第 2 章 $\vec{v}=v\vec{\tau},a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+v\frac{d\vec{\tau}}{dt}=..+v^2\frac{d\tau}{ds}=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$// 惯性系: 相对于它，所有不受外力作用的物体都保持匀速运动或静止。惯性定律: 任何物体都将继续保持静止或匀速直线运动状态, 直到外力使它改变这一状态.// 极坐标:$v=\dot{\rho}\rho^0+\rho\dot{\varphi}\varphi^0,a=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\rho^0+(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi})\varphi^0$// 动量矩 (表征转动物体传递机械运动能力的物理量):$m_O(mv)=rXmv$, 动量矩定理:$\frac{d(rXmv)}{dt}=rXF$, 动量矩守恒:$rXmv=c$

第 3 章由运动学分析就能确定的对物体各部分相对位移和相对速度的限制称为约束 (相对位移的限制-几何约束，相对速度-运动约束)，约束规定的方程称为约束方程// 在完整约束的条件下，确定质点系位置的独立坐标的个数 N 称为该质点系的自由度数，反映质点系运动的自由程度；足以确定质点系位置的 N 个独立的参数 q1,q2,...,qN 称为质点系的广义坐标。// 定轴转动,$v=\omega XR,a=\varepsilon XR+\omega Xv$// 速度合成:$v_a=v_e+v_r$, 加速度合成:$a_e+a_r+2\omega Xv_r(a_k)$

第 4 章基点法 (平动系无科式加速度):$v_B=V_A+(\omega X\vec{AB}),a_B=a_A+\varepsilon X\vec{AB}+\omega X(\omega X\vec{AB})$，速度投影定理: 刚体上 AB 两点速度矢量在 AB 连线上投影相等。// 速度瞬心: 平面运动中，只要转动角速度不为 0, 平面上就一定存在一点 c 满足 vc=0。判断: 已知 ω 和 VA, 则 $AC=VA/\omega$; 两速度垂线交点; 两速度平行且相等，瞬心在无穷远处, 在固定曲面无滑滚动，则是接触点.// 绕平行轴通向转动时，平面图形角速度等于牵连角速度与相对之和，反向则之差

第 5 章坐标系 $O\varepsilon\eta\zeta$,Oxyz 先绕 $O\zeta$ 转 ψ 进动角，再绕 Ox 转 θ 章动角，最后绕 Oz 转 φ 自转角, 瞬时角速度满足矢量加法.// 欧拉位移定理: 具有一个固定点的刚体的任意有限位移，可以绕通过固定点的某轴一次转动来完成.// 定点转:$a=\varepsilon XR+\omega X(\omega XR)$. 刚体绕相交轴转动的合成: 刚体以 ω_1 绕 Ol1 瞬时转动，同时，又以 ω_2 绕 Ol2 转动，则 $\omega=\omega_1+\omega_2$,// 欧拉运动学方程: $\omega=\dot{\psi}+\dot{\theta}+\dot{\varphi}=(\dot{\psi}sin\theta sin\varphi)i+(\dot{\psi}sin\theta cos\varphi-\dot{\theta}-\dot{s}in\varphi)j+(\dot{\psi}cos\theta+\dot{\varphi})k$, 与欧拉动力学方程联立求解定点运动的动力学问题.// 规则进动 (匀角速度为 ω_r 的自转轴绕某一固定轴匀公转角速度 ω_e):$\omega=\omega_e+\omega_r,\varepsilon=\omega_eX(\omega_e+\omega_r)=\omega_eX\omega_r$

第 6 章内力主矢、主矩皆为零.// 当物体沿着约束所能阻碍的方向有运动趋势时，具有改变物体运动状态的作用的力为约束反力，其他统称主动力. 研究动量定理，有外力系主矢 $R^{(e)}=\frac{dp}{dt}$, 对其做时间积分即为冲量// 质心:$r_C=\frac{\sum_{i=1}^n m_ir_i}{\sum_{i=1}^n m_i}=\frac{\sum_{i=1}^n m_ir_i}{M}$. 质心运动定理:$\frac{d\vec{p_c}}{dt}=R^{(e)}$ 质心动量变化率等于外力系主矢. 与其力的分布无关.$Mv_c=p_C=p$// 质点系的动量矩定理: 对**固定点** O 动量矩 $H_O=\sum_{i=1}^n r_iXm_iv_i,L_O^{(e)}=\sum_{i=1}^n m_O(F_i^{(e)})=\frac{dH_O}{dt}$// 转动惯量:$I_z=\sum_{i=1}^n m_ir_i^2=\sum_{i=1}^n m_i(x_i^2+y_i^2),H_z=I_z*\omega,L_z=I_z*\varepsilon$,(定轴转动)// 平行轴定理 (其他点相对质心):$I_z=I_{Cz'}+Md^2$.// 常见转动惯量: (1). 长 l 均质直杆绕端点、垂直杆的轴:$\frac{1}{3}Ml^2$; (2). 直杆绕质心:$\frac{1}{12}Ml^2$ (3). 均质矩形板:$I_y=\frac{1}{3}Ma^2,I_x=\frac{1}{3}Mb^2$ (4). 均质板对于通过 O 点垂直平面的轴:$I_z=I_x+I_y$; (5). 圆板 (圆柱) 通过圆心垂直板平面.$I_z=\frac{1}{2}MR^2$; (6). 圆板以直径为转轴:$I_z=\frac{1}{4}MR^2$; (7). 均质球体绕直径:$I_z=\frac{2}{5}MR^2$; (8). 圆柱体绕通过质心且垂直母线的轴:$I_z=\frac{1}{12}Ml^2+\frac{1}{4}MR^2$。// 质点系相对质心的动量矩定理: 质点系对质心的动量矩对时间的一阶导数等于外力系对质心的主矩.$H_O=r_CXMv_C+H'_C,=>L_C^{(e)}=\frac{dH'_C}{dt}$(固定点 O, 相对质心坐标系随质心平动)(其含义为定点运动的动量矩定理由对固定点推广到对质心).// 柯尼希定理:$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_iv'^2_i$, 前提: 在以质心为原点的屏东坐标系中成立. 例: 平面运动刚体动能 $T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2$// 理想约束的所有约束反力在可能的位移上所做的元功之和为零。动能定理对约束反力的求解无能为力，如果系统自由度两个以上，优先选用动能定理也不可取.

第 7 章. 刚体静力学: 研究惯性系中静止物体在外力系作用下保持静止.// 刚体平衡状态 (C 为质心):$v_C=const,\omega=0$. 而 $R=0,L_C=0$ 是力系平衡的充要条件，只能推导 $\omega=const$, 是刚体平衡的必要非充分条件.//质点系力系平衡的充要条件是作用在各质点上外力内力和均为零。物体平衡描述物体运动特征, 力系平衡描述力系运动学特征// 二力件: 大小相同，方向相反。// 力系主矩定理: 力系对任意点 A 的主矩等于对另一点 B 的主矩与主矢放在 B 点上对 A 点力矩之矢量和.$L_A=\sum_{i=1}^n(\vec{AB}+r'_i)XF_i=L_B+\vec{AB}XR$. 所以刚体力系平衡充要条件为对任意一点主矢和主矩都为零.// 不变性: 物体上加减任意的平衡力系，并不改变原有力系对物体的作用效果. 两个力系对同一物体的作用效果相同，则称等效力系.$R_1=R_2,L_{A1}=L_{A2}$// 刚体上力的可传性: 力沿自身的作用线任意滑动对刚体的作用效果不变.// Varignon 定理: 刚体上力系合力 F 对任一点之矩等于力系中各力对该点之矩矢量和 (该合力与力系等效，但不是任何一个力系都存在合力).$m_A(F)=\sum_{i=1}^n m_A(F_i)$// 若刚体三力平衡，则三力共面且汇交// 大小相等，方向相反不共线为力偶，力偶在作用平面内的任何平移和转动，包括保持力偶矩不变改变力或力偶臂长，都不改变其对刚体作用// 力系简化: 主矢不变量和主矩在主矢上投影不变量.$L_B*R=L_A*R$.// 如果力系可以简化为一个合力, 主矩为零，那必然 $L_A*R=0$, 因为 $L_AXR=(\vec{AB}XR)XR=(\vec{AB}*R)*R-(R*R)\vec{AB}$ 因此 B 点坐标可确定为 $\vec{AB}=\frac{RXL_A}{R^2}$。找一点 B, 满足 $L_{B\perp}=0$, 则 F_B,M 称为力螺旋.$F_B=R,M=(L_A*R)\frac{R}{R^2}$// 空间平衡力系中平行不共面的取轴矩最多三条.// 摩擦作用: 两个物体的接触处出现相对滑动或相对滚动，存在相互阻碍运动的趋势.

第 8 章. 定点运动的动力学问题// 任意方向轴 $O\varepsilon$ 与三轴夹角分别为 $\alpha\ \beta\ \gamma$,$I_\varepsilon=I_xcos^2\alpha+I_ycos^2\beta+I_zcos^2\gamma-2I_{xy}cos\alpha cos\beta-2I_{yz}cos\beta cos\gamma-2I_{zx}cos\gamma cos\alpha$ 其中惯性积为:$I_{xy}=\int_M xydm\ I_{yz}=\int_M yzdm\ I_{zx}=\int_M zxdm$, 矩阵形式:$I_\varepsilon=[cos\alpha,cos\beta,cos\gamma]\begin{Bmatrix}I_{xx}&-I_{xy}&-I_{xz}\\-I_{yx}&I_{yy}&-I_{yz}\\-I_{zx}&-I_{yz}&I_{zz}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}cos\alpha\\cos\beta\\cos\gamma\end{Bmatrix}$ 六个特征惯量// 如果有 $I_{yz}=I_{zx}=0$ 则 Oz 轴为惯性主轴，如果 Ox,Oy,Oz 都是惯性主轴则惯性积皆为 0，刚体对惯性主轴的转动惯量称为主转动惯量.// 刚体对空间中任意一点都存在三根相互垂直的惯性主轴. 惯量椭球:$I_xx^2+I_yy^2+I_zz^2-2I_{xy}xy-2I_{yz}yz-2I_{zx}zx=k^2,I_\varepsilon=\frac{k^2}{ON^2}$// 定点运动的动量矩定理, $H_O=\begin{Bmatrix}H_x\\H_y\\H_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}I_{xx}&-I_{xy}&-I_{xz}\\-I_{yx}&I_{yy}&-I_{yz}\\-I_{zx}&-I_{yz}&I_{zz}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{Bmatrix}$, 如果若 Oxyz 是固定系，惯量矩阵的特征惯量随时间改变，若 Oxyz 固结在刚体上的动系，则为常量，研究定点运动一般取动系。再由动量矩定理得到欧拉动力学方程.(结合欧拉运动学方程得到以欧拉角表示的二阶常微分方程。) 条件: 动系，动系主轴与惯性主轴重合，有 $H_x=I_x\omega_x...,H_O=I_x\omega_xi+I_y\omega_yj+I_z\omega_zk$, 得到 $I_x\frac{d\omega_x}{dt}+(I_z-I_y)\omega_y\omega_z=L_x;I_y\frac{d\omega_y}{dt}+(I_x-I_z)\omega_x\omega_z=L_y;I_z\frac{d\omega_z}{dt}+(I_y-I_x)\omega_x\omega_y=L_z$.// 仅受重力作用刚体: (1) 不受外力矩作用，质心就是固定点，根据欧拉动力学方程有 $I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2=C,H_O^2=C'$(三式分别乘 $I_x\omega x,I_y\omega y,I_z\omega z$ 相加再积分).

第 9 章. 动静法// 通过引入惯性力把动力学问题变成静力学问题处理

第 10 章. 分析静力学// 假想的、约束所允许的无限小位移称为虚位移.// 对定常、完整、双面约束方程 fj 做等时变分，有:$\sum_{i=1}^n(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i)=0,j=1,2...,k$, 广义坐标 q1,q2,...,qs,s=3n-k; 广义力 $Q_j=\sum_{i=1}^n F_i*\frac{\partial r_i}{\partial q_j}$, 总虚功:$\delta W=F*\delta r=\sum_{j=1}^s Q_j\delta q_j$// 理想约束是所有约束反力在质点系任何虚位移上做的总功为零 (摩擦力归为主动力).// 虚位移定理: 受定常、完整、理想约束的质点系保持静止充要条件: 所有主动力在虚位移上做的虚功和为零，等价于主动力所给广义力均为零.// 有势力:$F=-\nabla U=-(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z})$// 势能定理:... 保持静止充要条件: 主动力的势能取驻值 == 主动力势能变分为零; 广义力 $Q_j=-\frac{\partial U}{\partial q_j}$, 最小势能定理:$\frac{\partial U}{\partial q_j}=0,\frac{\partial^2U}{\partial q_j^2}>0$.// 补: 随遇平衡时势能各阶导数为 0

第 11 章. 拉格朗日力学// 动力学普遍方程:$\sum_{i=1}^n(F_i-m_ia_i)*\delta r_i=0$ 即任何瞬间，受理想约束的质点系上所有主动力和惯性力组成力系，在质点系的任意一组虚位移上虚功之和为零.//

现在只要把 ri 换成广义坐标即可得到第二类拉格朗日方程, 过程: 由分析静力学:$Q_j=\sum_{i=1}^n F_i*\frac{\partial r_i}{\partial q_j}$, 下面处理 $-\sum_{i=1}^n m_ia_i*\delta r_i=-\sum_{i=1}^n m_i\dot{v}_i\frac{\partial r_i}{\partial q_j}*\delta q_j$,(辅助等式 $v_i=\frac{\partial r_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^k\frac{\partial r_i}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j;\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial r_i}{\partial q_j};\frac{d}{dt}(\frac{\partial r_i}{\partial q_j})=\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{dr_i}{dt})$) 而 $m_i\dot{v}_i\frac{\partial r_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j})-\frac{\partial T_i}{\partial q_j}$, 因此第二类... 方程写为:$\sum_{j=1}^k(Q_j-[\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j})-\frac{\partial T}{\partial q_j}])\delta q_j=0$, 最后因为 qj 相互独立，有 $Q_j-[\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j})-\frac{\partial T}{\partial q_j}]=0,j=1,2,...,k$// 如果主动力为有势力 (与广义速度无关)，则根据 $Q_j=-\frac{\partial U}{\partial q_j},\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}=0$, 有 $\frac{d}{dt}[\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_j}]-\frac{\partial(T-U)}{\partial q_j}=0,(L=T-U)$.// 优点：求解动力学方程只需要动能、广义坐标等标量不需要矢量求解，没有约束反力。具有普遍性，适用于任意理想完整约束。// 解题步骤:

(1) 检查约束是否理想和完整; (2) 分析自由度数; (3) 选取广义坐标; (4) 写出动能表达式; (5) 写出广义力; (6) 代入方程.

第 17 章. 哈密顿力学// 哈密顿正则方程:$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j};\dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j};\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial t}$// 正则方程求解步骤:

(1) 根据自由度选取广义坐标; (2) 用广义坐标写出拉格朗日函数 L; (3) 用广义动量 $p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ 反解出 $\dot{q}_j$; (4) 求哈密顿函数 (H=T+U) 又称为广义能量,(对于定常系统，即约束稳定，约束方程不含时间，此时 H 代表机械能)$H=\sum_j p_j\dot{q}_j-L$, 把 $\dot{q}_j(q_j,p_j,t)$ 代入 H; (5)H 代入正则方程，得到 2k 个一阶方程组，如果约束稳定可直接写出能量积分; (6) 积分一阶方程组，根据 2k 个初始条件得到运动方程:$q_j(t,c_1,..,c_{2k}),p_j(t,c_1,..,c_{2k}),j=1,2,..,k$