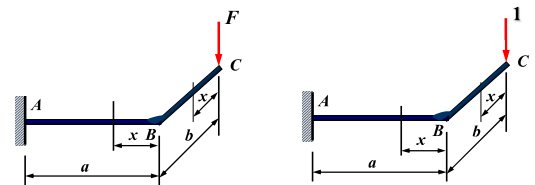
26



解: 在 C点加竖向单位力

$$\begin{aligned}
 BC: \quad M(x) &= -Fx & \bar{M}(x) &= -x \\
 T(x) &= 0 & \bar{T}(x) &= 0 \\
 AB: \quad M(x) &= -Fx & \bar{M}(x) &= -x \\
 T(x) &= -Fb & \bar{T}(x) &= -b
 \end{aligned}$$

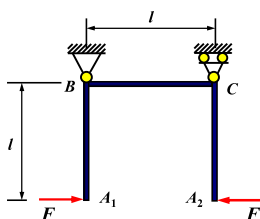
27



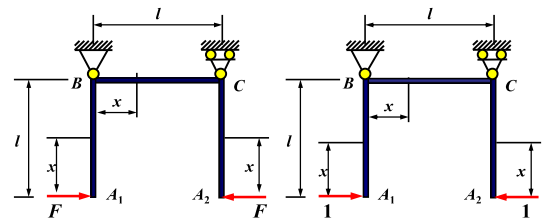
$$\begin{aligned}
 \Delta_C &= \frac{1}{EI} \int_l M(x) \bar{M}(x) dx + \frac{1}{GI_p} \int_l T(x) \bar{T}(x) dx \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^a (-Fx)(-x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^b (-Fx)(-x) dx + \\
 &\quad \frac{1}{GI_p} \int_0^a (-Fb)(-b) dx = \frac{F}{3EI} (a^3 + b^3) + \frac{Fab^2}{GI_p} (\downarrow)
 \end{aligned}$$

28

例题10 由三杆组成的刚架, B, C为刚性节点, 三杆的抗弯刚度都是 EI, 试用单位载荷法求  $A_1, A_2$  两点的相对位移。



29

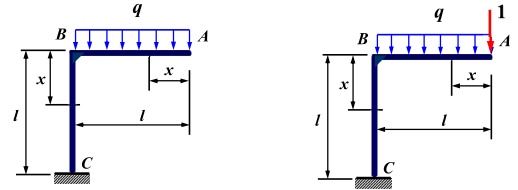
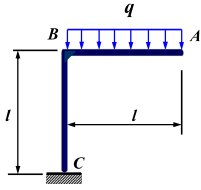


解: 在  $A_1, A_2$  处加一对水平单位力, B, C 两支座的反力均为零。

$$\begin{aligned}
 A_1B: \quad M(x) &= -Fx & \bar{M}(x) &= -x \\
 BC: \quad M(x) &= -Fl & \bar{M}(x) &= -l \\
 CA_2: \quad M(x) &= -Fx & \bar{M}(x) &= -x \\
 \Delta &= \frac{1}{EI} [2 \int_0^l (-Fx)(-x) dx + \int_0^l (-Fl)(-l) dx] = \frac{5Fl^3}{3EI} \quad (\rightarrow \leftarrow)
 \end{aligned}$$

30

例題11 剛架受力如圖,求A截面的垂直位移,水平位移及轉角.



解:求A點鉛垂位移 (在A點加豎向單位力)

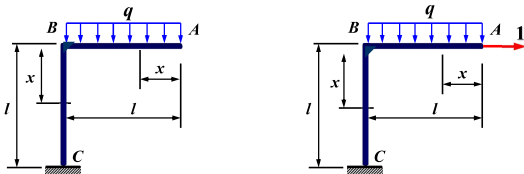
$$AB: M(x) = -\frac{qx^2}{2} \quad \bar{M}(x) = -x$$

$$BC: M(x) = -\frac{ql^2}{2} \quad \bar{M}(x) = -l$$

$$\delta_y = \frac{1}{EI} \left( \int_0^l \frac{qx^2}{2} \cdot x \cdot dx + \int_0^l \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot dx \right) = \frac{5ql^4}{8EI} \quad (\downarrow)$$

31

32



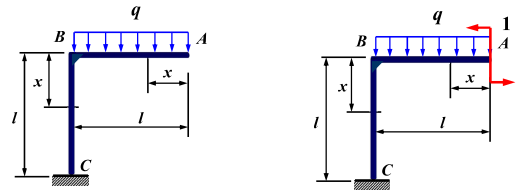
求A點水平位移 (在A點加水平單位力)

$$AB: M(x) = -\frac{qx^2}{2} \quad \bar{M}(x) = 0$$

$$BC: M(x) = -\frac{ql^2}{2} \quad \bar{M}(x) = -x$$

$$\delta_x = \frac{1}{EI} \left( \int_0^l \frac{qx^2}{2} \cdot 0 \cdot dx + \int_0^l \frac{ql^2}{2} \cdot x \cdot dx \right) = \frac{ql^4}{4EI} \quad (\rightarrow)$$

33



求A點的轉角 (在A點加一單位力偶)

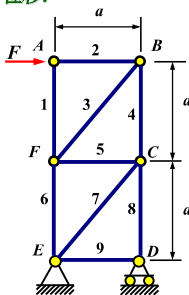
$$AB: M(x) = -\frac{qx^2}{2} \quad \bar{M}(x) = 1$$

$$BC: M(x) = -\frac{ql^2}{2} \quad \bar{M}(x) = 1$$

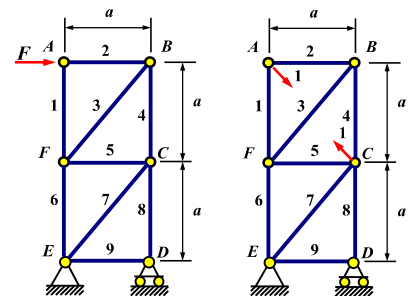
$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left( \int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2}\right) \cdot 1 \cdot dx + \int_0^l \left(-\frac{ql^2}{2}\right) \cdot 1 \cdot dx \right) = -\frac{2ql^3}{3EI} \quad (\curvearrowright)$$

34

例題12 圖示為一簡單桁架,其各杆的EA相等.在圖示荷載作用下A、C兩節點間的相對位移.



桁架求位移的單位荷載法為  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{F}_{Ni} F_{Ni} l_i}{EA}$



35

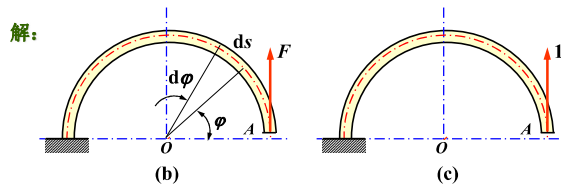
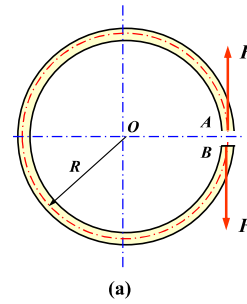
36

杆件编号	$F_{Ni}$	$\bar{F}_{Ni}$	$l_i$	$F_{Ni}F_{Ni}l_i$
1	0	$-1/\sqrt{2}$	$a$	0
2	$-F$	$-1/\sqrt{2}$	$a$	$Fa/\sqrt{2}$
3	$-\sqrt{2}F$	1	$\sqrt{2}a$	$2Fa$
4	$-F$	$-1/\sqrt{2}$	$a$	$Fa/\sqrt{2}$
5	$-F$	$-1/\sqrt{2}$	$a$	$Fa/\sqrt{2}$
6	$F$	0	$a$	0
7	$\sqrt{2}F$	0	$\sqrt{2}a$	0
8	$-2F$	0	$a$	0
9	0	0	$a$	0

$$\delta_{AC} = \sum_{i=1}^9 \frac{\bar{F}_{Ni}F_{Ni}l_i}{EA} = (2 + \frac{3}{\sqrt{2}}) \frac{Fa}{EA} = 4.12 \frac{Fa}{EA}$$

A, C 两点间的距离缩短。

例題13 計算圖 (a) 所示開口圓環在  $F$  力作用下切口的張開量  $\Delta_{AB}$ 。  $EI = \text{常數}$ 。

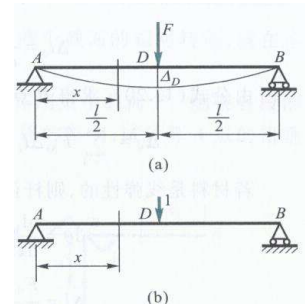


$$M(\varphi) = -FR(1 - \cos\varphi) \quad \bar{M}(\varphi) = -R(1 - \cos\varphi)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{AB} &= 2 \int_0^\pi \frac{M(\varphi)\bar{M}(\varphi)}{EI} R d\varphi \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{FR^2(1 - \cos\varphi)^2}{EI} R d\varphi = \frac{3\pi FR^3}{EI} \end{aligned}$$



例 13.11 圖 13.20a 為一簡支梁，集中力  $F$  作用於跨中點。材料的應力 - 應變關係為  $\sigma = C\sqrt{\varepsilon}$ 。式中  $C$  為常數， $\varepsilon$  和  $\sigma$  皆取絕對值。試求集中力  $F$  作用點  $D$  的鉛垂位移。



解：首先研究梁的變形，以求出公式 (13.19) 中  $d\theta$  的表达式。彎曲變形時 (參看 § 5.2)，梁內離中性層為  $y$  處的應變是

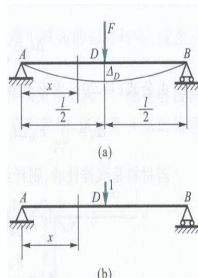
$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

式中  $\frac{1}{\rho}$  為撓曲線的曲率。由應力 - 應變關係得

$$\sigma = C\varepsilon^{\frac{1}{2}} = C\left(\frac{y}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

橫截面上的彎矩應為

$$M = \int_A y\sigma dA = C\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \int_A y^{\frac{3}{2}} dA$$



引用記號

$$I^* = \int_A y^{\frac{3}{2}} dA$$

則由式 (d) 可以得出

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M^2}{(CI^*)^2}$$

由於  $\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$ ，且  $M = \frac{Fx}{2}$ ，故有

$$d\theta = \frac{1}{\rho} dx = \frac{M^2 dx}{(CI^*)^2} = \frac{F^2 x^2 dx}{4(CI^*)^2}$$

設想在  $D$  點作用一單位力 (圖 13.20b)，這時彎矩  $\bar{M}(x)$  為

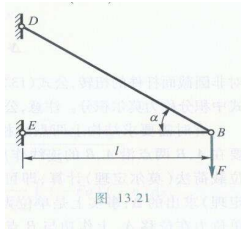
$$\bar{M}(x) = \frac{x}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{l}{2})$$

將  $d\theta$  及  $\bar{M}(x)$  的表达式代入公式 (13.19)，完成積分得

$$\Delta_D = \int_0^{\frac{l}{2}} \bar{M}(x) d\theta = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{F^2 x^3}{8(CI^*)^2} dx = \frac{F^2 l^4}{256(CI^*)^2}$$

例 13.12 简单桁架如图 13.21 所示。设两杆的横截面面积同为  $A$ , 材料的应力-应变关系如例 13.11 所述。试求节点  $B$  的铅垂位移  $\Delta_V$ 。

$$\sigma = C\sqrt{\varepsilon}$$



解: 由节点  $B$  的平衡条件求出  $BD$  杆的轴力和应力, 再由应力-应变关系求出应变, 结果为

$$\sigma_1 = \frac{F}{A \sin \alpha}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1^2}{C^2} = \frac{F^2}{C^2 A^2 \sin^2 \alpha}$$

沿  $BD$  杆的轴线变形是均匀的,  $BD$  杆的伸长为

$$\Delta l_1 = \frac{l}{\cos \alpha} \varepsilon_1 = \frac{F^2 l}{C^2 A^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}$$

用单位载荷法求解时, 应在  $B$  点沿垂直方向作用单位力 (图中未画出)。  $BD$  杆因上述单位力引起的轴力为

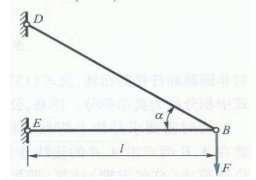
$$\bar{F}_{s1} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

对  $BE$  杆进行相同的计算, 得出

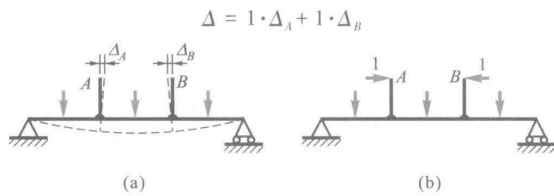
$$\Delta l_2 = \frac{F^2 l \cos^2 \alpha}{C^2 A^2 \sin^2 \alpha}, \quad \bar{F}_{s2} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

由公式 (13.20), 求得  $B$  点的铅垂位移是

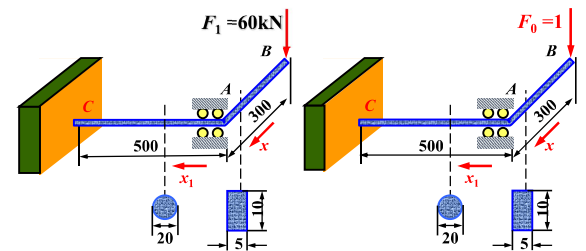
$$\Delta_V = \sum_{i=1}^2 \bar{F}_{si} \Delta l_i = \bar{F}_{s1} \Delta l_1 + \bar{F}_{s2} \Delta l_2 = \frac{F^2 l}{C^2 A^2} \frac{1 + \cos^4 \alpha}{\sin^3 \alpha \cos \alpha}$$



$$\sigma = C\sqrt{\varepsilon}$$



例题 拐杆如图,  $A$  处为一轴承, 允许杆在轴承内自由转动, 但不能上下移动, 已知:  $E=210\text{GPa}$ ,  $G=0.4E$ , 求  $B$  点的垂直位移。



解: (1) 画单位载荷图

(2) 求内力

$$M_{AB}(x) = Fx \quad T_{CA}(x_1) = 0.3F$$

$$\bar{M}_{AB}(x) = x \quad \bar{T}_{CA}(x_1) = 0.3$$

(3) 变形

$$\delta_B = \int_L \frac{T(x_1) \bar{T}(x_1)}{GI_p} dx_1 + \int_L \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx$$

$$= \int_0^{0.5} \frac{0.3F \cdot 0.3}{GI_p} dx_1 + \int_0^{0.3} \frac{Fx^2}{EI} dx = \frac{FL_{AB}^3}{3EI} + L_{AB} \frac{FL_{AB} L_{AC}}{GI_p}$$

$$= \frac{60 \times 0.3^3 \times 12}{3 \times 210 \times 5 \times 10^3} \times 10^3 + 0.3 \times \frac{60 \times 0.3 \times 0.5 \times 32}{0.4 \times 210 \times 20^4 \pi} \times 10^3$$

$$= 8.22\text{mm}$$

### § 13-6 计算莫尔积分的图乘法 (The method of moment areas for the mohr's integration)

等直杆的情况下, 莫尔积分中的  $EI$  为常量, 可提到积分号外面

$$A = \frac{1}{EI} \int_L M(x) \cdot \bar{M}(x) dx$$

只需计算:

$$\int_L M(x) \cdot \bar{M}(x) dx$$



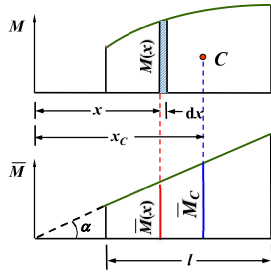
因为  $\bar{M}(x)$  是由单位力或单位力偶引起的弯矩, 故沿杆长方向的  $\bar{M}(x)$  图一般是由直线或折线组成,  $M(x)$  图一般是曲线.

$$\int_l M(x) \cdot \bar{M}(x) dx$$

$$= \tan \alpha \cdot \int_l x \cdot M(x) dx$$

$$= \tan \alpha \cdot \omega \cdot x_c = \omega \cdot \bar{M}_c$$

$$A = \int_l \frac{M(x) \bar{M}(x)}{EI} dx = \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{EI}$$



49

设在杆长为  $l$  的一段内  $M(x)$  图是曲线

$\bar{M}(x)$  是直线, 设直线方程是  $\bar{M}(x) = A + Bx$

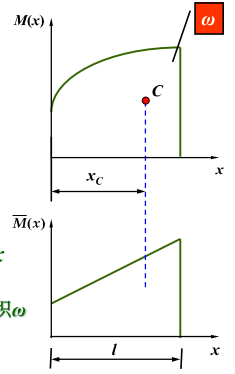
$$\int_l M(x) \bar{M}(x) dx$$

$$= \int_0^l (A + Bx) \cdot M(x) dx$$

$$= A \int_0^l M(x) dx + B \int_0^l x \cdot M(x) dx$$

$\int_0^l M(x) dx$  为  $l$  段内图  $M(x)$  的面积  $\omega$

$$\int_0^l x \cdot M(x) dx = \omega x_c$$



50

$\int_0^l x M(x) dx$  为图  $M(x)$  对  $y$  轴坐标的静矩

$C$  为图  $M(x)$  的形心,  $x_c$  为其坐标

$$\int_0^l M(x) dx = \omega x_c$$

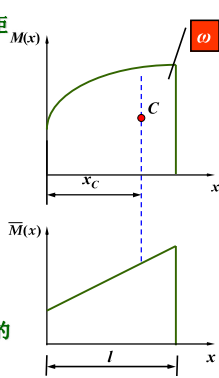
$$\int_l M(x) \bar{M}(x) dx$$

$$= A \int_0^l M(x) dx + B \int_0^l x \cdot M(x) dx$$

$$= A \cdot \omega + B \cdot \omega \cdot x_c = \omega(A + B \cdot x_c)$$

$$= \omega \cdot \bar{M}_c$$

$A + B \cdot x_c$  是和  $M(x)$  图的形心对应的  $\bar{M}(x)$  的值.



51

对于等直杆有

$$A = \frac{1}{EI} \int_l M(x) \bar{M}(x) dx = \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{EI}$$

即积分可用  $M(x)$  图的面积  $\omega$  和与  $M(x)$  图形心  $C$  对应的  $\bar{M}_c$  的乘积来代替

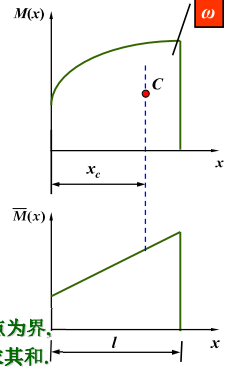
当  $M$  图为正弯矩时,  $\omega$  应代以正号.

当  $M$  图为负弯矩时,  $\omega$  应代以负号.

$\bar{M}_c$  也应按弯矩符号给以正负号.

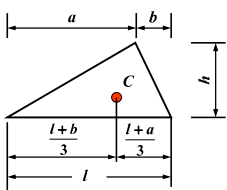
**注意** 有时  $M(x)$  图为连续光滑曲线,

而  $\bar{M}(x)$  为折线, 则应以折线的转折点为界, 把积分分成几段, 逐段使用图乘法, 然后求其和.

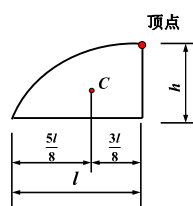


52

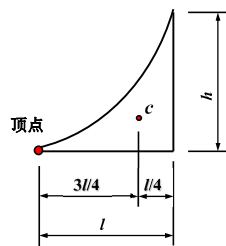
### 几中常见图形的面积和形心的计算公式



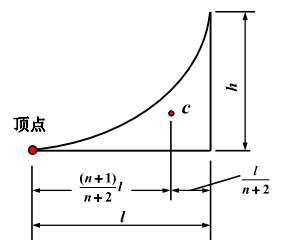
三角形  $\omega = \frac{l \cdot h}{2}$



二次抛物线  $\omega = \frac{2}{3} h \cdot l$



二次抛物线  $\omega = \frac{l \cdot h}{3}$

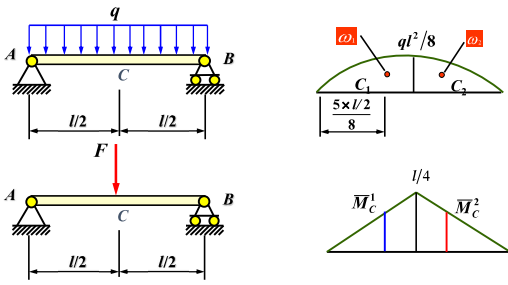


N 次抛物线  $\omega = \frac{l \cdot h}{n+1}$

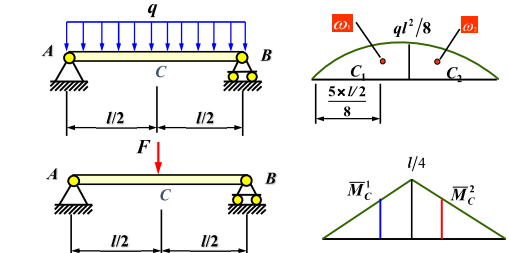
53

54

例题18 均布荷载作用下的简支梁,其  $EI$  为常数. 求跨中点的挠度.



以  $\bar{M}(x)$  图的转折点为界,分两段使用图乘法.



$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^3}{24}$$

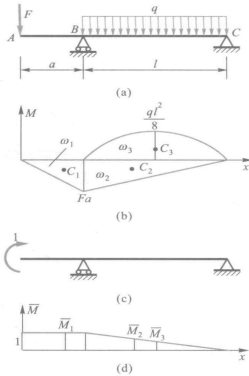
$$\bar{M}_C = \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{4} = \frac{5}{32} \cdot l$$

$$w_C = \frac{\omega_1 \cdot \bar{M}_C}{EI} + \frac{\omega_2 \cdot \bar{M}_C}{EI} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{5l}{32} = \frac{5ql^4}{384EI} \quad (\downarrow)$$

55

56

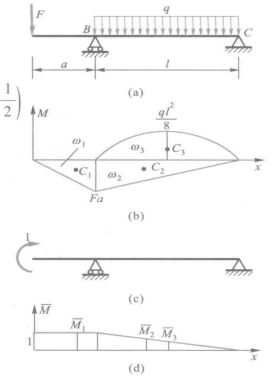
例 13.16 求外伸梁(图 13.29a)A 端的转角。



$$\theta_A = \int_1 \frac{M(x) \bar{M}(x) dx}{EI} = \frac{1}{EI} (\omega_1 \bar{M}_1 + \omega_2 \bar{M}_2 + \omega_3 \bar{M}_3)$$

$$= \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} \times Fa \times a \times 1 - \frac{1}{2} \times Fa \times l \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \times l \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= -\frac{Fa^2}{EI} \left( \frac{1}{2} + \frac{l}{3a} \right) + \frac{ql^3}{24EI}$$

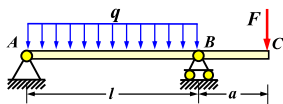


57

58

例题19 图示梁,抗弯刚度为  $EI$ ,承受均布荷载  $q$  及集中力  $F$  作用. 用图乘法求:

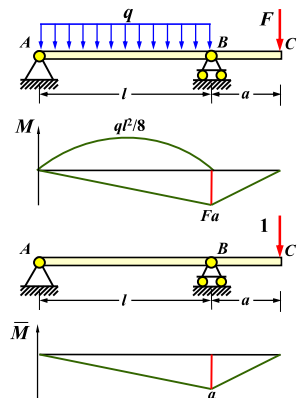
- (1) 集中力作用端挠度为零时的  $F$  值;
- (2) 集中力作用端转角为零时的  $F$  值.



解:

$$w_C = \frac{1}{EI} \left( \frac{Fal}{2} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{Fa^2}{2} \cdot \frac{2a}{3} - \frac{ql^3}{12} \cdot \frac{a}{2} \right) = 0$$

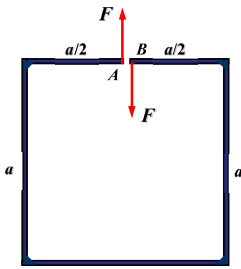
$$F = \frac{ql^3}{8a(l+a)}$$



59

60

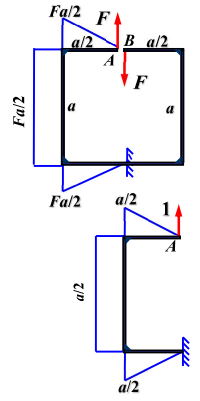
例题20 图示开口刚架,  $EI$ 为常数. 求  $A$ 和 $B$ 两截面的相对角位移  $\theta_{AB}$ 和沿 $F$ 力作用线方向的相对线位移  $\Delta_{AB}$ .



解:

$$\Delta_{AB} = \frac{2Fa^3}{EI} \left( \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{2Fa^3}{3EI}$$

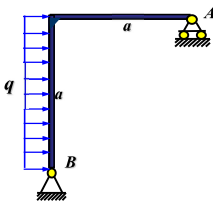
$$\theta_{AB} = 0$$



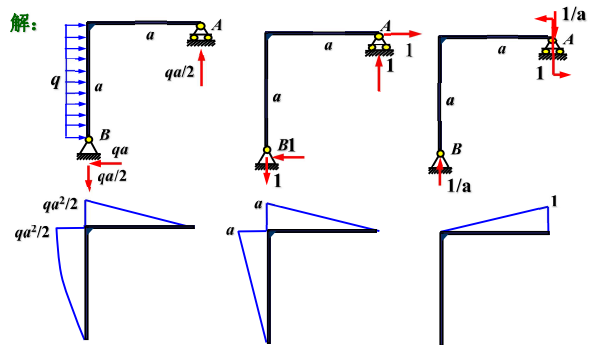
61

62

例题21 图示刚架,  $EI$ 为常数. 求  $A$ 截面的水平位移  $\Delta_{AH}$ 和转角  $\theta_A$ .



解:



$$\Delta_{AH} = \frac{qa^4}{EI} \left( \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{8} \right) = \frac{3qa^4}{8EI} \quad (\rightarrow)$$

63

64

## 第十二章 静不定结构(Chapter 14 Statically Indeterminate Structure)

▶ § 12-1 静不定结构概述(Instruction about statically indeterminate structure)

▶ § 12-2 用力法解静不定结构(Solving statically indeterminate structure by force method)

▶ § 12-3 对称及反对称性质的应用

§ 12-4 连续梁及三弯矩方程

## § 12-1 静不定结构概述 (Instruction about Statically indeterminate structure)

一、静不定结构 (Statically indeterminate structure)

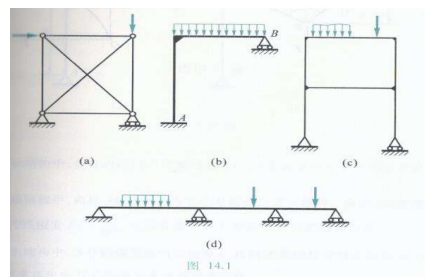
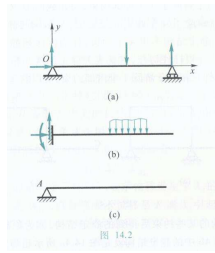


图 14.1

用静力学平衡方程无法确定全部约束力和内力的结构, 统称为**静不定结构或系统** (statically indeterminate structure), 也称为超静定结构或系统。

在静不定结构中, 超过维持静力学平衡所必须的约束称为多余约束, 多余约束相对应的反力称为多余约束反力, 多余约束的数目为结构的**静不定次数** (degree of statically indeterminate)。



## 二、静不定问题分类

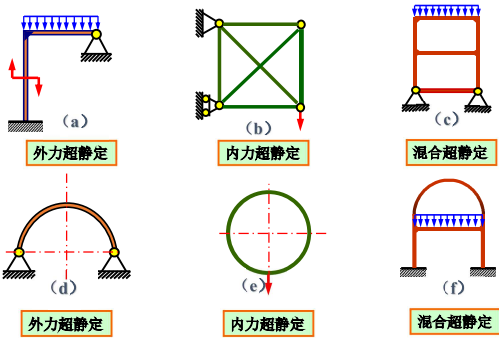
### (Classification for statically indeterminate)

第一类: 仅在结构外部存在多余约束, 即支反力是静不定的, 可称为外力静不定系统;

第二类: 仅在结构内部存在多余约束, 即内力是静不定的, 可称为内力静不定系统;

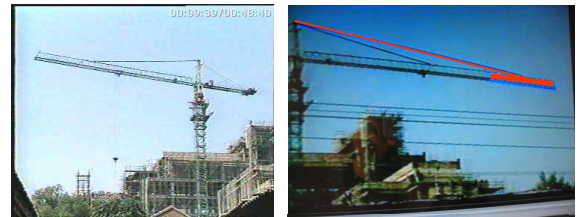
第三类: 在结构外部和内部均存在多余约束, 即支反力和内力是静不定的, 也称联合静不定结构。

### 判断下列结构属于哪类超静定

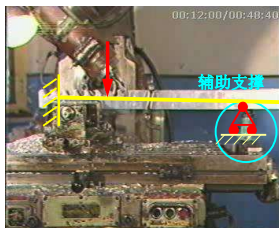


## 三、工程中的超静定结构 (Statically indeterminate structure in engineering)

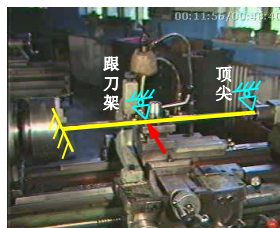
在机械和工程结构中常采用超静定结构增加系统的刚度, 提高构件的承载能力。



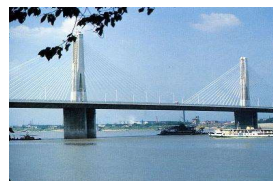
塔式吊车起重臂可简化为外伸梁结构, 当需要延长主臂以增加其回转半径时, 如何才能保持原有的承载能力?



在铣床上铣削工件时, 为防止工件的移动并减小其变形和振动, 需要增加辅助支撑, 虎钳和辅助支撑构成系统



用车床加工细长轴时, 经常采用顶尖和跟刀架等辅助支撑以减少其变形。卡盘和辅助支撑构成超静定系统。

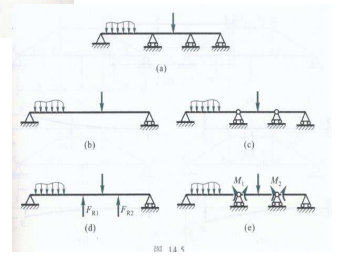
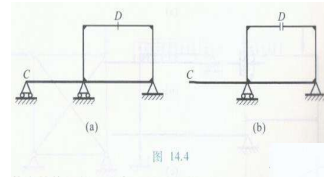
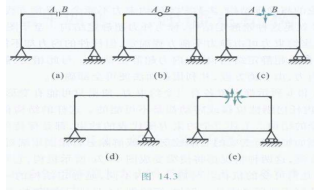


#### 四、超静定次数的判定

##### (Determine the degree of static indeterminacy)

(1) 外力超静定次数的判定:根据约束性质确定支反力的个数,根据结构所受力系的类型确定独立平衡方程的个数,二者的差即为结构的超静定次数;

(2) 内力超静定次数的判定:一个平面封闭框架为三次内力超静定;平面桁架的内力超静定次数等于未知力的个数减去二倍的节点数.



#### 五、分析方法 (Analytical method)

1. 力法 (Force method):以未知力为基本未知量的求解方法;
2. 位移法 (Displacement method):以未知位移为基本未知量的求解方法.



## § 12-2 用力法解静不定结构

### (Solving statically indeterminate structure by force method)

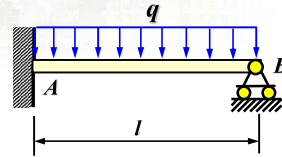
#### 一、力法的求解过程 (Basic procedure for force method)

##### 1. 判定超静定次数

解除超静定结构的多余约束，用多余约束力  $X_1, X_2, X_3, \dots$  代替多余约束，得到一个几何不变的静定系统，称为原静不定系统的“相当系统”；

- 在多余约束处满足“变形几何条件”，得到变形协调方程；
- 由补充方程求出多余约束力；
- 在相当系统上求解原超静定结构的内力和变形。

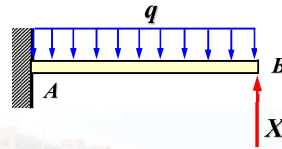
例题1 如图所示，梁  $EI$  为常数，试求支座反力。



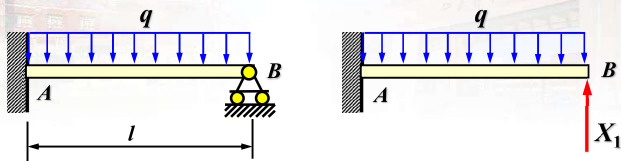
(1) 去掉多余约束代之约束反力，得基本静定系

把 B 支座作为多余约束

AB 悬臂梁为基本静定系



$X_1$  为多余反力

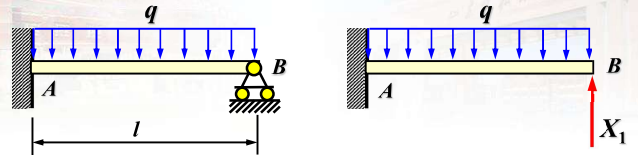


(2) 利用多余约束处的变形情况写出变形协调条件

变形协调条件：B 点的挠度为  $\Delta_{1X_1} + \Delta_{1F} = 0$

$\Delta_{1X_1}$  表示由于  $X_1$  作用在静定基上时， $X_1$  作用 B 点沿  $X_1$  方向的位移。

$\Delta_{1F}$  表示荷载  $F$  (广义力) 作用在静定基上时， $X_1$  作用 B 点沿  $X_1$  方向的位移。



若用  $\delta_{11}$  表示沿  $X_1$  方向的单位力在其作用点引起的  $X_1$  方向的位移。

由于  $X_1$  作用，B 点的沿  $X_1$  方向位移是  $\delta_{11}$  的  $X_1$  倍

$$\Delta_1 = \Delta_{1F} + \Delta_{1X_1}$$

$\delta_{11}, \Delta_{1F}$ : 用单位荷载法求解。

$$\Delta_{1X_1} = \delta_{11} X_1$$

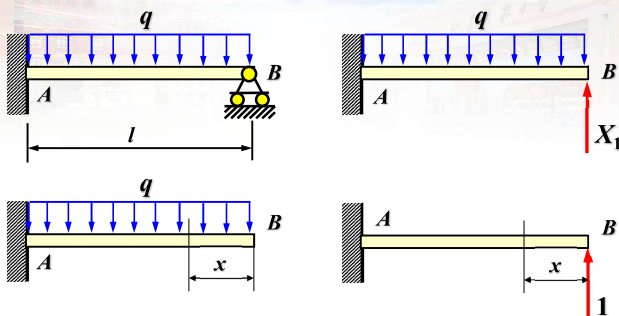
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

利用上式解出  $X_1$

$$\Delta_{1F} = \int \frac{M \bar{M}}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M} \bar{M}}{EI} dx$$

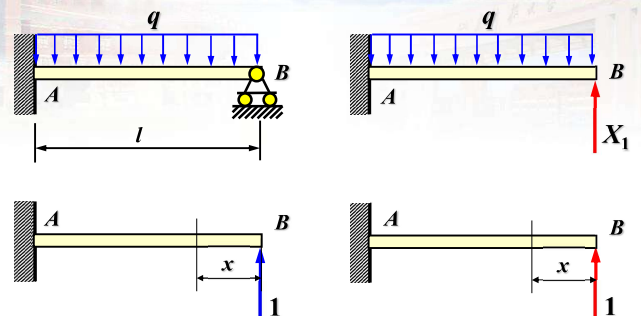
$$M_{\text{总}} = M + X_1 \bar{M}$$



(3) 用莫尔定理求  $\Delta_{1F}$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} \quad \bar{M}(x) = x$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2}\right) \cdot x dx = -\frac{ql^4}{8EI}$$

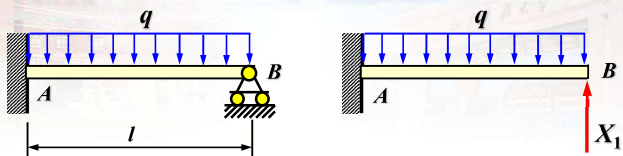


(4) 用莫尔定理求  $\delta_{11}$

$$\bar{M}(x) = x$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^l x \cdot x dx = \frac{l^3}{3EI}$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



$$A_{1F} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2}\right) \cdot x dx = -\frac{ql^4}{8EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^l x \cdot x dx = \frac{l^3}{3EI}$$

代入  $\delta_{11}X_1 + A_{1F} = 0$

$$\frac{l^3}{3EI} X_1 - \frac{ql^4}{8EI} = 0 \quad \text{解得} \quad X_1 = \frac{3}{8}ql$$

$$\Delta_{1F} = \int \frac{M \bar{M}}{EI} dx$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M} \bar{M}}{EI} dx$$

$$M_{\text{总}} = M + X_1 \bar{M}$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

### 二、力法正则方程 (Generalized equations in the force method)

上例中以多余力为未知量的变形协调方程可改写成下式

$$\delta_{11}X_1 + A_{1F} = 0$$

变形协调方程的标准形式,即所谓的力法正则方程。

$X_1$ — 多余未知量;

$\delta_{11}$ — 在基本静定系上,  $X_1$ 取单位值时引起的在  $X_1$ 作用点  $X_1$ 方向的位移;

$A_{1F}$ — 在基本静定系上,由原载荷引起的在  $X_1$ 作用点沿  $X_1$ 方向的位移;

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

例 14.1 以工字梁 AB 为大梁的桥式起重机,加固成图 14.7a 的形式。除工字梁外,设其他各杆只承受拉伸或压缩,且各杆的横截面面积皆为 A。工字梁与其他各杆同为 Q235 钢,若吊重 F 作用于跨度中点,试求工字梁的最大弯矩。

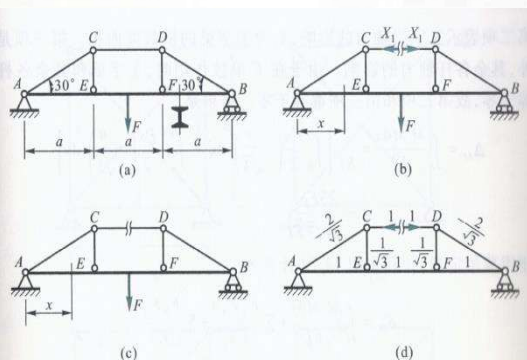
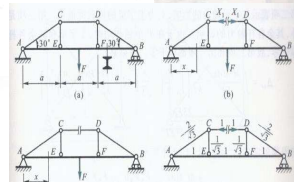


图 14.7

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

解: 加固后的起重机,支座约束力仍可由平衡方程求出为

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{F}{2}$$



但工字梁和其他各杆的内力却是超静定的。将杆 CD 切开,并以其轴力  $X_1$  为多余约束力(图 14.7b)。基本静定系在 F 单独作用下(图 14.7c),切口两侧截面沿  $X_1$  方向的相对位移为  $\Delta_{1F}$ 。在  $X_1 = 1$  时(图 14.7d),切口两侧截面沿  $X_1$  方向的相对位移为  $\delta_{11}$ 。在 F 及  $X_1$  联合作用下(图 14.7b),切口两侧截面沿  $X_1$  方向的相对位移应为

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \Delta_{1F}$$

实际上,杆 CD 是连续的,切口两侧截面的相对位移  $\Delta_1$  应等于零。于是有

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (c)$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

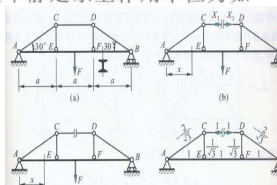
现在计算  $\Delta_{1F}$  和  $\delta_{11}$ 。首先,在基本静定系上只作用载荷 F(图 14.7c),工字梁 AB 的弯矩为

$$M = \frac{F}{2}x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{3}{2}a\right)$$

同时,工字梁及其余各杆的轴力皆等于零。其次,在基本静定系上作用单位力如图 14.7d 所示。这时工字梁的弯矩是

AE 段:  $\bar{M} = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \sin 30^\circ\right)x = -\frac{x}{\sqrt{3}}$

EF 段:  $\bar{M} = -1 \times a \tan 30^\circ = -\frac{a}{\sqrt{3}}$



工字梁和其余各杆的轴力  $\bar{F}_N$  都已表示于图 14.7d 中。根据莫尔定理,

$$\Delta_{1F} = \int_l \frac{M \bar{M} dx}{EI} + \sum \frac{F_N \bar{F}_N a}{EA_1} + \sum \frac{F_N \bar{F}_N l}{EA}$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

式中第二项表示工字梁轴力的影响,  $A_1$  为工字梁的横截面积。第三项是除工字梁外,其余各杆轴力的影响。由于在 F 单独作用时,工字梁和其余各杆的轴力都等于零,故第二项和第三项都等于零。结果是

$$\Delta_{1F} = \int_l \frac{M \bar{M} dx}{EI} = \frac{2}{EI} \left[ \int_0^a \frac{Fx}{2} \left(-\frac{x}{\sqrt{3}}\right) dx + \int_a^{\frac{3}{2}a} \frac{Px}{2} \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) dx \right]$$

$$= -\frac{23Fa^3}{24\sqrt{3}EI}$$

仍然使用莫尔定理,并利用图 14.7d 计算  $\delta_{11}$ ,

$$\delta_{11} = \int_l \frac{M \bar{M} dx}{EI} + \sum \frac{\bar{F}_N \bar{F}_N a}{EA_1} + \sum \frac{\bar{F}_N \bar{F}_N l}{EA}$$

$$= \frac{2}{EI} \left[ \int_0^a \left(-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 dx + \int_a^{\frac{3}{2}a} \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 dx \right] + \frac{1}{EA_1}(a+a) + \frac{1}{EA} \left[ 2 \times \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} + 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} + (-1)^2 \cdot a \right]$$

$$= \frac{5a^3}{9EI} \frac{3a}{EA_1} + \frac{a}{EA} (2\sqrt{3}+1)$$

最终结果中的第二和第三项,分别表示工字梁和其他各杆轴力的影响。由于工字梁的横截面积  $A_1$  远大于其他各杆的 A, 所以可以略去第二项,得

$$\delta_{11} = \frac{5a^3}{9EI} + \frac{a}{EA} (2\sqrt{3}+1)$$

把  $\Delta_{1F}$  和  $\delta_{11}$  代入式(c),便可解出

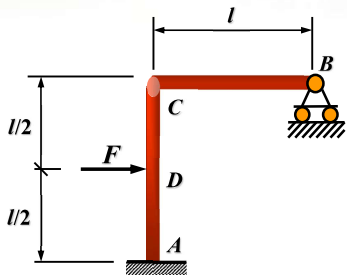
$$X_1 = \frac{23Fa^2}{24\sqrt{3} \left[ \frac{5}{9}a^2 + \frac{l}{A} (2\sqrt{3}+1) \right]}$$

求得  $X_1$  后,自然不难算出工字梁的最大弯矩,读者可自行完成。

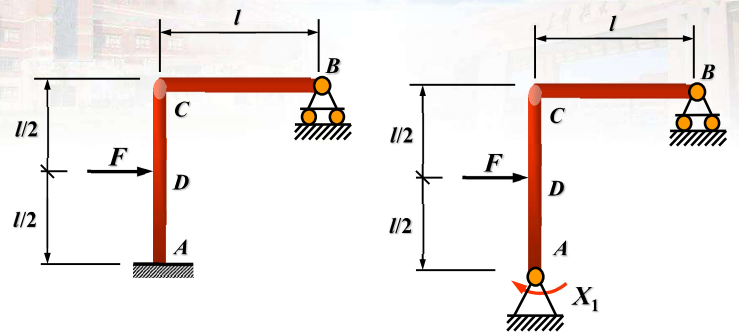


## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

例题2 刚架的两杆抗弯刚度都是  $EI$ , 解此刚架.



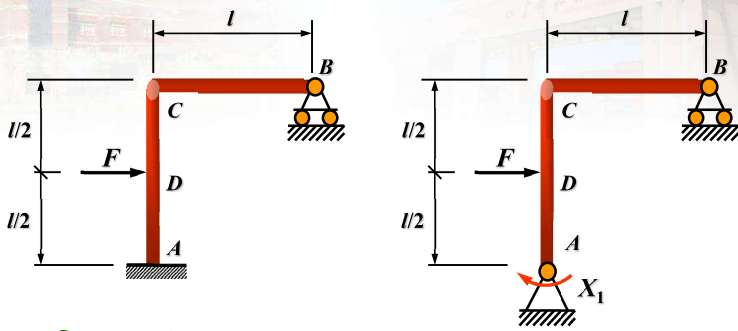
## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



解: 取固定端处的反力偶为多余约束.

变形协调条件是: A点的转角等于零.

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

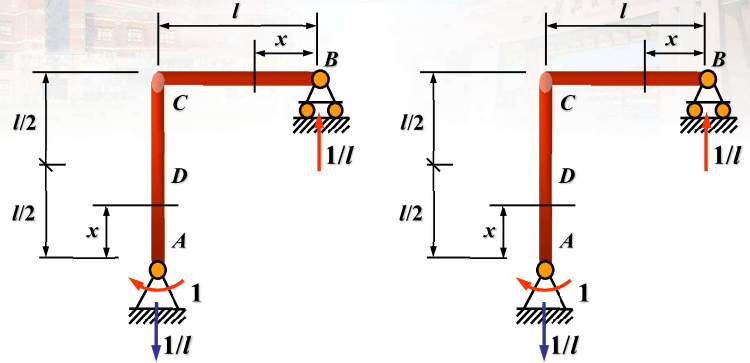


$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

$\delta_{11}$  是在A点作用单位力偶时, 在A截面引起的转角.

$\Delta_{1F}$  是力F在A截面引起的转角.

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

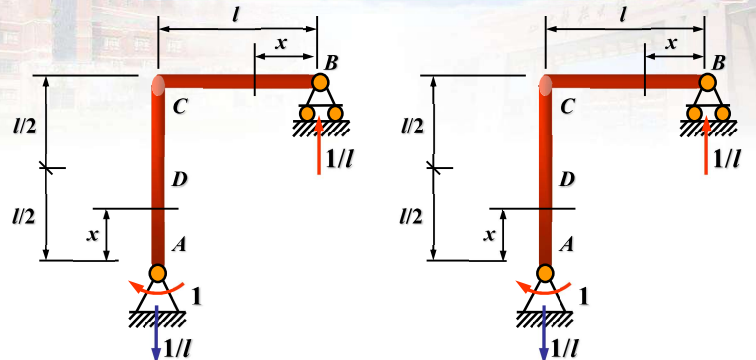


(1) 求  $\delta_{11}$

BC:  $\bar{M}(x) = \frac{1}{l}x$

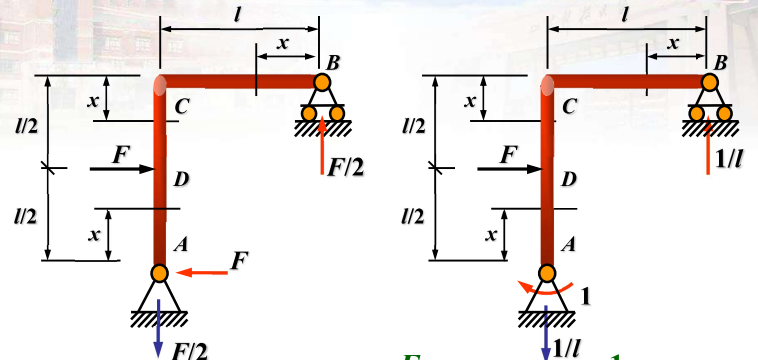
AC:  $\bar{M}(x) = 1$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx + \int_0^{l/2} (1)^2 dx \right]$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



(2) 求  $\Delta_{1F}$

BC:  $M(x) = \frac{F}{2}x$       $\bar{M}(x) = \frac{1}{l}x$

CD:  $M(x) = \frac{F}{2}l$       $\bar{M}(x) = 1$

AD:  $M(x) = Fx$       $\bar{M}(x) = 1$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{a/2} \frac{Fx}{2} \cdot \frac{x}{l} dx + \int_0^{a/2} \frac{Fl}{2} \cdot 1 dx + \int_0^{a/2} Fx \cdot 1 dx \right]$$

$$= \frac{13Fl^2}{24EI}$$

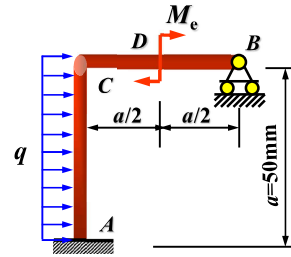
$$\delta_{11} = \frac{4l}{3EI}$$

代入  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$

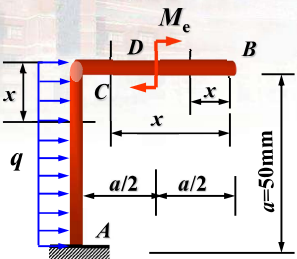
解得  $X_1 = -\frac{13}{32}Fl$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

例题3 已知两杆抗弯刚度均为EI, 不计剪力和轴力对刚架变形的影响, 求支座反力  $q=10\text{kN/m}$ ,  $M_e=50\text{kN}\cdot\text{m}$ .



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

(1) 用单位力法求  $\Delta_{1F}$

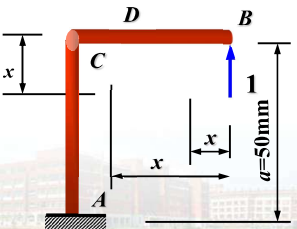
BD:  $M(x) = 0$        $\bar{M}(x) = x$

DC:  $M(x) = -M_e$        $\bar{M}(x) = x$

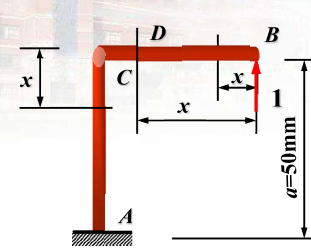
CA:  $M(x) = -M_e - \frac{qx^2}{2}$        $\bar{M}(x) = a$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \int_{a/2}^a (-M_e) \cdot x dx + \frac{1}{EI} \int_0^{a/2} (-M_e - \frac{qa^2}{2}) \cdot a dx$$

$$= -\frac{11}{8} M_e a^2 - \frac{qa^4}{6}$$



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



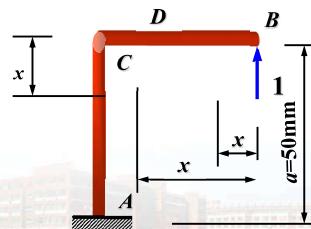
$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

(2) 用单位力法求  $\delta_{11}$

BD:  $\bar{M}(x) = x$

DC:  $\bar{M}(x) = x$

CA:  $\bar{M}(x) = a$



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{a/2} x \cdot x dx + \int_{a/2}^a x \cdot x dx + \int_0^a a \cdot a dx \right]$$

$$= \frac{4}{3} a^3$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

$$\delta_{11} = \frac{4}{3} a^3$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{11}{8} M_e a^2 - \frac{qa^4}{6}$$

代入  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$

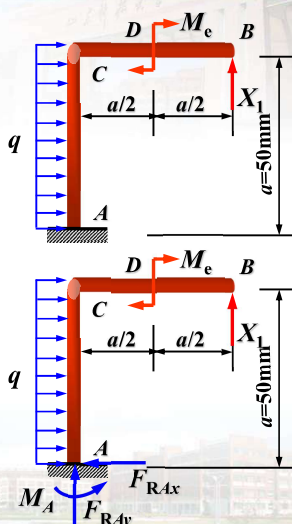
解得  $X_1 = \frac{1}{32a} (33M_e a + 4qa^4)$

$$= 16.56\text{kN}$$

$F_{R4y} = 16.56\text{kN} (\downarrow)$

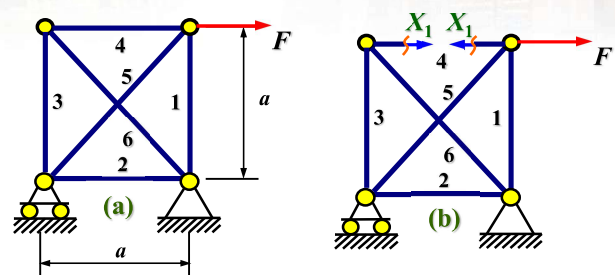
$F_{R4x} = 50\text{kN} (\leftarrow)$

$M_A = 922\text{kN}\cdot\text{m} (\curvearrowright)$



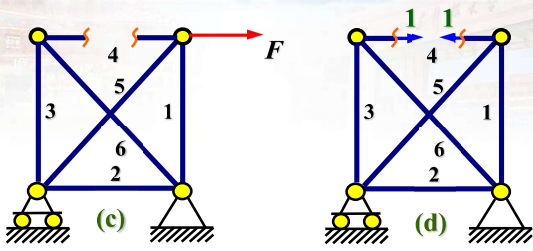
## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

例题6 计算图(a)中所示桁架各杆的内力, 设各杆的材料相同, 横截面面积相等.



解: 桁架内部有一个多余约束, 所以各杆的内力确是超静定的. 以杆件4为多余约束, 假想的把它切开, 并代之以多余约束力  $X_1$ , 得到图(b)所示的相当系统.

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



$\Delta_{1F}$ 表示杆4切口两侧截面因载荷而引起的沿 $X_1$ 方向的相对位移; $\delta_{11}$ 表示切口两侧截面因单位力而引起的沿 $X_1$ 方向的相对位移(图d)。

力法正则方程  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

由图(c) 求出基本静定系在 $F$ 作用下各杆的内力 $F_{Ni}$   
由图(d) 求出在单位力作用下各杆的内力 $\bar{F}_{Ni}$

杆件编号	$F_{Ni}$	$\bar{F}_{Ni}$	$l_i$	$F_{Ni}\bar{F}_{Ni}l_i$	$\bar{F}_{Ni}\bar{F}_{Ni}l_i$	$F_{Ni}^F = F_{Ni} + \bar{F}_{Ni}X_1$
1	$-F$	1	$a$	$-Fa$	$a$	$-F/2$
2	$-F$	1	$a$	$-Fa$	$a$	$-F/2$
3	0	1	$a$	0	$a$	$F/2$
4	0	1	$a$	0	$a$	$F/2$
5	$\sqrt{2}F$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}a$	$-2\sqrt{2}Fa$	$2\sqrt{2}a$	$F/\sqrt{2}$
6	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}a$	0	$2\sqrt{2}a$	$-F/\sqrt{2}$
				$\sum F_{Ni}\bar{F}_{Ni}l_i = -Fa(2+2\sqrt{2})$	$\sum \bar{F}_{Ni}\bar{F}_{Ni}l_i = 4(1+\sqrt{2})a$	

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

应用莫尔定理

$$\Delta_{1F} = \frac{\sum F_{Ni}\bar{F}_{Ni}l_i}{EA_i} = -\frac{(2+2\sqrt{2})Fa}{EA}$$

$$\delta_{11} = \frac{\sum \bar{F}_{Ni}\bar{F}_{Ni}l_i}{EA_i} = \frac{4(1+\sqrt{2})a}{EA}$$

代入方程后求得

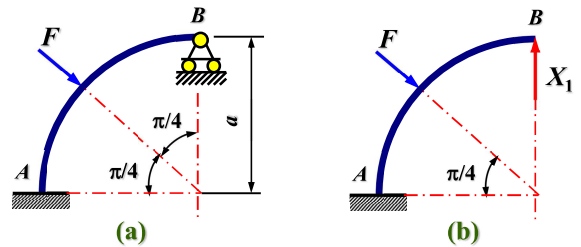
$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{(2+2\sqrt{2})Fa}{4(1+\sqrt{2})a} = \frac{F}{2}$$

由叠加原理可知桁架内任一杆件的实际内力

$$F_{Ni}^F = F_{Ni} + \bar{F}_{Ni}X_1$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

例题7 轴线为四分之一圆周的曲杆A端固定,B端铰支(图a)。在 $F$ 作用下,试求曲杆的弯矩图。设曲杆横截面尺寸远小于轴线半径,可以借用计算直杆变形的公式。



解:曲杆为一次超静定,解除多与支座B,得到A端固定,B端为自由端的基本静定系,多余约束力为 $X_1$ (图b)。

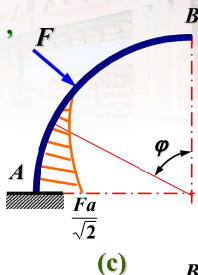
## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

当基本静定系上只作用外载荷 $F$ 时(图c),

弯矩为

$$M = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4})$$

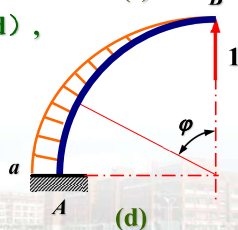
$$M = Fa \sin(\varphi - \frac{\pi}{4}) \quad (\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$$



当在B点沿 $X_1$ 方向作用一单位力时(图d),

弯矩方程为

$$\bar{M} = -a \sin \varphi$$



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

应用莫尔积分,并设曲杆的 $EI$ 为常量,

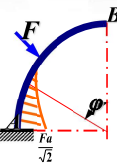
$$\Delta_{1F} = \int_s \frac{M\bar{M}ds}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/4} [Fa \sin(\varphi - \frac{\pi}{4})](-a \sin \varphi) a d\varphi$$

$$= -\frac{Fa^3 \pi}{8\sqrt{2}EI}$$

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\bar{M}\bar{M}ds}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (-a \sin \varphi)^2 a d\varphi = \frac{\pi a^3}{4EI}$$

将 $\Delta_{1F}$ 和 $\delta_{11}$ 代入  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$

$$\frac{\pi a^3}{4EI} X_1 - \frac{Fa^3 \pi}{8\sqrt{2}EI} = 0 \quad \text{解得} \quad X_1 = \frac{F}{2\sqrt{2}}$$





## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

$$M_{\text{总}} = M + X_1 \bar{M}$$

曲杆任一横截面上的弯矩

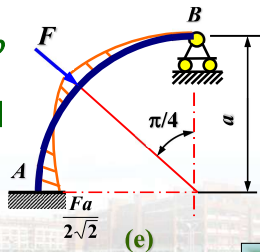
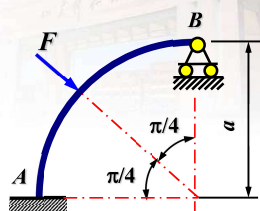
$$M = -X_1 a \sin \varphi = -\frac{Fa}{2\sqrt{2}} \sin \varphi$$

$$(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4})$$

$$M = Fa \sin(\varphi - \frac{\pi}{4}) - X_1 a \sin \varphi$$

$$= Fa[\sin(\varphi - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin \varphi]$$

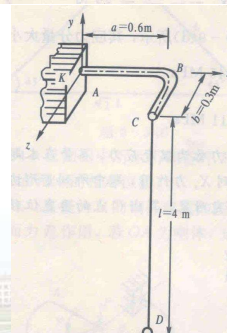
$$(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$$



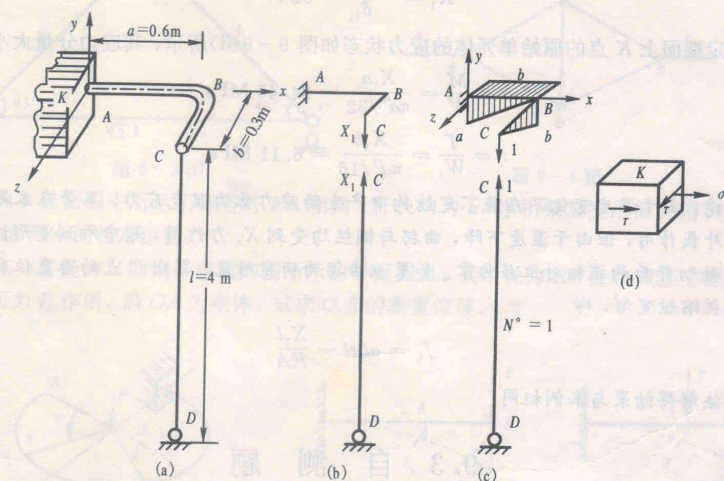
## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

《辅导》p190

例 9-9 一钢制曲拐 ABC 为等截面圆杆，直径  $d=20$  mm，并在 C 端用一钢丝 CD 联接起来 (C, D 均为铰链联接)。钢丝为圆截面，直径  $d_0=1$  mm，如图 9-9(a) 所示。今钢丝由于温度下降  $\Delta t=80$  °C，试求此时曲拐固定端截面上 K 点的原始单元体的应力状态，并示出单元体四周应力的大小。已知钢的弹性模量  $E=200$  GPa，剪切弹性模量  $G=84$  GPa 和钢的线膨胀系数  $\alpha=12 \times 10^{-6}$  1/°C。



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

解：系统为一次静不定，解除 C 处约束， $X_1$  为多余约束力 (图 9-9(b))。当钢丝温度下降  $\Delta t$  时，有如下正则方程

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0$$

作单位力  $X_1=1$  的内力图如图 9-9(c) 所示，有

AB 段  $T(x_1) = b \quad M_1(x_1) = x_1$

BC 段  $M_2(x_1) = z_1$

CD 段  $N = 1$

由功能原理，在单位力作用下，C 点位移为  $\delta_{11}$ ，则

$$\delta_{11} = \int_{AB} \frac{M_1^2(x_1)}{2EI} dx_1 + \int_{AB} \frac{T^2(x_1)}{2GI_p} dx_1 + \int_{BC} \frac{M_2^2(x_1)}{2EI} dz_1 + \frac{N^2 l_{CD}}{2EA}$$

其中  $I = \frac{\pi d^4}{64}$ ,  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ ,  $A = \frac{\pi d^2}{4}$

解得

$$\delta_{11} = 12.01 \times 10^{-5} \text{ m/N}$$

$$\Delta_{1t} = -\alpha \Delta t l_{CD} = -384 \times 10^{-5} \text{ m}$$

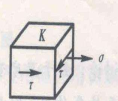
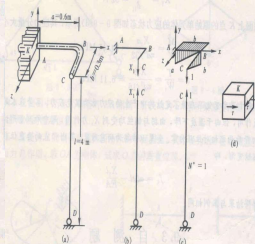
所以

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = 32 \text{ N}$$

曲拐固定端面上 K 点的原始单元体的应力状态如图 9-9(d) 所示，其应力分量大小为

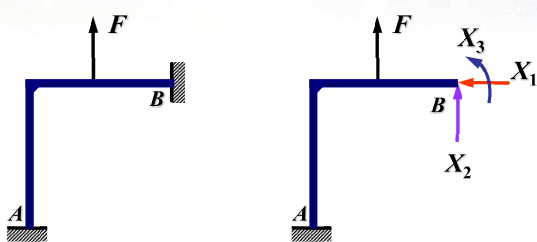
$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{X_1 a}{\pi d^3 / 32} = 24.45 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{X_1 b}{\pi d^3 / 16} = 6.11 \text{ MPa}$$



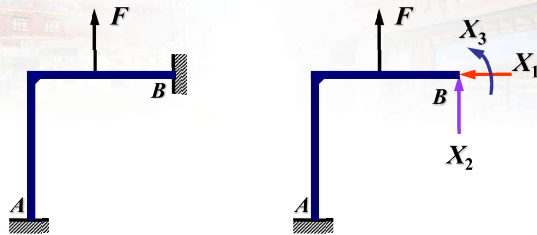
## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

对于有多个多余约束反力的静不定系统的正则方程如下：



这是三次超静定问题

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

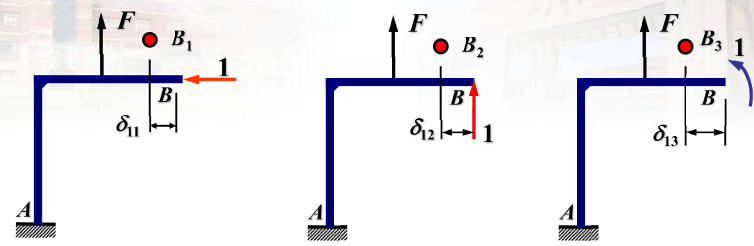


在静定基上，由  $F, X_1, X_2, X_3$  单独作用在点引起的水平位移分别记作  $\Delta_{1F}, \Delta_{1X_1}, \Delta_{1X_2}, \Delta_{1X_3}$

1 表示 B 点的水平位移方向

$$B \text{ 点的水平位移等于零 } \Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} + \Delta_{1X_3} + \Delta_{1F} = 0$$

静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

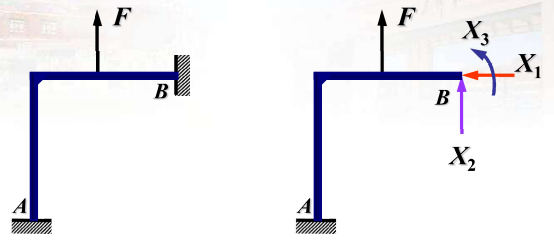


$$A_{1X_1} + A_{1X_2} + A_{1X_3} + A_{1F} = 0$$

$$A_{1X_1} = \delta_{11}X_1 \quad A_{1X_2} = \delta_{12}X_2 \quad A_{1X_3} = \delta_{13}X_3$$

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + A_{1F} = 0$$

静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

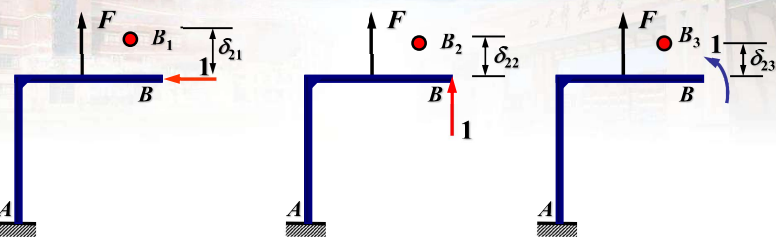


2表示B点的铅垂位移方向

B点的铅垂位移等于零

$$A_{2X_1} + A_{2X_2} + A_{2X_3} + A_{2F} = 0$$

静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

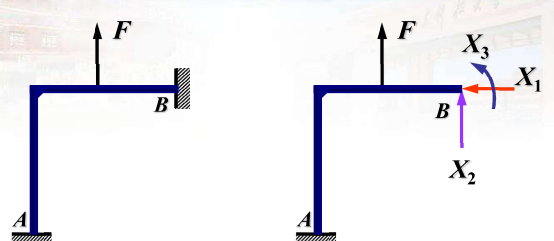


$$A_{2X_1} + A_{2X_2} + A_{2X_3} + A_{2F} = 0$$

$$A_{2X_1} = \delta_{21}X_1 \quad A_{2X_2} = \delta_{22}X_2 \quad A_{2X_3} = \delta_{23}X_3$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + A_{2F} = 0$$

静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶



$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + A_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + A_{2F} = 0 \quad \delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + A_{3F} = 0 \quad \text{三次超静定系统的正则方程}$$

静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

正则方程的推广:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + A_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + A_{2F} = 0$$

$$\dots$$

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + A_{nF} = 0$$

由位移互等定理知:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx$$

$$\Delta_{iF} = \int \frac{M \bar{M}_i}{EI} dx$$

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + \dots$$

$$= M_F + \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i$$

静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

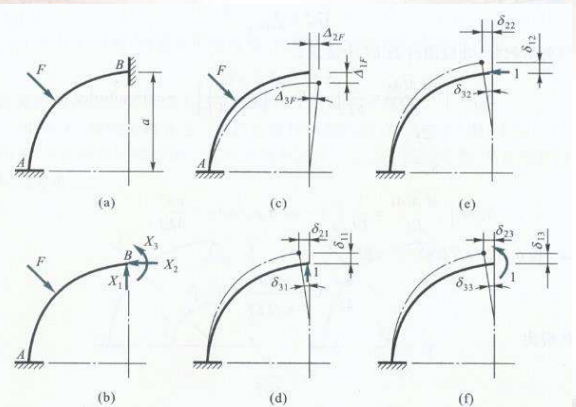


图 14.10



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

例题4 试求图示刚架的全部约束反力,刚架EI为常数.

解: (1) 刚架有两个多余约束,为二次静不定结构;

(2) 选取并去除多余约束,代以多余约束反力;

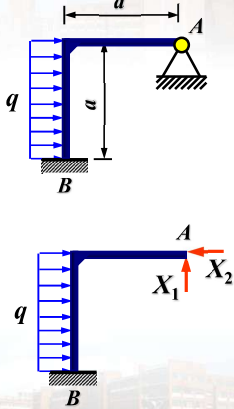
(3) 建立力法正则方程

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0$$

(4) 计算系数 $\delta_{ij}$ 和自由项 $\Delta_{iF}$

用莫尔定理求得



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \int_0^a \left(-\frac{1}{2}qx_2^2\right) \cdot a \cdot dx_2 = -\frac{qa^4}{6EI}$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \int_0^a \left(-\frac{1}{2}qx_2^2\right) \cdot x_2 \cdot dx_2 = -\frac{qa^4}{8EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left( \int_0^a x_1^2 dx_1 + \int_0^a a^2 dx_2 \right) = \frac{4a^3}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^a x_2^2 dx_2 = \frac{a^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^a ax_2 dx_2 = \frac{a^3}{2EI}$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

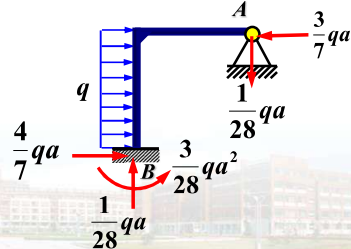
(5) 求多余约束反力

将上述结果代入力法正则方程可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{4a^3}{3EI} X_1 + \frac{a^3}{2EI} X_2 - \frac{qa^4}{6EI} &= 0 \\ \frac{a^3}{2EI} X_1 + \frac{a^3}{3EI} X_2 - \frac{qa^4}{8EI} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} X_1 &= -\frac{1}{28}qa(\downarrow) \\ X_2 &= \frac{3}{7}qa(\leftarrow) \end{aligned}$$

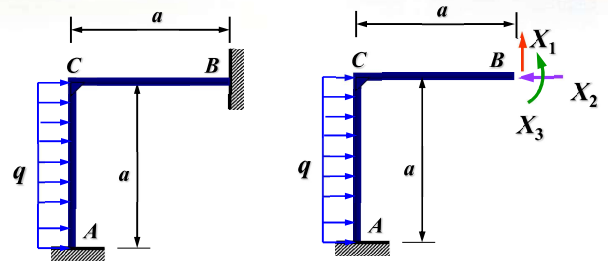
(6) 求其它支反力

由平衡方程得其它支反力,全部表示于图中.

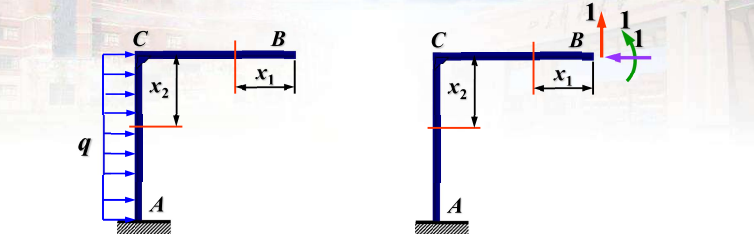


## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

例题5 求解静不定结构刚架,设两杆的EI相等.



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



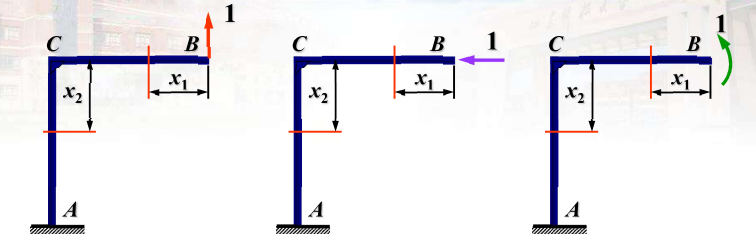
(1) 用单位荷载法求  $\Delta_{1F}$ ,  $\Delta_{2F}$ ,  $\Delta_{3F}$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \int_0^a \frac{qx_2^2}{2} \cdot a \cdot dx_2 = -\frac{qa^4}{6EI}$$

$$\Delta_{2F} = -\frac{1}{EI} \int_0^a \frac{qx_2^2}{2} \cdot x_2 \cdot dx_2 = -\frac{qa^4}{8EI}$$

$$\Delta_{3F} = -\frac{1}{EI} \int_0^a \frac{qx_2^2}{2} \cdot 1 \cdot dx_2 = -\frac{qa^3}{6EI}$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

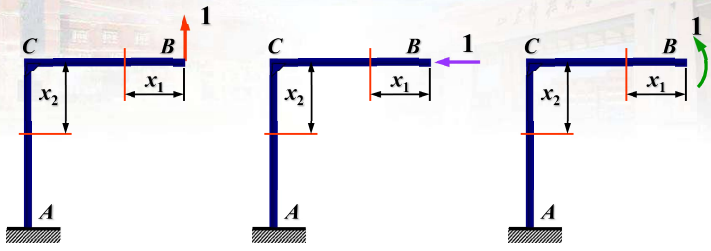


(2) 求  $\delta_{ii}$   $\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a x_1 \cdot x_1 \cdot dx_1 + \int_0^a a \cdot a \cdot dx_2 \right] = \frac{4a^3}{3EI}$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^a x_2 \cdot x_2 \cdot dx_2 = \frac{a^3}{3EI}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a 1 \cdot 1 \cdot dx_1 + \int_0^a 1 \cdot 1 \cdot dx_2 \right] = \frac{2a}{EI}$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



(3) 求  $\delta_{ij}$   $\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^a x_2 \cdot a \cdot dx_2 = \frac{a^3}{2EI}$

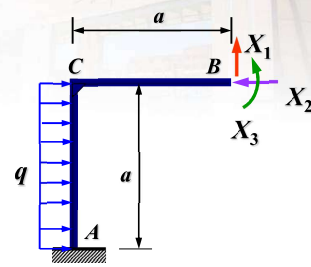
$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a x_1 \cdot 1 \cdot dx_1 + \int_0^a a \cdot 1 \cdot dx_2 \right] = \frac{3a^2}{2EI}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI} \int_0^a x_2 \cdot 1 \cdot dx_2 = \frac{a^2}{2EI}$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{4a^3}{3EI} & \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{a^3}{2EI} \\ \delta_{22} &= \frac{a^3}{3EI} & \delta_{13} = \delta_{31} &= \frac{3a^2}{2EI} \\ \delta_{33} &= \frac{2a}{EI} & \delta_{23} = \delta_{32} &= \frac{a^2}{2EI} \end{aligned}$$

(4) 求  $X_1, X_2, X_3$



代入正则方程:  $\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0$$

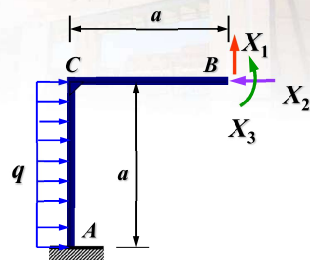
## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

化简得:

$$8aX_1 + 3aX_2 + 9X_3 = qa^2$$

$$12aX_1 + 8aX_2 + 12X_3 = 3qa^2$$

$$12aX_1 + 8aX_2 + 12X_3 = 3qa^2$$



求出:

$$X_1 = -\frac{qa}{16} \quad X_2 = \frac{7qa}{16} \quad X_3 = \frac{qa^2}{48}$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

例 14.4 求解图 14.11a 所示超静定刚架。设两杆的 EI 相等。

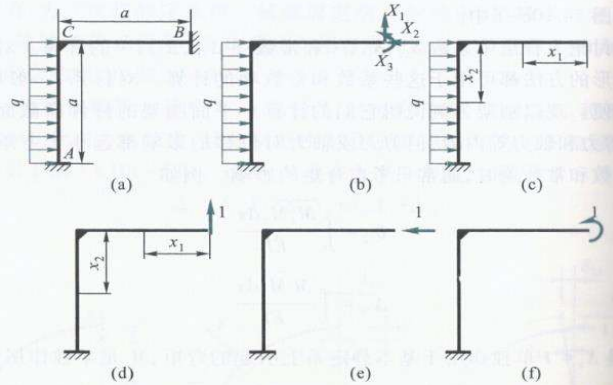


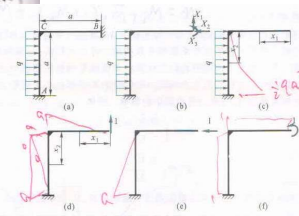
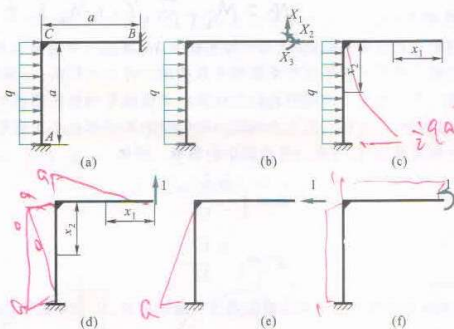
图 14.11

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

解: 与图 14.10 中两端固定的曲杆一样, 刚架是一个三次超静定结构。解除固定支座 B 的 3 个多余约束, 并代以 3 个多余未知力, 得图 14.11b 所示相当系统。采用与图 14.10 相同的记号, 正则方程就是方程式 (14.2)。由图 14.11c, d, e 和 f, 应用莫尔定理分别计算方程式 (14.2) 中的 3 个常数项和 9 个系数:

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= -\frac{1}{EI} \int_0^a \frac{qx_2^2}{2} \cdot a \cdot dx_2 = -\frac{qa^4}{6EI} = -\frac{1}{3} qa^2 \cdot \frac{1}{2} a \\ \Delta_{2F} &= -\frac{1}{EI} \int_0^a \frac{qx_2^2}{2} \cdot x_2 \cdot dx_2 = -\frac{qa^4}{8EI} = -\frac{1}{3} qa^2 \cdot \frac{1}{4} a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= -\frac{1}{EI} \int_0^a \frac{qx_2^2}{2} \cdot 1 \cdot dx_2 = -\frac{qa^3}{6EI} = -\frac{1}{3} qa^2 \cdot \frac{1}{2} a \\ \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \int_0^a x_1 \cdot x_1 \cdot dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a a \cdot a \cdot dx_2 = \frac{4a^3}{3EI} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a \right) \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EI} \int_0^a x_2 \cdot x_2 \cdot dx_2 = \frac{a^3}{3EI} = \frac{1}{3} a \cdot a \cdot a \\ \delta_{33} &= \frac{1}{EI} \int_0^a 1 \cdot 1 \cdot dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a 1 \cdot 1 \cdot dx_2 = \frac{2a}{EI} = 1 \cdot a + 1 \cdot a \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{1}{EI} \int_0^a x_2 \cdot a \cdot dx_2 = \frac{a^3}{2EI} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot a \\ \delta_{13} = \delta_{31} &= \frac{1}{EI} \int_0^a x_1 \cdot 1 \cdot dx_1 + \frac{1}{EI} \int_0^a a \cdot 1 \cdot dx_2 = \frac{3a^2}{2EI} = \frac{1}{2} (a \cdot a + a \cdot a) \\ \delta_{23} = \delta_{32} &= \frac{1}{EI} \int_0^a x_2 \cdot 1 \cdot dx_2 = \frac{a^2}{2EI} = \frac{1}{2} a \cdot a \end{aligned}$$





## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

把上面求出的常数项和系数代入正则方程(14.2), 经整理化简后, 得到

$$\left. \begin{aligned} 8aX_1 + 3aX_2 + 9X_3 &= qa^2 \\ 12aX_1 + 8aX_2 + 12X_3 &= 3qa^2 \\ 9aX_1 + 3aX_2 + 12X_3 &= qa^2 \end{aligned} \right\}$$

解以上联立方程组, 求出

$$X_1 = -\frac{qa}{16}, \quad X_2 = \frac{7qa}{16}, \quad X_3 = \frac{qa^2}{48}$$

式中负号表示  $X_1$  与假设的方向相反, 即应该向下。求出了 3 个多余约束力, 也就是求得了支座 B 的约束力, 进一步可作刚架的弯矩图, 这些不再赘述。

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

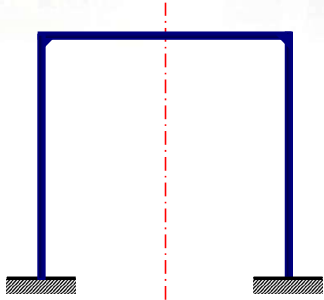
### § 14-3 对称及反对称性质的应用 (Application about symmetrical and antisymmetrical properties)

#### 一、对称结构的对称变形与反对称变形

#### (Symmetrical and antisymmetrical deformation in symmetrical structure)

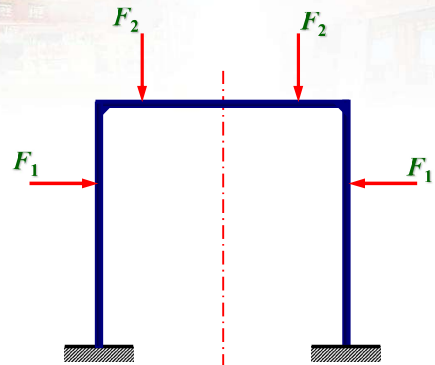
结构几何尺寸, 形状, 构件材料及约束条件均对称于某一轴, 则称此结构为对称结构。

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶



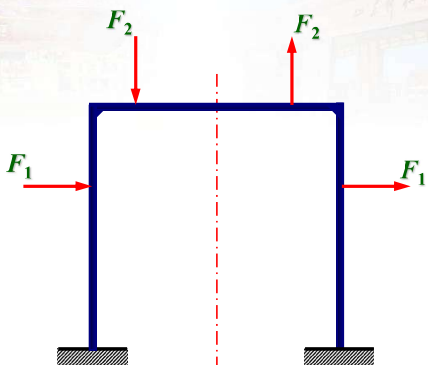
**对称结构 (symmetrical structure)**: 若将结构绕对称轴对折后, 结构在对称轴两边的部分将完全重合。

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶



**对称载荷 (symmetrical load)**: 绕对称轴对折后, 结构在对称轴两边的载荷的作用点和作用方向将重合, 而且每对力数值相等。

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶



**反对称载荷 (Antisymmetrical load)**: 绕对称轴对折后, 结构在对称轴两边的载荷的数值相等, 作用点重合而作用方向相反。

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

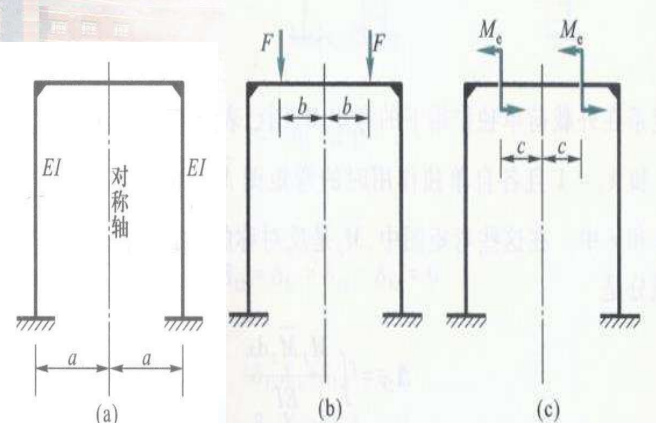
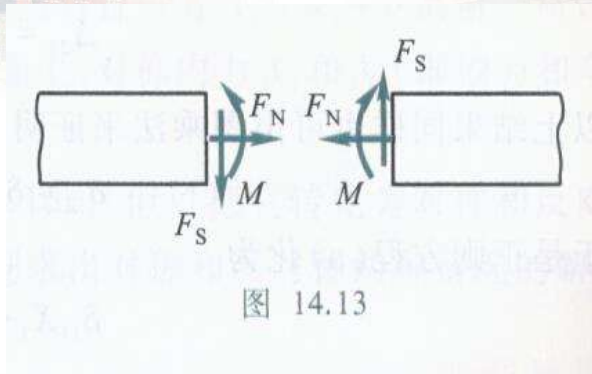
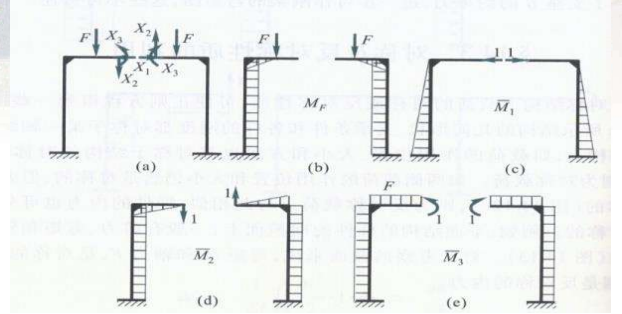


图 14.12

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

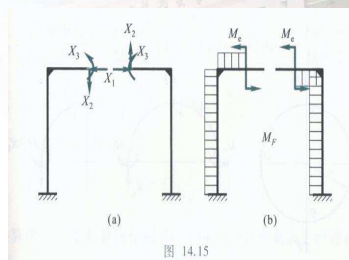
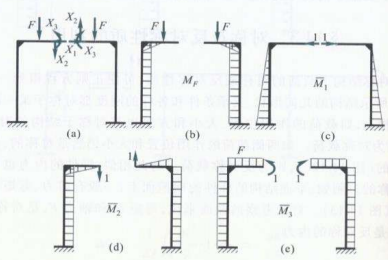


$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} &= 0 & \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} &= 0 & \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} &= 0 & \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta_{2F} = \int_l \frac{M_F \bar{M}_2 dx}{EI} = 0$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶



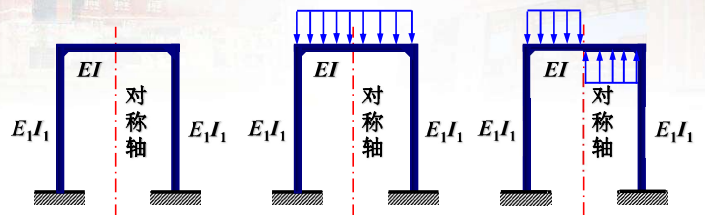
$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} &= 0 \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0 \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

$$\Delta_{1F} = \int_l \frac{M_F \bar{M}_1 dx}{EI} = 0, \quad \Delta_{3F} = \int_l \frac{M_F \bar{M}_3 dx}{EI} = 0$$

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶



当对称结构受力也对称于结构对称轴,则此结构将产生对称变形;

若外力反对称于结构对称轴,则结构将产生反对称变形.

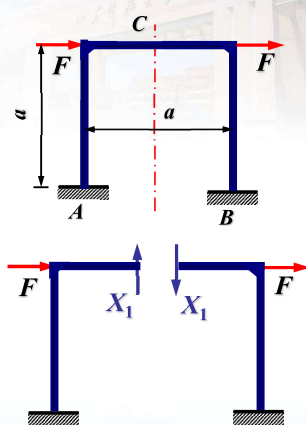
## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

例8 试求图示刚架的全部约束反力,并作弯矩图,刚架EI为常数.

解: 图示刚架有三个多余未知力. 但由于结构是对称的,而载荷反对称,故对称轴横截面上轴力,弯矩为零,只有一个多余未知力(剪力),只需列出一个正则方程求解.

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

用莫尔定理求 $\Delta_{1F}$ 和 $\delta_{11}$ .



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

$$\Delta_{1F} = \frac{2}{EI} \int_0^a (-Fx_2) \cdot \frac{a}{2} \cdot dx_2 = -\frac{Fa^3}{2EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left[ \int_0^a x_1^2 \cdot dx_1 + \int_0^a \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot dx_2 \right] = \frac{7a^3}{12EI}$$

$$\text{代入正则方程} \quad \frac{7a^3}{12EI} X_1 - \frac{Fa^3}{2EI} = 0$$

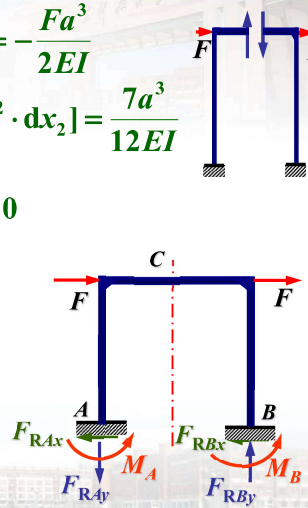
$$X_1 = \frac{6}{7}F$$

由平衡方程求得:

$$F_{R4y} = F_{RBy} = \frac{6}{7}F$$

$$F_{R4x} = F_{RBx} = F$$

$$M_A = M_B = \frac{4}{7}Fa$$





## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

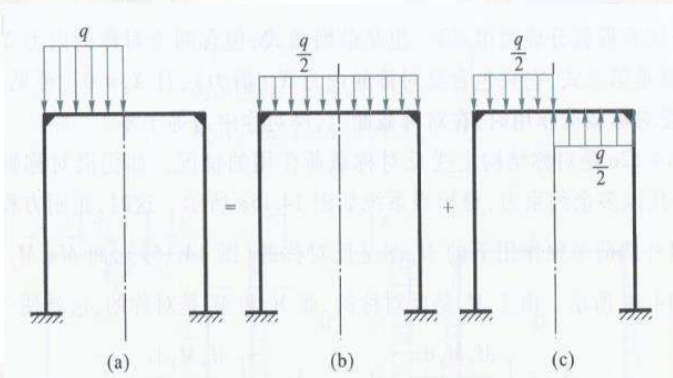
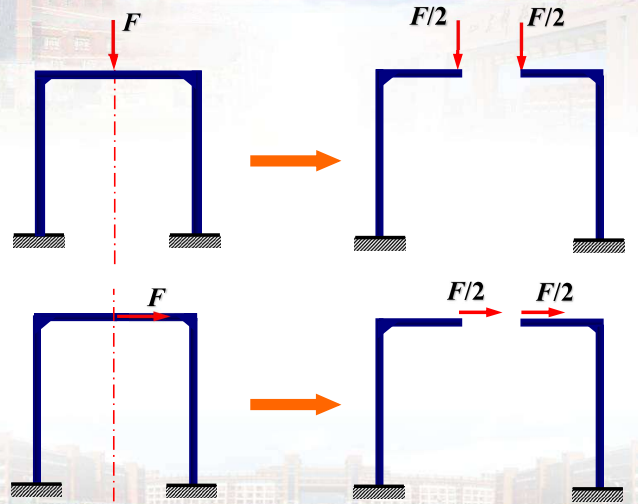


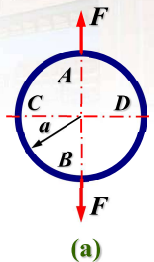
图 14.16

## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



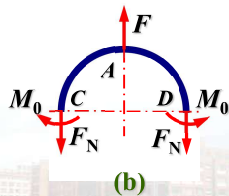
## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

例题9 在等截面圆环直径AB的两端,沿直径作用方向相反的一对F力(图a).试求AB直径的长度变化.



解:沿水平直径将圆环切开(图b),由载荷的对称性,截面C和D上的剪力等于零,只有轴力 $F_N$ 和弯矩 $M_0$ .

利用平衡条件求出 $F_N=F/2$ ,只有 $M_0$ 为多余约束力.



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

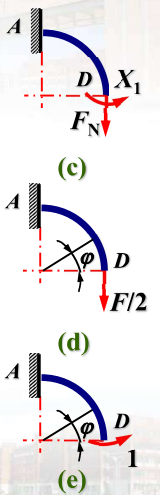
根据对称性,只研究圆环的四分之一(图c),变形协调条件为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

由图(d)和图(e)求出

$$M = \frac{Fa}{2}(1 - \cos\varphi)$$

$$\bar{M} = 1$$



## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \int_0^{\pi/2} \frac{M\bar{M}ad\varphi}{EI} = \frac{Fa^2}{2EI} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\varphi)(-1)d\varphi \\ &= -\frac{Fa^2}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

$$\delta_{11} = \int_0^{\pi/2} \frac{\bar{M}\bar{M}ad\varphi}{EI} = \frac{a}{2EI} \int_0^{\pi/2} (-1)^2 d\varphi = \frac{\pi a}{2EI}$$

将 $\Delta_{1F}$ 和 $\delta_{11}$ 代入变形协调方程中,解得  $X_1 = Fa\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)$

任意截面上的弯矩

$$M(\varphi) = \frac{Fa}{2}(1 - \cos\varphi) - Fa\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) = Fa\left(\frac{1}{\pi} - \frac{\cos\varphi}{2}\right)$$

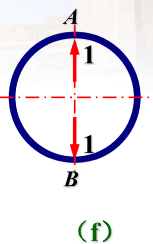
## 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

在A,B两点作用单位力(图f),则单位力作用下圆环内的弯矩为

$$\bar{M}(\varphi) = a\left(\frac{1}{\pi} - \frac{\cos\varphi}{2}\right) \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$$

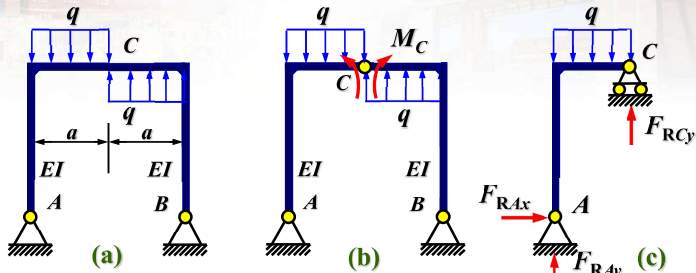
使用莫尔积分求A,B两点的相对位移 $\delta$

$$\begin{aligned} \delta &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)\bar{M}(\varphi)ad\varphi}{EI} = \frac{4Fa^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\cos\varphi}{2}\right)^2 d\varphi \\ &= \frac{Fa^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) = 0.149 \frac{Fa^3}{EI} \end{aligned}$$



# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

例题10 求图a所示钢架的反力。



解: 钢架有4个反力, 是一次超静定结构。基本静定系如图b。

结构上的载荷是反对称的, C截面只有剪力不为零。

钢架的左半部分简化成图(c)所示情况, 由平衡方程得到:

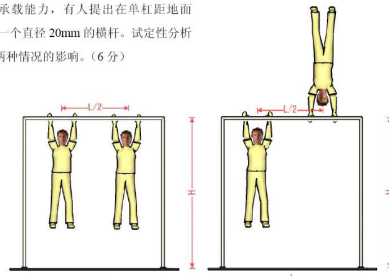
$$F_{RAy} = \frac{qa}{2} \quad F_{RCy} = \frac{qa}{2} \quad F_{RAx} = 0$$

# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

## 三、趣味单杠(30分)

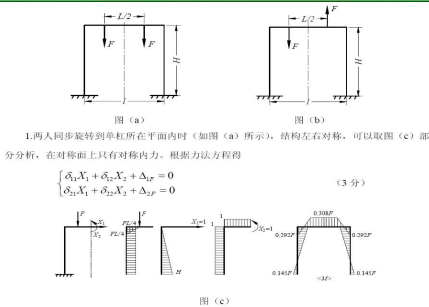
单杠运动是奥运会、世界体操锦标赛、世界杯体操比赛中男子体操比赛项目之一。单杠是体操比赛中最具观赏性的项目, 也是观众最喜欢的运动, 在学校和健身场所拥有众多的爱好者, 小李和小张就是其中之一。一天, 他们准备在单杠上进行大回环比赛。假设单杠的横杆和立柱均为直径  $D=28\text{mm}$  的钢杆, 弹性模量  $E=200\text{GPa}$ , 许用应力  $[\sigma]=160\text{MPa}$ , 横杆长  $L=2.4\text{m}$ , 立柱高  $H=2.6\text{m}$ 。立柱与地面、横杆与立柱之间均为固定连接。假设两人旋转到单杠所在平面内的惯性载荷均为  $F=1000\text{N}$ , 不计人的自重。

1. 试分析两人同步旋转到单杠所在平面内时, 结构中的最大应力。(12分)
2. 若两人相差  $180^\circ$  旋转到单杠所在平面内, 对结构中的最大应力有什么影响。(12分)
3. 为提高结构承载能力, 有人提出在单杠距地面  $0.6\text{m}$  处增加一个直径  $20\text{mm}$  的横杆。试定性分析该杆对上述两种情况的影响。(6分)



# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

解法(一):



1. 两人同步旋转到单杠所在平面内时(如图(a)所示), 结构左右对称, 可以取图(c)部分分析, 在对称面上只有对称内力。根据力法方程得

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (3 \text{分})$$

分别作出  $F$  和单位力引起的弯矩图, 可得:

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{2} \times H \times H \times \frac{2}{3} H = \frac{H^3}{3} = 5.86$$

$$EI\delta_{22} = 1 \times \frac{L}{2} \times 1 + 1 \times H \times 1 = \frac{L}{2} + H = 3.8$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -\frac{1}{2} \times H \times H \times 1 = -\frac{H^2}{2} = -3.38$$

$$EI\Delta_{1F} = \frac{1}{2} \times H \times H \times \frac{1}{4} FL = \frac{FLH^2}{8} = 2.028F$$

$$EI\Delta_{2F} = -\frac{1}{2} \times \frac{L}{4} \times \frac{1}{4} FL \times 1 - \frac{1}{4} FL \times H \times 1 = -\frac{FL^2}{32} - \frac{FLH}{4} = -1.74F$$

代入力法方程解得  $X_1 = -0.168F$ ,  $X_2 = 0.308F$  (6分)

# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

梁的抗弯截面模量  $W = \frac{\pi}{32} D^3 = \frac{\pi}{32} \times 28^3 = 2155\text{mm}^3$

最大应力  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = 143\text{MPa} < [\sigma]$

所以, 结构安全。(2分)

2. 若两人相差  $180^\circ$  旋转到单杠所在平面内(如图(b)所示), 结构左右对称, 可以取图(d)部分分析, 在对称面上只有反对称内力。根据力法方程得

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0 \quad (3 \text{分})$$

分别作出  $F$  和单位力引起的弯矩图如图(d)所示, 可得:

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{3} + \frac{L}{2} \times H \times \frac{L}{2} = \frac{L^3}{24} + \frac{EH}{4} = 4.32$$

$$EI\Delta_{1F} = -\frac{1}{2} \times \frac{FL}{4} \times \frac{L}{4} \times \frac{5L}{12} - \frac{FL}{4} \times H \times \frac{L}{2} = -\left(\frac{5FL^3}{384} + \frac{FEH}{8}\right) = -2.052F$$

故  $X_1 = -\Delta_{1F} / \delta_{11} = 0.475F$  (6分)

作出结构的弯矩图, 可知最大弯矩  $M_{\max} = 0.285F = 285\text{N} \cdot \text{m}$  (1分)

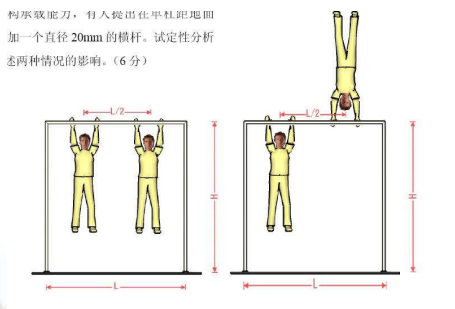
梁的抗弯截面模量  $W = \frac{\pi}{32} D^3 = \frac{\pi}{32} \times 28^3 = 2155\text{mm}^3$

最大应力  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = 132\text{MPa} < [\sigma]$

所以, 结构安全。(2分)

# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

3. 在结构中增加横杆后, 图(b)为反对称问题, 在对称面上只有反对称内力, 故AB杆轴力为零, 对图(b)情况无影响。图(a)为对称问题, 在对称面上只有对称内力, 故AB杆轴力不为零, 所以, 对图(a)情况有影响。(6分)



# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

## § 12-4 连续梁及三弯矩方程

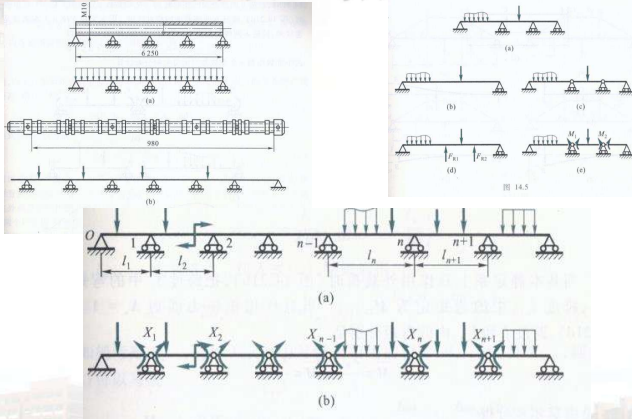
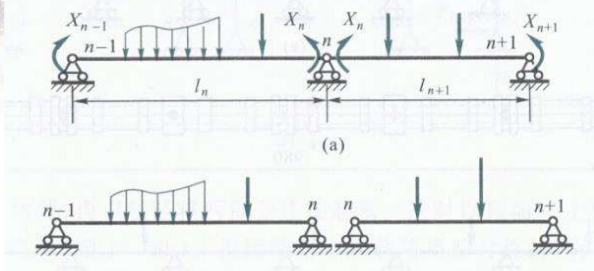


图 14.20



# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



$$\Delta_n = \delta_{n(n-1)} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n(n+1)} X_{n+1} + \Delta_{nF}$$

$$\delta_{n(n-1)} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n(n+1)} X_{n+1} + \Delta_{nF} = 0$$

# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

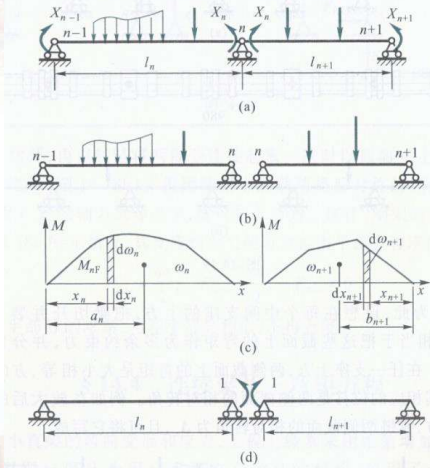
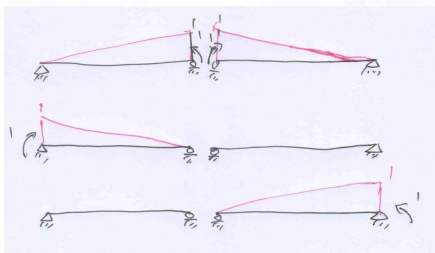


图 14.21

# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)



# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

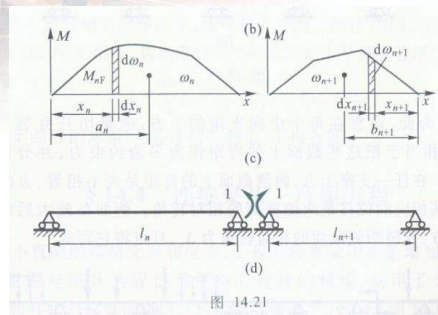


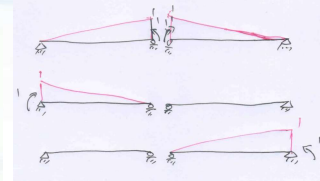
图 14.21

$$\bar{M} = \frac{x_n}{l_n}, \quad \bar{M} = \frac{x_{n+1}}{l_{n+1}}$$

得

$$\Delta_{nF} = \int_{l_n} \frac{M_{nF} x_n dx_n}{EI l_n} + \int_{l_{n+1}} \frac{M_{(n+1)F} x_{n+1} dx_{n+1}}{EI l_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{l_n} \int_{l_n} x_n d\omega_n + \frac{1}{l_{n+1}} \int_{l_{n+1}} x_{n+1} d\omega_{n+1} \right)$$



$$\int_{l_n} x_n d\omega_n = a_n \omega_n$$

单独作用下, 跨度  $l_{n+1}$  内弯矩图

$$\int_{l_{n+1}} x_{n+1} d\omega_{n+1} = b_{n+1} \omega_{n+1}$$

$$\Delta_{nF} = \frac{1}{EI} \left( \frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right)$$

# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

$$\delta_{nn} = \int_{l_n} \frac{1}{EI} \left( \frac{x_n}{l_n} \right) \left( \frac{x_n}{l_n} \right) dx_n + \int_{l_{n+1}} \frac{1}{EI} \left( \frac{x_{n+1}}{l_{n+1}} \right) \left( \frac{x_{n+1}}{l_{n+1}} \right) dx_{n+1}$$

$$= \frac{1}{3EI} (l_n + l_{n+1})$$

1 欲令对梁 (荷载) 才是相对转角

类似地还可求出

对右段

$$\delta_{n(n-1)} = \frac{l_n}{6EI}, \quad \delta_{n(n+1)} = \frac{l_{n+1}}{6EI}$$

将  $\Delta_{nF}, \delta_{n(n-1)}, \delta_{nn}$  和  $\delta_{n(n+1)}$  代入式 (a), 整理后得出

$$X_{n-1} l_n + 2X_n (l_n + l_{n+1}) + X_{n+1} l_{n+1} = - \frac{6\omega_n a_n}{l_n} - \frac{6\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (14.5)$$

如把弯矩  $X_{n-1}, X_n$  和  $X_{n+1}$  改为习惯上使用的记号  $M_{n-1}, M_n$  和  $M_{n+1}$ , 则公式 (14.5) 可以写成

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = - \frac{6\omega_n a_n}{l_n} - \frac{6\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (14.6)$$

这就是三弯矩方程。

# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure)

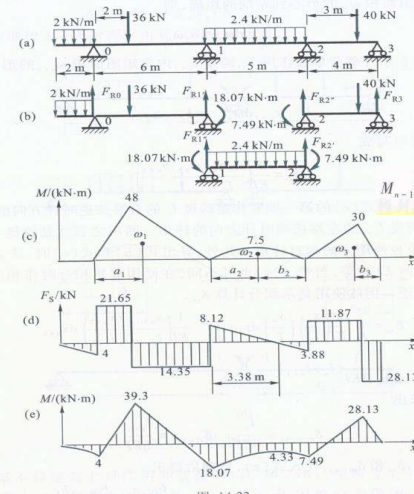


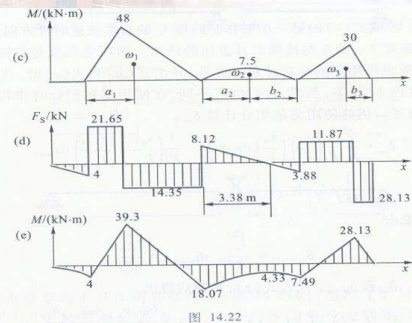
图 14.22

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = - \frac{6\omega_n a_n}{l_n} - \frac{6\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}$$

$$22M_1 + 5M_2 = -435$$

$$5M_1 + 18M_2 = -225$$

# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶



$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{6\omega_n a_n}{l_n} - \frac{6\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}$$

$$l_1 = 6 \text{ m}, l_2 = 5 \text{ m}, l_3 = 4 \text{ m}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \times 48 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 6 \text{ m} = 144 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3} \times 7.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 5 \text{ m} = 25 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \times 30 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 4 \text{ m} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$a_1 = \frac{6+2}{3} \text{ m} = \frac{8}{3} \text{ m}$$

$$a_2 = b_2 = \frac{5}{2} \text{ m}$$

$$b_3 = \frac{4+1}{3} \text{ m} = \frac{5}{3} \text{ m}$$

图 14.22

# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\frac{6\omega_n a_n}{l_n} - \frac{6\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}$$

梁在左端有外伸部分, 支座 0 上梁截面的弯矩显然是

$$M_0 = -\frac{1}{2} \times (2 \text{ kN/m}) (2 \text{ m})^2 = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

对跨度  $l_1$  和跨度  $l_2$  写出三弯矩方程。这时  $n = 1, M_{n-1} = M_0 = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}, M_n = M_1,$

$M_{n+1} = M_2, l_n = l_1 = 6 \text{ m}, l_{n+1} = l_2 = 5 \text{ m}, a_n = a_1 = \frac{8}{3} \text{ m}, b_{n+1} = b_2 = \frac{5}{2} \text{ m}。$  代入公式 (14.6), 得

$$-4 \times 6 + 2M_1(6 + 5) + M_2 \times 5 = \frac{6 \times 144 \times 8}{6 \times 3} - \frac{6 \times 25 \times 5}{5 \times 2}$$

式中  $M_1$  与  $M_2$  的单位为  $\text{kN} \cdot \text{m}。$  再对跨度  $l_2$  和  $l_3$  写出三弯矩方程。这时  $n = 2,$

$M_{n-1} = M_1, M_n = M_2, M_{n+1} = M_3 = 0, l_n = l_2 = 5 \text{ m}, l_{n+1} = l_3 = 4 \text{ m}, a_n = a_2 = \frac{5}{2} \text{ m}, b_{n+1} =$

$b_3 = \frac{5}{3} \text{ m}。$  代入公式 (14.6), 得

$$M_1 \times 5 + 2M_2(5 + 4) + 0 \times 4 = -\frac{6 \times 25 \times 5}{5 \times 2} - \frac{6 \times 60 \times 5}{4 \times 3}$$

式中  $M_1$  与  $M_2$  的单位为  $\text{kN} \cdot \text{m}。$

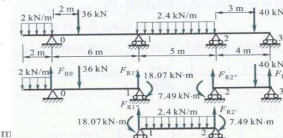
整理上面的两个三弯矩方程, 得

$$22M_1 + 5M_2 = -435$$

$$5M_1 + 18M_2 = -225$$

解以上联立方程组, 得出

$$M_1 = -18.07 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_2 = -7.48 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



# 静不定结构 (Statically Indeterminate Structure) ◀ ▶

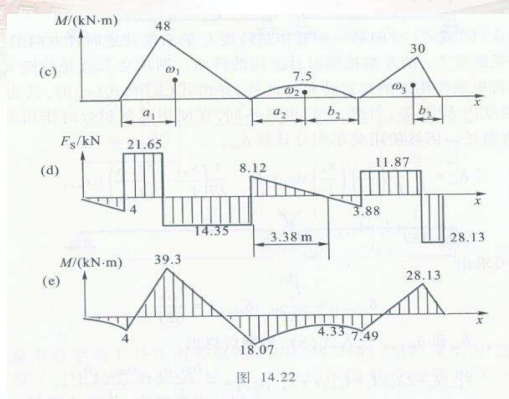


图 14.22

## 第十二章结束

