§11.2 数量场在曲面上的积分

11.2.1 曲面的面积

设 S 是一张光滑曲面, 其参数方程为:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}, \qquad (u,v) \in D,$$

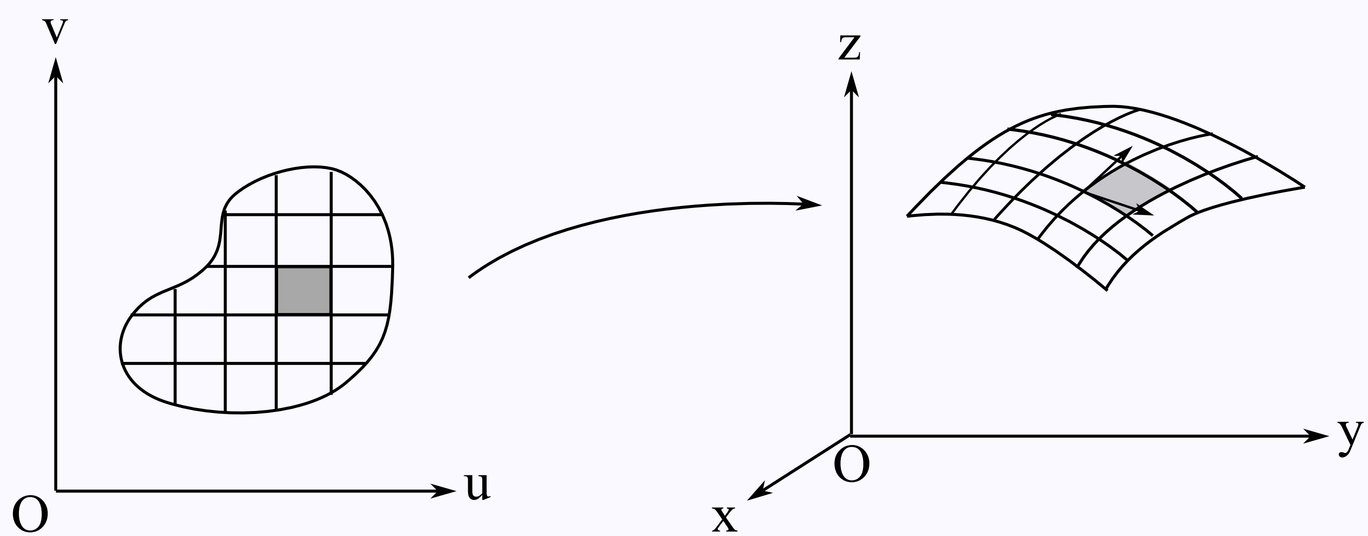
即 $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 具有连续的偏导数, 且

$$\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' \neq \mathbf{0}$$

这里 D 是参变量 (u,v) 所在平面中的一个有面积的区域.

$\vec{r}(u,v)$ 就是一个平面区域 D 到 $\mathbb{R}^3$ 的正则映射.

用平行于 Ouv 坐标轴的直线 $u=u_i, v=v_j$ 去分割区域 D, 其中一个小区域 $D_{ij}=\{(u,v):\ u_i\leqslant u\leqslant u_{i+1},\ \ v_j\leqslant v\leqslant v_{j+1}\}$ 对应在 S 上就得到一个子曲面 S_{ij}, 它由两条 u 曲线 $v=v_j, v=v_{j+1}$ 和两条 v 曲线 $u=u_i, u=u_{i+1}$ 围成. 当 $\Delta u_i=u_{i+1}-u_i$ 和 $\Delta v_j=v_{j+1}-v_j$ 都很小时, S_{ij} 可以近似看成由 $\vec{r}(u_{i+1},v_j)-\vec{r}(u_i,v_j)$ 和 $\vec{r}(u_i,v_{j+1})-\vec{r}(u_i,v_j)$ 张成的平行四边形.



因为

$$\vec{r}(u_{i+1}, v_j) - \vec{r}(u_i, v_j) = \vec{r}'_u(u_i, v_j)\Delta u_i + o(\Delta u_i),$$
$$\vec{r}(u_i, v_{j+1}) - \vec{r}(u_i, v_j) = \vec{r}'_v(u_i, v_j)\Delta v_j + o(\Delta v_j),$$

所以, S_{ij} 的面积

$$\Delta S_{ij} \approx |\vec{r}'_u(u_i, v_j) \times \vec{r}'_v(u_i, v_j)|\Delta u_i \Delta v_j.$$

于是曲面 S 的面积

$$S = \iint_D |\vec{r}'_u(u, v) \times \vec{r}'_v(u, v)|\, du dv.$$

由于

$$(\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v)^2 = \vec{r}'^2_u \vec{r}'^2_v - (\vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v)^2,$$

命

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}'^2_u = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u, \\ G &= \vec{r}'^2_v = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v, \\ F &= \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v, \end{aligned}$$

就得到曲面 S 上的面积元素

$$dS = |\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v)|\, dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv, \tag{11.1}$$

和曲面 S 的面积的一般计算公式

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{11.2}$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

当 $F=\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_v'=0$ 时, 说明 u 曲线和 v 曲线的切向量相互垂直, 所以 u 曲线和 v 曲线在曲面上编织了一个相互垂直的曲线网.

当曲面 S 是平面区域时, 若 S 的参数方程为

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=0,\qquad (u,v)\in D.$$

则

$$|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,$$

面积元素

$$d\sigma=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

再次得到二重积分中平面区域 S 和平面区域 D 之间变换中面积元素之间的关系.

如果曲面 S 是定义在区域 D 上的二元函数 $z=f(x,y)$ 给出, 这时可将 x,y 看作参变量, 而曲面 S 的参数方程就取特别的形式

$$\vec{r}=\vec{r}(x,y)=(x,\ y,\ f(x,y))\qquad (x,y)\in D,$$

因而

$$\vec{r}'_x=(1,\ 0,\ f'_x),\quad \vec{r}'_y=(0,\ 1,\ f'_y).$$

于是

$$E=1+f'^2_x,\ \ G=1+f'^2_y,\ \ F=f'_xf'_y.$$

由此得

$$dS=\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,dxdy$$

及

$$S=\iint_D\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}dxdy. \tag{11.3}$$

如果曲面的方程为 $x=g(y,z)$ 或 $y=h(z,x)$, 结果是类似的.

例 1 求半径为 R 的球的表面积.

解 设球面 S 的参数方程为

$$\vec{r}:\ x = R\sin\theta\cos\varphi,\quad y = R\sin\theta\sin\varphi,\quad z = R\cos\theta,$$
$$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

计算可得

$$\vec{r}'_\theta = (R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ -R\sin\theta),$$
$$\vec{r}'_\varphi = (-R\sin\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ 0).$$

$$E = R^2,\quad F = 0,\quad G = R^2\sin^2\theta.$$

所以球面面积微元是

$$dS = R^2\sin\theta d\theta d\varphi.$$

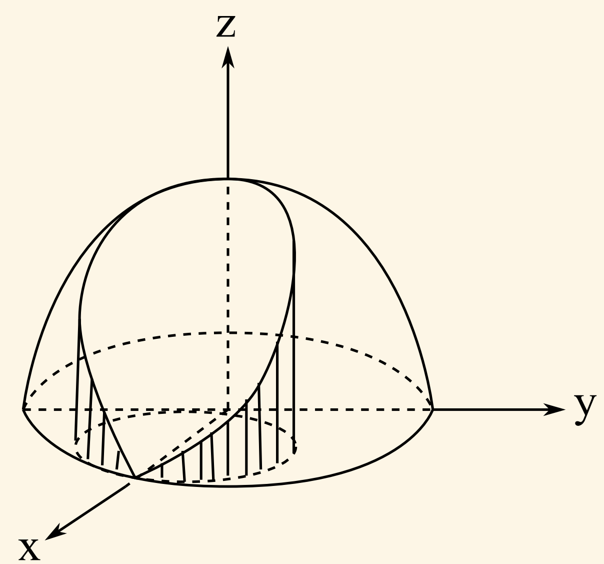
故, 球面面积为

$$S = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} R^2\sin\theta d\varphi = 4\pi R^2.$$

例 2 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所截下的曲面面积.

解 由于对称性, 可知所求曲面的面积是它在第一卦限内面积的四倍. 采用球面坐标时 $dS=R^2\sin\theta d\theta d\varphi$. 为确定参数 θ,φ 的变化区域 D, 把球面的参数方程代入柱面方程 $x^2+y^2=Rx$ 可知有 $\sin\theta=\cos\varphi$, 因为在第一卦限中 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, 所以这两张曲面的交线在球面坐标下的方程为 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$. 因此 $D: 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}-\varphi$, 从而算得

$$\begin{aligned}
S &= 4\iint_D R^2\sin\theta d\theta d\varphi \\
&= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}\sin\theta\, d\theta \\
&= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)d\varphi \\
&= 2R^2(\pi-2).
\end{aligned}$$



例 3 计算圆锥面 $y^2+z^2=x^2$ 被柱面 $y^2+z^2=R^2$ 所截下的曲面 S 的面积

解 截出的曲面在平面 Oyz 上的投影区域 D 是半径为 R 的圆 $y^2+z^2\leqslant R^2$ (下图中画出了曲面在 x 正半轴部分), 所以

$$\sigma(S)=2\iint_D\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz=2\iint_D\sqrt{2}\,dydz=2\sqrt{2}\pi R^2.$$